АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ИНСТИТУТ НАУЧНОЙ ИНФОРМАЦИИ

РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ

МАТЕМАТИКА

РЕФЕРАТЫ

9393—10443

*

№ 11 1958
ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР
МОСКВА

РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ МАТЕМАТИКА

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР *С. М. Никольский*

ЧЛЕНЫ РЕДКОЛЛЕГИИ: *П. С. Александров, И. Н. Векуа, А. Н. Колмогоров, Ю. В. Линник, А. И. Маркушевич, М. А. Наймарк, В. В. Немыцкий, С. М. Никольский, П. С. Новиков, Д. Ю. Панов, К. А. Рыбников, Н. В. Смирнов, С. П. Фиников*

УЧЕНЫЙ СЕКРЕТАРЬ *А. А. Конюшков*

СОДЕРЖАНИЕ

Общие вопросы 1
История математики. Биографии . . . 3
Преподавание математики 7
Основания математики и математическая логика 9
Теория чисел 10
Алгебра 15
Многочлены и линейная алгебра . . . 15
Группы 19
Поля, кольца и структуры 26
Алгебраическая теория схем связи и управления 34
Топология 37
Теория функций действительного переменного 46
Теория множеств 51
Приближение функций полиномами и их обобщениями 57
Теория функций комплексного переменного 59
Дифференциальные уравнения 71
Обыкновенные дифференциальные уравнения 71
Уравнения в частных производных . . 89
Приложения к физике, технике и естественным наукам 95
Интегральные уравнения 99
Приложения интегральных уравнений —
Вариационное исчисление 103
Анализ (другие вопросы) 104
Числовые ряды 107
Специальные функции 111
Интегральные преобразования и операционное исчисление 113
Приложения общих методов математического анализа 115
Функциональный анализ 115
Теория вероятностей 125
Математическая статистика 134
Теория игр и математическая экономика 143
Применение теоретико-вероятностных и статистических методов 145
Геометрия 153
Элементарная геометрия 154
Приложения геометрии 156
Проективная и начертательная геометрия 156
Алгебраическая геометрия 159
Дифференциальная геометрия трехмерного пространства и обобщения . . 160
Геометрия n-мерного пространства. Теория относительности 162
Глобальная теория дифференцируемых многообразий и обобщенные пространства 165
Метрические методы в геометрии . . 167
Выпуклые многообразия 168
Численные и графические методы 169
Таблицы . . . . . —
Вычислительные машины и математические приборы 179
Использование вычислительных устройств и их элементов в технике 193
Авторский указатель 201

Адрес редакции: Москва, Д — 219, Балтийский пос., д. 42-Б

REFERATIVNYI ZHURNAL MATHEMATIKA

EDITOR *S. M. Nikolsky*

EDITORIAL BOARD: *P. S. Alexandrov, S. P. Finikov, A. N. Kolmogorov, Yu. V. Linnik, A. I. Marcushevich, M. A. Naimark, V. V. Nemycky, S. M. Nikolsky, P. S. Novikov, D. Yu. Panov, K. A. Rybnikov, N. V. Smirnov, I. N. Vekua*

EXECUTIVE SECRETARY *A. A. Konjushkov*

CONTENTS

General
- History. Biography
- Teaching of mathematics

Foundations. Mathematical logic

Theory of numbers

Algebra
- Polynomials. Linear algebra
- Groups
- Fields, rings, lattices
- Algebraic theory of communication and control circuits

Topology

Theory of functions of real variables
- Theory of sets
- Approximations of functions by polynomials and by their generalizations

Theory of functions of complex variables

Differential equations
- Ordinary differential equations
- Partial differential equations
- Applications to physics, technology and natural sciences

Integral equations
- Applications of integral equations

Calculus of variations

Analysis (other aspects)
- Numerical series
- Special functions
- Integral transforms, operational calculus
- Applications of general methods of mathematical analysis

Functional analysis

Theory of probability
- Mathematical statistics
- Theory of games, mathematical economics
- Applications of probabilities and statistical methods

Geometry
- Elementary geometry
- Applications of geometry
- Projective and descriptive geometry
- Algebraic geometry
- Differential geometry of 3-dimensional space and generalizations
- Geometry of n-dimensional space. Theory of relativity
- Global theory of differentiable manifolds and generalized spaces

Metric methods in geometry

Convex manifolds

Numerical and graphical methods
- Tables

Computers and mathematical devices
- Applications of computer devices

Author index

Editorial Office: Moscow, D — 219, Baltijsky poselok, 42-B

РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ
МАТЕМАТИКА

Рефераты 9393—10443 **№ 11** **Ноябрь 1958 г**

ОБЩИЕ ВОПРОСЫ

Редактор *К. А. Рыбников*

9393. **Сообщение ТАСС. О запуске третьего советского искусственного спутника Земли.** Газ. «Правда», 1958, 16 мая, № 136, стр. 1

9394. **Советские искусственные спутники Земли (Некоторые итоги научных исследований на двух первых советских спутниках Земли).** Газ. «Правда», 1958, 27 апр., № 117, стр. 4

9395. **Всесоюзный математический съезд в 1956 г. Виноградов** (Všesvazový matematický sjezd v roce 1956. Vinogradov I.M.), Pokroky mat., fys. a astron., 1957, 2, № 5, 617—620 (чешск.)

Перевод статьи автора «К итогам Всесоюзного математического съезда» (РЖМат, 1957, 3666).

9396. **Республиканская конференция по вопросам статистических методов анализа и контроля производства, 14—15 июня 1957 г. Гнеденко Б.,** Укр. матем. ж., 1958, 10, № 1, 103

9397. **V—VII научные конференции Томского университета. Иоганзен Б. Г., Пегель В. А.,** Уч. зап. Томского ун-та, 1957 (1958), № 30, 145—152

9398. **Семинар по истории математических наук при Институте математики АН УССР. Добровольский В. А.,** Укр. матем. ж., 1958, 10, № 1, 103—104

Семинар работает с начала 1956 г. Статья имеет информационный характер.

9399. **О семинаре И. М. Гельфанда по функциональному анализу и математической физике в МГУ. Вишик М. И., Шилов Г. Е.,** Успехи матем. наук, 1958, 13, № 2, 253—263

9400. **Конгресс болгарских математиков. Георгиев** (Congresul matematicienilor bulgari. Gheorghiev Gh.), Gaz. mat. şi fiz., 1958, 10, № 1, 52—54 (рум.)

С 10 по 14 октября 1956 г. в Софии проходил съезд болгарских математиков. В работе конгресса приняли участие представители СССР, Китая, Франции, Польши, Чехословакии, Венгрии, ГДР, Югославии и Румынии. Работа конгресса проходила по двум секциям. В первой секции были представлены сообщения по теории чисел, алгебре, топологии, теории функций, дифференциальным уравнениям; во второй секции сообщения были по геометрии, механике и прикладной математике.

Академик Обрешков сделал доклад о развитии математики в Болгарии. Математическое образование в Болгарии начинается с момента открытия Софийского университета (1904 г.), а оригинальные работы болгарских математиков появляются с 1912 г. Особый интерес вызвали доклады Серпинского (V. Sierpiński), С. Л. Соболева (ошибочно напечатано: L. Sobolev), Данжуа (D. Denjoy), Борсука (K. Borsuk), Моисила (G. Moisil). А. Н. Гливич

9401. **Торжественные научные сессии отделений Болгарской АН. Отделение математических, физических и технических наук. Георгиев** (Тържествени научни сесии на отделенията на БАН. Отделение за математически, физически и технически науки. Георгиев Д.), Списание Българ. АН, 1957, № 2-3, 93—97 (болг.)

9402. **Конгресс немецких математиков в Дрездене. Элиану** (Congresul de la Dresda al Asociaţiei matematicienilor germani. Elianu I.), Gaz. mat. şi fiz., 1958, 10, № 1, 54—55 (рум.)

9—14 сентября 1957 г. в Дрездене проходил конгресс немецких математиков. В конгрессе приняли участие представители ГДР, ФРГ, Англии, Австрии, Болгарии, Италии, Китая, Голландии, Венгрии, Норвегии, Румынии, СССР, США, Польши, Чехословакии и Югославии.

На конгрессе было заслушано более 100 докладов по теории чисел, алгебре, анализу, теории функций комплексного переменного, функциональному анализу, топологии, дифференциальной геометрии, механике, теории вероятностей, математической логике и теории счетных машин. В статье особо отмечаются доклады: П. С. Александров (Alexandrov), 50 лет топологии; Борсук (K. Borsuk), О некоторых проблемах интуитивной топологии. А. Н. Гливич

9403. **Значение математики** (Rola matematyki. (Kronika)), Matematyka, 1957, 10, № 4, 42 (польск.)

Информационное сообщение о совещании по вопросу о значении математики, состоявшемся в июле 1957 г. во Вроцлаве в Математическом институте Польской академии наук. В. Ф. Рогаченко

9404. **Конкурс по математике и физике среди студентов в 1957 г.** (Concursul de matematica şi fizică pentru studenţi din anul 1957), Gaz. mat. şi fiz., 1958, 10, № 1, 55—57 (рум.)

Румынское математическое общество совместно с Румынским студенческим обществом и Министерством просвещения и культуры организовало в феврале 1957 г. конкурс по математике и физике среди студентов высших учебных заведений. Конкурс проходил в два этапа. Отмечается, что в связи с недостаточной подготовкой конкурса в нем приняла участие небольшая часть студентов. А. Н. Гливич

9405. **Симпозиум по теории информации в США. Панов Д. Ю.,** Вестн. АН СССР, 1957, № 3, 104—106

Международный симпозиум по теории информации проходил 10—12 сентября 1956 г. в Массачусетском технологическом институте (Кембридж, США). Делегация Советского Союза была в составе Б. В. Гнеденко, В. И. Сифорова и Д. Ю. Панова. Программа симпозиума касалась теории кодирования (линейное кодирование для передачи последовательности коррелятив-

но-связанных сигналов), приложения метода полугрупп к проблемам кодирования, теории систем информации с обратной связью, теории кодов с исправлением ошибок, емкости каналов с шумами при нулевой ошибке и ряда смежных вопросов. Доклады членов нашей делегации, в частности зачитанный доклад академика А. Н. Колмогорова, вызвали большой интерес. Советские ученые посетили Гарвардский университет и научные центры в ряде городов США, в частности фирму «ИБМ» в Нью-Йорке.

В результате поездки сложилось впечатление, что имеется много возможностей для расширения контактов между советскими и американскими учеными.

Г. П. Боев

9406. Труды собрания Израильского математического общества, проходившего в Тель-Авиве 29 ноября 1956 г. (Proceedings of the meeting of the Israel Mathematical Union held at Tel Aviv. nov. 29, 1956), Bull. Res. Council Israel, 1957, **A6**, № 2, 133—139 (англ.)

9407. Институты и вычислительные центры (Institute und Rechenzentren), MTW-Mitt., 1958, **5**, № 2, 107 (нем.)

Информация об очередных изданиях этих организаций в Риме, Дрездене, Гейдельберге, Мюнхене, Бари.

9408. Об алгоритмическом описании процессов управления. Ляпунов А. А., Шестопал Г. А., Матем. просвещение, вып. 2, 1957, 81—95

Кратко излагаются основные принципы работы управляющих систем. Приведены примеры управляющих систем (регулятор Уатта, работа диспетчера на железнодорожном транспорте, функционирование нервной системы человека). Дано определение алгоритма. Логические схемы алгоритмов. Примеры логических схем.

Н. П. Жидков

9409. Категория вероятности. Смирнов Л. В., Вестн. Ленингр. ун-та, 1957, № 17, 70—79 (рез. англ.)

Рассматривается классическое и статистическое определение вероятности. Аксиоматического определения автор не касается. Затрагивается вопрос о вероятностных суждениях в логике. Делается попытка рассмотреть связь таких понятий, как вероятность, возможность, действительность и необходимость. Основное определение вероятности автор дает следующее: «вероятность как мера возможности есть степень развитости возможности, т. е. степень «обоснованности», возможности, степень ее способности стать действительностью или степень ее близости к необходимости».

Л. Е. Майстров

9410. Математика и конкретность. Пуч-Адам (Matematyka a konkret. Puig-Adam Pedro), Matematyka, 1958, **11**, № 1, 12—15 (польск.)

9411. Значение математики и математические исследования. Фер (Values and the study of mathematics. Fehr Howard F.), Scripta math., 1955, **21**, № 1, 49—53 (англ.)

В связи с проблемой улучшения высшего математического образования в США рассматриваются некоторые философские вопросы обоснования математики, вопрос о ее значении и практическом смысле. Различаются внутреннее значение (ценность) математики для развития самого математического мышления (values intrinsic to the study of mathematics) и внешнее — для других областей жизни и человеческой культуры (extrinsic values in the study of mathematics).

Внутренние ценности математики включают в себя изучение метода дедуктивного мышления и символических средств. При этом они всегда находятся в состоянии изменения, которое ведет к их самоусовершенствованию. Внешние по отношению к предмету математики ценности касаются главным образом вопросов общего воспитания. Ряд этих вопросов не имеет никакого отношения к математике и их следует исключить из обсуждения. К таким вопросам автор справедливо относит, например, вопрос о взаимодействии и руководстве, о чистых линиях. Внешние ценности, имеющие отношение к математике, включают в себя вопросы информации, логики, употребление инструментов и орудий и т. д. Информация, как и другие категории этого рода, не является понятием исключительно математическим, но в социальном плане она представляет собой средство использования математических знаний на пользу человечества.

П. Е. Сивоконь

9412 К. Сочинения. Т. 4. Бианки (Opere. A cura dell'Unione matematice italiana e col contributo del consiglio nazionale delle ricerche. Vol. 4. Deformazioni delle quadriche. Teoria delle trasformazioni, delle superficie applicabili sulle quadriche. Parte 2. Bianchi Luigi. Roma, Ed. Cremonese, 1956, vi, 367 p., 3000 L.), Bibliogr. ital., 1956, **90**, № 668, 832 (итал.)

9413 К. Сочинения. Т. 5. Бианки (Opere Vol. 5. Transformazioni delle superficie e delle curve. Bianchi Luigi, Roma, Ed. Cremonese, 1957, 538 p., 5000 L.) (итал.)

В данном томе приведены тексты двадцати пяти статей автора по геометрии. Введение к книге написано Торторичи (Pietro Tortorici).

М. К. Керимов

9414 К. Кибернетика. 2-е изд. Косса (La cybernétique. 2e éd. rev. et corrigée. Cossa P. (Collect. évolut. sci., № 4). Paris, Masson et Cie, 1957, 102 p., ill., 800 fr.) (франц.)

Популярное изложение основных достижений счетной техники, математического машиностроения, автоматики, телемеханики в связи с проблемами кибернетики. Рассчитана на самые широкие круги читателей. В ней дается анализ принципа обратной связи, рассматриваются вопросы теории информации. Подробно рассмотрены различные типы электронных машин, автоматические, электронные и телемеханические устройства с постоянными реакциями (электронные лисицы Дюкрока, черепахи Грэя Уолтера). Автор правильно специально подчеркивает отличие живых организмов от электронных машин и резко выступает против их отождествления, против наделения машины ощущением и разумом. Он подвергает критике идеалистические концепции зарубежных кибернетиков, опровергает реакционные концепции Ашби и других кибернетиков в области философии и социологии.

П. Е. Сивоконь

9415 К. Сочинения. Т. 1. Сегре (Opere. Segre Corrado. Vol. I. A cura dell'Unione matematica italiana e col contributo del Consiglio nazionale delle ricerche. Roma. Ed. Cremonese, 1957, XII, 445 p., ill.) (итал.)

В книге приводятся тексты двадцати одной статьи автора по геометрии. Обстоятельное введение написано Ф. Севери. Составители снабдили книгу примечаниями и именным указателем. Приводится фотография автора.

М. К. Керимов

9416 К. Избранные сочинения. Т. 1. Фубини (Opere scelte. Vol. 1. Fubini Guido. Roma, Ed. Cremonese, 1957, 369 p., 3500 L.) (итал.)

В настоящем томе избранных сочинений Фубини (всего 2 тома) содержится научная биография автора, список всех его сочинений (193 статьи и 6 книг) и тексты семнадцати статей по геометрии, теории функций и дифференциальным уравнениям. Книга снабжена именным указателем.

М. К. Керимов

9417 Ж. Известия высших учебных заведений Министерства высшего образования СССР. Математика. Отв. ред. Норден А. П. Казань, Казанск. ун-т; двухмесячный, 60 р. в год

Журнал начал выходить с 1957 г.; посвящен различным вопросам математики.

9418 Ж. Инженерно-физический журнал. Гл. ред. Лыков А. В. Минск, АН БССР, ежемесячный,72 р. в год

Выходит в свет с начала 1958 г. Ставит своей основной целью публикацию результатов физических исследований, важных в развитии современной техники. В нем публикуются также статьи по различным вопросам прикладной математики, посвященным главным образом развитию инженерно-технических методов решения задач теплопроводности, приближенным вычислениям и пр. Н. С. Кошляков

9419 Ж. Известия высших учебных заведений Министерства высшего образования СССР. Авиационная техника. Отв. ред. Одиноков Ю. Г. Казань. Квартальный, 28 р. в год

9420 Ж. Известия высших учебных заведений Министерства высшего образования СССР. Радиофизика. Отв. ред. Гинзбург В. Л. Горький, Горьковск. ун-т, двухмесячный, 60 р. в год

9421 Ж. Математика и физика. Двумесячное методическое издание (Математика и физика. Двумесечно методическо списание. М-во просв. и култ. София, «Нар. просвета». 36 лв. за год)

ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ. БИОГРАФИИ

9422. Математические игры, связанные с игрой «ним», и их математический анализ. Гарднер (Mathematical games concerning the game of nim and its mathematical analysis. Gardner Martin), Scient. Amer., 1958, 198, № 2, 104, 106, 108, 111 (англ.)

«Ним» — одна из самых старых математических игр, распространившаяся, возможно, из Китая. Игра состоит в следующем: монеты раскладывают в ряды по произвольному числу монет в каждом; каждый из двух игроков по очереди снимает из какого-либо ряда одну или более монет; выигрывает (или проигрывает) тот, кто снимает последнюю монету. Полная теория этой игры была опубликована в 1901 г. Боутоном (Ch. Bouton), которым было и дано игре название «ним» (обозначающее в архаическом английском языке глагол «убирать»). Согласно Боутону, каждое положение монет является либо «надежным» (для выигрыша), либо нет. Тактика игры состоит в том, чтобы каждым ходом создавать для себя надежное положение. Оценить же надежность положения очень просто, записав число монет в каждом ряду по двоичной системе и просуммировав поразрядно двоичные цифры: если все суммы оказываются четными, то положение надежно. Так как счетные машины работают в двоичной системе, то нетрудно составить программу для безошибочной игры машины в «ним» или же создать специальную машину. Первая такая машина «Ниматрон» была изобретена и запатентована в 1940 г. Кондоном (бывшим директором Национального бюро стандартов) и построена компанией Вестингауз. Объем игры этой машины составлял 4 строки по 7 монет в каждой. Вес машины 1 m. Из 100 000 игр машина выиграла 90 000. В 1941 г. аналогичная машина была описана Редхефером (профессором университета в Лос-Анжелесе). Объем игры машины был такой же, как и у «Ниматрона», но она весила всего 5 фунтов. В 1951 г. на Британском фестивале, а позднее в Берлине был выставлен робот «Нимрод», играющий в «ним».

Из вариантов игры лет 10 назад Гейн (в Копенгагене) исследовал игру «Так-тикс» или «Було». Другой вариант «нима», в котором ограничивалось число убираемых монет, был исследован в 1910 г. американским математиком Муром (E. Moore). Г. П. Боев

9423. История теории информации. Черри (A history of the theory of information. Cherry E. Colin), Methodos, 1956, 8, № 29—30, 57—92 (англ.)

Приводятся наиболее существенные этапы развития языков, кодов и символики, охватываемых точной математической теорией. В статье рассматривается теория коммуникации Хартли и теория структуры сигналов Габора. Логическим обобщением теории Хартли является современная статистическая теория Винера и Шеннона, в которой «информация» получает количественное выражение. Отдельная глава посвящена вычислительным машинам. В заключение делаются общие выводы и проводится та точка зрения, что «информация плюс энтропия являются существенным инвариантом физической системы». Библ. 53 назв.

Г. П. Боев

9424. Основные математические понятия. Фельбер (Základné matematické pojmy. Felber Stanislav), Slov. filoz. časop. SAV, 1957, 12, № 1, 3—15 (словацк.)

Философско-исторический очерк, в котором на примере натуральных чисел и нуля, с привлечением лингвистических, этнографических и других культурно-исторических данных, показывается возникновение и развитие основных математических понятий.

В. Ф. Рогаченко

9425. Каким образом математика сделалась дедуктивной наукой. Сабо (Wie ist die Mathematik zu einer deduktiven Wissenschaft geworden? Szabó A.), Acta antiqua, Acad. Scient. Hung., 1956, 4, № 1—4, 109—152 (нем.)

Основная цель статьи — показать, что развитию дедуктивной математики предшествовало развитие логики и что развитие последней шло под влиянием элейской философии,— осталась недостигнутой, но тем не менее в статье установлен ряд очень ценных фактов.

1. Новое толкование фрагмента B4 Архита в «Vorsokratiker» Дильса позволяет установить, что преобладание геометрического характера в греческой математике над арифметическим наступило около 400 г. до н. э.

2. Показан интуитивно-наглядный характер геометрии Фалеса: доказательства производились наложением на чертеже и логическое обоснование (выход из заранее установленных «начал» — определений, аксиом и постулатов) еще не было вполне строгим.

3. Показано, что в начале дедуктивной математики греков преобладали доказательства от противного, т. е. доказывалось не выставленное предложение, но опровергалось ему противоположное.

Автор не учитывает, что развитие логики могло идти параллельно с выработкой математического доказательства, что разработка логики в пифагорейских школах могла производиться в чисто педагогических целях (с именем Пифагора связывается большое количество положений воспитательного характера), что диалектические доказательства встречаются не только у Парменида и Зенона, но и у комика Эпихарма (Сицилия) и, наконец, что речи гомеровских героев уже являются искусно логически построенными, что, без сомнения, было вызвано специальными условиями греческого социального уклада (вместо освященного религией и

даже силой царской власти авторитета появлялась необходимость убеждения). И. Н. Веселовский

9426. Термин «начало» (ἀρχή) от предшественников Сократа до Аристотеля. Лумпе (Der Terminus «Prinzip» (ἀρχή) von den Vorsokratikern bis auf Aristoteles. Lumpe Adolf), Arch. Begriffsgeschichte, 1955, 1, 104—116 (нем.)

Автор прослеживает различное применение термина ἀρχή (начало, элемент, стихия, причина в природе, прицип в логическом рассуждении) в естественнонаучной и математической терминологии античной Греции. Только у Аристотеля (384—322 до н. э.) этот термин получил философское значение.

И. Н. Веселовский

9427. Алгебра без x-ов. Пратт (Algebra without x's. Pratt Gertrude), School Sci. and Math., 1958, 58, № 2, 93—96 (англ.)

Исторический очерк популярного характера. Автор приводит решение одной задачи из древнеегипетского папируса на уравнение первой степени и решение Алхорезми квадратного уравнения. На этих примерах автор подчеркивает важную роль символики в алгебре.

А. Е. Раик

9428. Арабские рукописи по оптике на Британских островах (математическая и физическая оптика). Уинтер (The Arabic optical MSS in the British isles. (Mathematical and physical optics). Winter H. J. J.), Centaurus, 1956, 5, № 1, 73—88 (англ.)

Перечень рукописей по оптике, написанных в разное время (от IX до XVI в.), содержащихся в библиотеке Великобритании (15 экземпляров). И. Н. Веселовский

9429. Вклад Индии в античную математику. Сридхаран (Indian contributions in ancient mathematics. Sreedharan V. P.), Carnegie Techn., 1957, 22, № 2, 32—35, 61 (англ.)

Раскопки в Мохенджо-Даро и Хараппе свидетельствуют о том, что индийцы имели свою письменность очень давно. Один из крупнейших вкладов, которые внесли индийцы в математику,— это десятеричная позиционная система счисления. Автор считает, что она была открыта в период от 100 г. до н. э. до 300 г. н. э. и уже в VIII столетии была в Индии общеупотребительной. Бхаскара (1150 г.) трактовал нуль как бесконечно малое количество.

Основные арифметические операции были еще в античности сформулированы так, что они лишь немногим отличаются от современных. Указано на известные индийцам соотношения: $(a+b)^2=(a-b)^2+4ab$, $n^2=1+$

$$+3+5+\ldots+n,\quad n^3=\sum_{r=1}^{n}[3r(r-1)+1],$$

$$x^3=x+3x+5x+\ldots \text{ до } x \text{ членов},$$

$$x^3=x^2+(x-1)\{1+3+\ldots+(2x-1)\},$$

$$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{3^{n-2}}+\frac{1}{2\times 3^{n-2}} \text{ и т. д.}$$

Автор полагает, что «тройное правило» заимствовано европейцами у индийцев через арабов. Общеизвестен индийский метод решения уравнения $ax^2+bx=c$ умножением всех членов на $4a$. Далее автор отмечает, что еще Ариабхатта предложил использовать буквы для обозначения неизвестных. Бхаскара дал решение неопределенного уравнения $cx^2+1=y^2$ в виде $x=\frac{2t}{t^2-c}$, $y=\frac{t^2+c}{t^2-c}$. В древних индийских рукописях имеется правило вычисления длины окружности по формуле

$$S=\frac{4d}{1}-\frac{4d}{3}+\frac{4d}{5}-\frac{4d}{7}+\ldots$$

(d — диаметр окружности), откуда получается известный в литературе ряд Лейбница:

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots$$ А. Е. Раик

9430. Из истории десятичных дробей. Добжицкий (Z historii ułamków dziesiętnych. Dobrzycki Stanisław), Matematyka, 1957, 10, № 2, 1—21 (польск.)

После краткого введения, посвященного возникновению простых и шестидесятичных дробей у народов Месопотамии и в Египте, говорится о руководителе Самаркандской астрономической обсерватории Улугбека — математике и астрономе Джемшиде аль-Каши, который первым понял практическое и научное значение десятичных дробей и широко применил их для вычислений в своих работах: «Трактат об окружности» и «Ключ к арифметике» (около 1427 г.). Европейские ученые, не зная работ аль-Каши, через 150 лет вторично открыли десятичные дроби.

Отмечаются работы Клавия, Рудольфа, Виета и других математиков, эпизодически применявших десятичные дроби до опубликования Стевином в 1585 г. его «Десятой части», в которой впервые в Европе было дано систематическое изложение теории и практики десятичных дробей. Приводится таблица, иллюстрирующая эволюции обозначений десятичных дробей от аль-Каши до Валлиса.

В конце работы рассказывается о постепенном проникновении теории десятичных дробей в польские учебники математики в XVII—XVIII вв.

В. Ф. Рогаченко

9431. Краткий обзор развития математики в чешских землях от основания университета до Белогорской катастрофы. Феттер (Stručný přehled vývoje matematiky v českých zemích od založení university do katastrofy bělohorské. Vetter Q.), Mat. škole, 1957, 7, № 6, 343—357 (чешск.)

Обзор охватывает период 1348—1620 гг. и касается не только математических, но и астрономических работ как чешских (Кржиштян, Гайка, Оптат и др.), так и иностранных ученых, работавших в Праге (Тихо Браге, Кеплер, Бюрги). Г. Ф. Рыбкин

9432. Пятьдесят лет служения чешской школе и чешской науке (Padesát let služby české škole a české vědě), Pokroky mat., fys. a astron., 1957, 2, № 6, 733—734 (чешск.)

Информация об исполнившемся в 1957 г. пятидесятилетии научно-педагогической деятельности проф., д-ра Гвидо Феттера, историка математики, семидесятилетие со дня рождения которого отмечалось.

Г. Ф. Рыбкин

9433. Первые кафедры математических наук в Ягеллонском университете. Дянни (Pierwsze katedry nauk matematycznych na Uniwersytecie Jagiellońskim. Dianni Jadwiga), Zesz. nauk. Uniw. jagiell., 1957, № 14, 3—19 (польск.; рез. русск., англ.)

После краткого очерка развития Краковского университета, основанного в 1364 г. Казимиром Великим и реорганизованного в 1400 г. Владиславом II Ягелло, рассказывается о возникновении и учебной работе в XV в. кафедр математики и астрономии. Первую из них основал около 1410 г. Ян Стобнер, а вторую — в 1459 г.— польский астроном Мартин Круль из Журавицы. Это были первые специальные кафедры математических наук. Только с конца XV в. начали возникать подобные кафедры в других европейских университетах. Благодаря деятельности этих кафедр Краковский университет в эпоху своего расцвета (1480—1510 гг.) стал крупнейшим международным центром математических и астрономических наук, привле-

кавшим ученых и студентов из различных стран Европы. В этот период в университете преподавали такие выдающиеся польские астрономы и математики, как учитель Коперника — Войцех Брудзевский, Ян Глоговский и др. В. Ф. Рогаченко

9434. **Математика в Польше в XVI в. Дянни, Вахулка** (Matematyka w Polsce w wieku XVI. Dianni Jadwiga, Wachułka Adam), Matematyka, 1955, 8, № 4, 13—21 (польск.)

Дается краткий обзор первых и единственных в XVI в. математических книг, написанных на польском языке: по арифметике — Томаша Клоса (1538) и Бернарда Воеводки (1553), а также по геометрии — Станислава Гжепского (1566; переиздана в 1574 и 1602 гг.). Далее отмечается значение для развития математики и астрономии «Тригонометрии» Коперника, изданной на латинском языке в 1542 г. Перечисляются книги по математике, изданные в Польше на латинском языке в XVI в., и указываются причины того, что к концу этого века математика в Польше пришла в упадок. В. Ф. Рогаченко

9435. **Династия математиков Бернулли (1654—...1807)** (Una dinastia di matematici: i Bernoulli (1654—... ...1807)), Sci. giov., 1958, 7, № 3-4, 33—42 (итал.)

Обзор творчества математиков семейства Бернулли: Якова I, Иоганна I, Николая, Даниила, Иоганна III и Якова II. Понятия анализа бесконечно малых тут же разъясняются, так как изложение назначено для школьников. Отмечаются естественно-научные работы Иоганна I и подчеркивается, что так называемый «ряд Тейлора» был найден им на 21 год ранее Тейлора, что в свое время показал акад. Н. Я. Сонин. И. Я. Депман

9436. **Мемуар Лагранжа о движении трех тел. Марсикано** (La memoria de Lagrange relativa al movimiento de los tres cuerpos. Marsicano Fenix Roberto), Cienc. y técn., 1957, 123, № 617, 75—81 (исп.; рез. англ.)

Используя работу Агостинелли (Agostinelli C., Rend. Sem. mat. e fis. Milano, 1950, 21, 165), автор дает в векторном изложении вывод основных результатов классического мемуара Лагранжа «Essai sur le problème des trois corps» (Oeuvres, t. 6, p. 229). Г. К. Михайлов

9437. **Об авторстве первого учебника арифметики для народных училищ в России. Хачий О. Ф.** В сб.: Истор.-матем. исследования. Вып. 10. М., Гостехиздат, 1957, 617—638

Показывается, что первый учебник арифметики для народных училищ в России: Руководство к арифметике, ч. 1, СПБ, 1783, 102 стр.— является дословным переводом учебника арифметики для сербских народных училищ, изданного в Вене в 1777 г. на двух языках: церковнославянском и немецком.

Приводятся убедительные доводы в пользу того, что автором этого учебника был сербский учитель и деятель народного просвещения Стефан Вуяновский (1743—1829). Дается краткое описание указанного славяно-немецкого учебника арифметики, а также 10 репродукций соответствующих страниц русского и славяно-немецкого учебника. В. Ф. Рогаченко

9438. **Забытый намюрский математик Франсуа-Гильом Пуаньар. Фишфе** (Un mathematicien namurois méconnu François-Guillaume Poignard. Fichefet J.), Bull. Soc. roy. sci. Liège, 1957, 26, № 7-12, 396—405 (франц.)

Сведения о родословной и биографии Ф. Г. Пуаньара (1653—1714), автора книги о магических квадратах (Брюссель, 1704) и учебника арифметики (Брюссель, 1718). Первое сочинение, по отзыву автора статьи, содержит некоторые оригинальные элементы, второе же охарактеризовано как «хороший показатель застоя педагогики в начале XVIII в.». В. П. Зубов

9439. **Опыт Фуко с маятником в дифференциальной геометрии. Фрейденталь** (Foucaults Pendelversuch in der Differentialgeometrie. Freudenthal Hans), Math.-phys. Semesterber., 1957, 5, № 3-4, 230—238 (нем.)

Доклад, сделанный в 1951 г. перед нидерландскими студентами-естественниками в память о Фуко. После беглого исторического обзора основанных на законах механики возможных опытов, подтверждающих вращение Земли, автор дает перечисление и анализ опытов Фуко с маятником и связывает геометрическую сторону опыта с параллельным переносом Леви-Чивита вектора (роль которого играет осциллятор) по поверхности.

Далее, кривизна поверхности характеризуется известным образом через поворот вектора, обнесенного по бесконечно-малому замкнутому контуру. Формула проверяется для случая сферы. Рассматривается перенос вдоль контура геодезического треугольника, связь между площадью и суммой углов геодезического треугольника на сфере, на гиперболической плоскости. Б. Л. Лаптев

9440. **Гаусс и проблема пространства. Леви** (Gauß und das Raumproblem. Levi F. W.), Math.-phys. Semesterber., 1957, 5, № 3-4, 191—199 (нем.)

Доклад на торжественном заседании Берлинского математического общества в Свободном Берлинском университете 23 февраля 1955 г., посвященный столетию со дня смерти Гаусса.

Рассматривается как математическая, так и физическая постановка вопроса о пространстве. Освещается работа Гаусса над проблемой параллельности. Отмечается независимое от Гаусса открытие неевклидовой геометрии Бойаи и Лобачевского, причем автор неверно указывает дату публикации работы Лобачевского (1835 г. вместо 1829 г.).

Причину, заставившую Гаусса отказаться от публикации своих работ по неевклидовой геометрии, автор видит в исключительно напряженных исследованиях Гаусса во многих областях математики, астрономии, геодезии и физики, в том, что даже его исключительная работоспособность, позволяющая ему справляться в то же время со многими обязанностями, не была соизмерима его мощному гению, так что он не успевал развить все зарождающиеся у него идеи. Б. Л. Лаптев

9441. **Гаусс и проблема пространства. Леви** (Gauss und das Raumproblem. Levi F. W.), Sitzungsber. Berliner Math. Ges., 1954/1955—1955/1956, 24—29 (нем.)

См. реф. 9440.

9442. **Геометрия Лобачевского и ее значение. Хатипов А. Э.-А.**, Тр. Узбекского ун-та, 1956, № 65, 3—10

Доклад, прочитанный в Узбекском государственном университете на конференции, происходившей 24—26 февраля 1956 г. и посвященной 100-летию со дня смерти Лобачевского. Б. Л. Лаптев

9443. **Материализм Н. И. Лобачевского. Фрайман Х. П.**, Тр. Днепропетр. ин-та инж. ж.-д. трансп., 1957, вып. 1, 125—146.

Обрисованы материалистические философские позиции Лобачевского в теории познания, в учении о пространстве и времени, в вопросах обоснования геометрии. Автор касается кратко и общественных воззрений Лобачевского, а также связанной с ними его просветительной деятельности.

В работе используются лишь известные опубликованные материалы. При изложении взглядов Лобачевского автор не всегда подтверждает свою трактовку оригинальными текстами. Отсутствуют ссылки на работы ряда исследователей (А. П. Норден, Г. Ф. Рыб-

кин, Н. В. Марков, М. Б. Вильницкий и др.) по тому же вопросу.

Примечание референта. В одной из цитат сохранен без исправления искаженный переписчиком текст Лобачевского. В предложении «...все познания должны клониться к тому, чтобы немногие наблюдения, открыв нам свойства тел, служили для достаточного толкования всех прочих явлений...» автор вместо слов «немногие наблюдения» оставил нарушающую смысл неправильность «на (sic!) многие наблюдения». Б. Л. Лаптев

9444. **К столетию со дня рождения Фридриха Шура. Фладт** (Zum hundertsten Geburtstage von Friedrich Schur. Fladt K.), Math.-phys. Semesterber., 1957, 5, № 3-4, 182—185 (нем.)

Приведены важнейшие биографические даты Ф. Шура (1856—1932). Автор отмечает пять основных направлений исследований Шура по основаниям геометрии: введение аксиом движения вместо аксиом конгруэнтности, построение проективного пространства путем присоединения идеальных элементов, установление недоказуемости аксиомы параллельности, вытекающее из рассмотрения аксиом проективного пространства и аксиом движения, обоснование геометрии плоскости, опирающееся на отражение и, наконец, выявление роли аксиомы Архимеда в различных частях геометрии. Б. Л. Лаптев

9445. **Выдающийся математик и механик. Крамар Ф. Д., Молюков И. Д.**, Вестн. АН Каз ССР, 1958, № 3, 44—49 (рез. каз.)

Рассматривается вопрос о заслугах И. И. Сомова в разработке векторного исчисления и введении последнего в круг университетских предметов преподавания.

В работе «Об ускорениях различных порядков» (1865 г.) И. И. Сомов ввел векторное произведение в следующей форме: из двух векторов $\mathbf{a}\{x, y, z\}$, $\mathbf{b}\{p, q, r\}$ он составлял третий вектор $\mathbf{c}$ с компонентами $\begin{vmatrix} y & r \\ q & r \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} z & x \\ r & p \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} x & y \\ p & q \end{vmatrix}$ и указывал, что модуль вектора $\mathbf{c}$ численно равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ как на сторонах, а направлен он перпендикулярно к плоскости векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ так, что тройка векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ образует правую систему. В этой координатной форме И. И. Сомов находил и производную вектора $\mathbf{c}$.

Пользуясь векторным исчислением, И. И. Сомов в 1865 г. нашел выражение для дифференциального параметра первого рода

$$\Delta_1 F = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}$$

в общей системе координат (прямолинейных и криволинейных) и интерпретировал его впервые в математической литературе как вектор-градиент. Он разработал также метод получения выражения второго дифференциального параметра $\Delta_2 F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}$. Этот метод теперь используется почти во всех руководствах по теории поля, но без упоминания имени И. И. Сомова.

Изучая движение естественного трехгранника, И. И. Сомов вводил понятие вектора мгновенной угловой скорости в употребляемой в наше время форме $\boldsymbol{\omega} = \varkappa\mathbf{t} + k\mathbf{b}$, который до сих пор неправильно называют вектором Дарбу.

И. И. Сомов ввел в русскую науку такие новые идеи и методы, как ускорение высших порядков, векторы, эллиптические функции и криволинейные координаты. Книга И. И. Сомова «Рациональная механика», в которой было дано векторное изложение механики, в 1878 г. в немецком переводе была издана в Берлине. Р. А. Симонов

9446. **Александр Михайлович Ляпунов (К столетию со дня рождения). Григорьян А. Т.**, Тр. Ин-та истории естествозн. и техн. АН СССР, 1957, 19, 284—289

Краткий биографический очерк с указанием основных направлений научной деятельности А. М. Ляпунова. В заключение приведено сообщение о проведенном 6 июня 1957 г. торжественном заседании Отделений технических и физико-математических наук Академии наук СССР совместно с Московским университетом, посвященном памяти А. М. Ляпунова. Г. К. Михайлов

9447. **Павел Сергеевич Александров (К 60-летию со дня рождения и 40-летию научной деятельности). Понтрягин, Мищенко** (Pavel Sergheievici Aleksandrov (Cu prilejul împlinirii a 60 de ani de la naştere şi 40 de ani de activitate ştiinţifică). Pontreaghin L. S., Mişcenko E. F.), An. Rom.-Sov. Ser. mat.-fiz., 1957, 11, № 4 (рум.)

Перевод из «Успехов матем. наук» (РЖМат, 1957, 4533).

9448. **Николай Павлович Еругин (К пятидесятилетию со дня рождения). Басов В. П., Богданов Ю. С., Смирнов М. М.**, Успехи матем. наук, 1958, 13, № 2, 247—251

9449. **Григорий Михайлович Фихтенгольц (К семидесятилетию со дня рождения). Канторович Л. В., Натансон И. П.**, Вестн. Ленингр. ун-та, 1958, № 7, 5—13

9450. **Иосиф Захарович Штокало (К шестидесятилетию со дня рождения). Соколов Ю. Д., Погребысский И. Б.**, Укр. матем. ж., 1958, 10, № 1, 105—106

9451. **Пятидесятилетие А. К. Хумала** (A. Humal 50-aastane), ENSV Teaduste Akad. toimetised. Tehn. ja füüs.-matem. teaduste seer., Изв. АН ЭстССР. Сер. техн. и физ.-матем. н., 1958, 7, № 1, 75 (эст.), 76 (русск.)

9452. **Яков Исидорович Перельман. К 75-летию со дня рождения. Больсен Е. М.**, Матем. в школе, 1958, № 3, 73—76

9453. **60-летие академика Войтеха Ярника. Коржинек, Вычихло** (Akademik Vojtěch Jarník šedesátníkem. Kořínek Vladimír, Vyčichlo František), Pokroky mat., fys. a astron., 1958, 3, № 1, 1—8 (чешск.)

9454. **Шестидесятилетие академика Войтеха Ярника.** (Professor Vojtěch Jarník. Fellow of the Czechoslovak Academy of Sciences, celebrates his sixtieth birthday), Чехосл. матем. ж., 1958, 8, № 1, 155—161 (русск., англ.)

9455. **Юбилей профессора Теодора Ангелуцэ. Гермănеску** (Jubileul profesorului Theodor Angheluţă. Ghermănescu M.), Gaz. mat. şi fiz., 1957, A9, № 6, 322—325 (рум.)

Сообщение о чествовании 18 мая 1957 г. профессора Клужского университета Т. Ангелуцэ в связи с его 75-летием. Упоминаются следующие работы: 1. Труды по аппроксимации функций действительного переменного взвешенными средними суммами их рядов Фурье. 2. Представление полиномов степени $< n$ как непрерывных решений функционального уравнения

$$\lim_{h\to 0} \frac{\Delta^n f(x)}{h^n} = 0.$$

3. Решение задачи Лалеску (T. Lalescu) из теории интегральных уравнений; представление разрешающего ядра, если ядро интегрального уравнения есть сумма любых двух ядер, соответствующие разрешаю-

щие ядра которых известны. 4. Общий метод оценки модулей корней алгебраического уравнения.
К. С. Сцилард

9456. **Мария Йозефа Де-Шварц. Калиго** (Maria Josepha De Schwarz. Caligo Domenico), Boll. Unione mat. ital., 1957, 12, № 4, 732-734 (итал.)
Очерк деятельности члена Итальянского института прикладной математики Де-Шварц (1909—1957), урожденной польки. Область научных интересов: дифференциальные уравнения (обыкновенные и в частных производных) и вариационное исчисление. И. Я. Депман

9457. **Рольф Харальд Гран Ульссон. Сельберг** (Rolf Harald Gran Olsson. Selberg Arne, Kgl. norske vid. selskabs forhandl., 1957, 30, № 11, 71—79 (норв.)
Очерк деятельности профессора норвежской высшей технической школы Ульссона (1903—1957) со списком (около 125 названий) его работ по дифференциальным уравнениям, теории упругости и гидродинамике. Большинство работ на немецком языке. И. Я. Депман

9458. **К 60-летию профессора Альвина Вальтера. Коллац** (Professor Dr. Alwin Walther zum 60. Geburtstag. Gollatz L.), MTW-Mitt., 1958, 5, № 3, 137—139 (нем.)

9459. **Проф. Вацлаву Плескоту 50 лет. Шмагел** (Prof. dr Václav Pleskot se dožívá 50 let. Smahel Josef), Aplikace mat., 1958, 3, № 1, 79—80 (чешск.)

9460. **50-летие доцента д-ра Антонина Свободы. Марек** (Padesát let doc. dr. Antonína Svobody. Marek Jindřich M.), Aplikace mat., 1958, 3, № 1, 80 (чешск.)

9461. **Александр Николаевич Барсуков (Некролог).** Матем. в школе, 1958, № 3, 69—70
21 апреля 1958 г. скончался в Москве ответственный редактор журнала «Математика в школе» А. Н. Барсуков (родился в 1891 г.), известный своими трудами в области математического просвещения.

9462. **Некролог профессора Франтишека Вычихло.** (Profesor dr František Vyčichlo zemřel), Aplikace mat., 1958, 2, № 3, 156 (чешск.)

9463. **Исторические сведения по основным разделам втузовского курса математики. Турчанинова З. И.,** Тр. дальневост. политехн. ин-та, 1957, 47, № 2, 1—19
Собрание статей случайного характера, содержащих отдельные факты и фамилии без пояснений и не всегда в логической связи. Встречаются и прямые ошибки.
И. Н. Веселовский

9464 К. **Очерки по новой истории венгерской математики. Сенаши** (Vázlatok a magyar matematika ujkori történétéből. Szénássy Barna. Budapest, Tankönyvkiadó, 1953, 68 l., ill., 4.50 Ft.) (венг.)

9465 К. **Йозеф Пецваль (1807—1891). Жизнь и деятельность. Румановский** (Jozef Petzval. Zivot a dielo. Rumanovský Ivan. Martin, Osveta, 1957, 61 s., il., 4.65 Kčs.), Bibliogr. katal. ČSR. Slov. knihy, 1957, 8, № 6, 184 (словацк.)

ПРЕПОДАВАНИЕ МАТЕМАТИКИ

9466. **Вариация — прием открытия в геометрии. Хейнке** (Variation — a process of discovery in geometry. Heinke Clarence H.), Math. Teacher, 1957, 50, № 2, 146—154 (англ.)
Под термином «утверждение» понимается некоторая группа слов и других символов, выражающая нечто, что может оказаться верным или неверным. Основными элементами геометрического утверждения являются: условие (включая и фигуру) и заключение. Вариацией геометрического утверждения, истинность которого может доказываться или приниматься, называется прием изменения условия, или заключения, или того и другого одновременно, с целью получения нового условия, или нового заключения, или того и другого, приводящих к новому утверждению. Последнее подтверждается или опровергается дедукцией. В некоторых случаях оно может быть принято как новое предположение.
Указываются три основные категории вариаций. К первой категории относятся те виды вариаций, в которых сперва изменяются условия — путем их уменьшения, дополнения или замены, а затем находятся заключения, которые могут быть выведены из новых условий. В вариациях второй категории сперва изменяется заключение, а затем находятся необходимые изменения в условии. В вариациях третьей категории условие и заключение изменяются согласованно и одновременно в соответствии с намеченным планом. Эта категория включает принципы двойственности или обратимости и построение обратных и противоположных утверждений.
Различные виды вариаций, приводящих к получению новых утверждений, иллюстрируются примерами, взятыми из евклидовой планиметрии. Указывается, что применение метода вариации весьма полезно в преподавании и изучении геометрии. Преподаватель может использовать его как эффективный прием развития темы. С другой стороны, этот метод дает возможность учащемуся самостоятельно получать ряд новых геометрических предложений. В. Ф. Рогаченко

9467. **Зависимость обобщения отношений от процесса анализа. Матюшкин А. М.,** Докл. Акад. пед. наук РСФСР, 1957, № 4, 81—84
Позиционные системы счисления рассматриваются как экспериментальный материал для решения психологической проблемы зависимости обобщения отношений от процесса анализа при овладении человеком новой системой знаний.
Примечания референта: 1) Автор не должен был исключать из рассмотрения двоичную систему счисления. 2) Для получения более обоснованных выводов следовало использовать опыт работы школ. 3) В статье допущена усложненность ряда формулировок.
П. Я. Дорф

9468. **Преподавание конкретной математики. Тьюки** (The teaching of concrete mathematics. Tukey John W.), Amer. Math. Monthly, 1958, 65, № 1, 1—9 (англ.)
Автор добивается максимальной конкретизации математических вычислений в школе и включения элементов вычислительной математики в другие специальные дисциплины. Эта идея иллюстрируется примерами. Высказывается желательность в большей мере пользоваться таблицами и необходимость составления многих специальных таблиц функций.
И. Я. Депман

9469. **О подготовке кадров механизированного учета. Миньковский Е. М.** В сб.: Механиз. учета и вычисл. работ. М. — Л., Машгиз, 1958, 203—206
Приводятся данные о выпуске с 1946 по 1955 г. специалистов в области механизированного учета. В плане подготовки организаторов МСБ из 860 час. по учебному плану 650 отводится на дисциплины, связанные с механизацией учета. В плане подготовки организаторов МСС соответственно из 1550 час.— 1270.
Указаны недостатки в подготовке кадров: недостаточное количество производственных баз, мало практических занятий и др. Даны некоторые практические предложения.
Л. Е. Майстров

9470. **Обучение математике в Германии после 1945 г. Клейн** (Nauczanie matematyki w Niemczech po roku 1945. Klein Helmut), Matematyka, 1957, 10, № 4, 10—18 (польск.)

Автор, доцент Берлинского университета им. Гумбольдта, отмечает, что после 1945 г. развитие школьного дела в Западной Германии и в ГДР осуществлялось в различных направлениях. Дается краткая характеристика состояния в Западной Германии школьного дела вообще и, более подробно,— обучения математике в общеобразовательных школах.

В. Ф. Рогаченко

9471. **Обучение математике в Германии после 1945 г. II—III. Клейн** (Nauczanie matematyki w Niemczech po roku 1945. II—III. Klein Helmut), Matematyka, 1957, **10**, № 5, 33—45 (польск.)

Продолжение статьи (реф. 9470), в которой рассматривается развитие школьного дела в ГДР в послевоенные годы и характеризуется по объему и содержанию состояние математического обучения в общеобразовательных школах. В. Ф. Рогаченко

9472. **Математика в подготовке учителей. Дрегер** (Mathematik im Lehrerstudium. Draeger Max), Wiss. Z. Pädagog. Hochschule Potsdam. Math.-naturwiss. Reihe, 1955—1956, **2**, № 2, 155—157 (нем.)

Обсуждаются вопросы улучшения качества подготовки преподавателей математики через систему педагогических институтов ГДР. Подвергаются критике «Принципы учебных планов для усовершенствования учителей высшей и средней ступени в университетах», выработанные Государственным секретариатом по делам высшей школы и Министерством народного образования 3 апреля 1956 г. По мнению автора, немалое место в новых учебных программах должно быть отведено классической математике, истории математики, специальной методике преподавания, опирающейся на диалектический метод, а также психологии и педагогике. Автор указывает на неразработанность многих вопросов, касающихся специфики обучения учителей.

И. Ф. Шелихова

9473. **По страницам журнала «Газета математикэ ши физикэ». Столяр А. А.**, Матем. в школе, 1958, № 2, 77—80

Обзор статей из румынского журнала «Gaz. mat. şi fiz.», №№ 1—7, сер. А, за 1957 г. А. Н. Гливич

9474. **Проблемы математического исследования. Шварц** (Problemas de la investigación matemática. Schwartz Laurence), Ingenieria y arquit., 1957, **12**, № 134, 15—20 (исп.)

Исходя из условий академической жизни в Колумбии, автор пропагандирует необходимость сочетаний в вузах преподавания с научным исследованием. Он рекомендует: создание специальных математических кафедр (departamentos), так как иногда математику преподают инженеры; организацию общеколумбийских математических конференций продолжительностью в 4—5 недель, вследствие отсутствия прочных связей между различными университетами страны; образование Центрального института научных исследований и подготовки ученых, независимого от отдельных университетов. И. Н. Веселовский

9475. **Математика в Южной Австралии. Вуд** (Mathematies in South Australia. Wood Allen), Math. Teacher, 1958, **51**, № 1, 18—22 (англ.)

Описание системы математического образования в Южной Австралии. Арифметика изучается в начальной школе. С целью облегчения ее изучения сделаны некоторые сокращения программы. Например, то, что несколько лет тому назад изучалось в IV классе, теперь изучается в V или даже в VI классе. Содержание курса арифметики, изучаемого в школах Южной Австралии, стало теперь примерно тем же, что и в США.

В средней школе математика занимает около четверти всего учебного плана. До X класса изучается арифметика алгебра и геометрия; в X классе вводится тригонометрия. В X классе по геометрии учащиеся заканчивают изучение измерения поверхности и объема призмы, цилиндра, шара, пирамиды и конуса, по арифметике — сложные пропорции и сложные проценты; вычисление прибыли и убытка, применение логарифмов к вычислениям. В курсе алгебры X класса они занимаются вычерчиванием графиков линейной и квадратичной функций, решением линейных и квадратных уравнений, дается понятие о максимуме и минимуме функции.

Учащиеся, которые готовятся для поступления в университет, проходят выпускной класс, в котором математика занимает третью часть всего учебного плана. Курс математики этого класса включает в себя показатели степени, логарифмы, максимум и минимум функций, более трудные измерения, применение логарифмов к вычислению сложных процентов и ежегодной ренты; прогрессии, неравенства, подобие фигур, элементы аналитической геометрии и тригонометрию. С такой подготовкой по математике выпускник средней школы может быть принят на нематематический факультет университета. Но если он хочет поступить на математический факультет, то должен выдержать экзамен, требующий знания дополнительного материала по математике. Эти знания дает так называемый заключительный класс, в котором учащиеся изучают дифференциальное исчисление, интегрирование функций, теорию вероятности. Изучение пространственной геометрии практически исключено из южно-австралийской средней школы. Те учащиеся средней школы, которые не хотят изучать полный курс математики, проходят особый курс, называемый арифметикой. Он включает обычный курс арифметики с прибавлением специального материала, нужного для коммерческих расчетов, элементы алгебры и геометрии. В средних технических училищах курс математики меньше по объему, чем в средней школе, но его изучают все учащиеся полностью в обязательном порядке. Е. В. Вандышева

9476. **Преподаватель математики в колледже. Лафрамбойс** (The college mathematics teacher. Laframboise Marc A.), School Sci. and Math., 1958, 58, № 2, 108—110 (англ.)

Колледжи в США представляют учебные заведения вроде наших техникумов повышенного типа и учительских институтов. По плану автора преподаватель математики в них должен иметь степень магистра, для получения которой после университетского курса надо пройти 4 семестра дополнительных занятий, включающих курсы теории функций действительного и комплексного переменного, современную алгебру, общую топологию, теорию интегрирования и вариационное исчисление. Кроме того, в каждом семестре студент должен выбрать два факультативных курса, среди них по крайней мере два геометрических и два по прикладной математике (проективная геометрия, тензорный анализ, уравнения математической физики, механика, теория вероятности со статистикой, математическая теория электричества и др.). И. Я. Депман

9477. **Преподаватели естественно-научных дисциплин оценивают друг друга. Остлунд** (Science teachers evaluate science teachers. Ostlund Leonard A.), School Sci. and Math., 1958, 58, № 2, 125—131 (англ.)

Отчет о методике и результатах статистической обработки конфиденциального опроса слушателей (числом 50) одногодичного Института усовершенствования учителей математики и точных наук в средней школе. Институт организован при университете штата Оклахома на средства специального национального фонда; аналогичные институты создаются в ряде других университетов США.

Каждому из опрошенных предлагалось дать свою

оценку эффективности читаемых в институте дисциплин. Оценки производились по процентной шкале (самая низкая оценка 0, самая высокая — 100) и отражали суждения слушателя как относительно образовательного и дидактического значения для него каждой дисциплины, так и относительно качества ее преподавания.

Выведены следующие средние этих оценок: курсы современной химии (читалось два курса) — 40 и 66; дифференциальное и интегральное исчисление для учителей-естественников — 89; современная математика — 72; основания физики (два курса) — 86 и 88; современная техника — 48; педагогический семинар — 79; принципы биологии — 77.

Автор рекомендует практиковать такого рода опросы и в средней школе для получения надежной информации, характеризующей отношение учащихся к преподаваемым им предметам. Ю. М. Гайдук

9478. **Развитие у наших будущих ученых и математиков качеств, обеспечивающих успех. Нортон** (Developing success qualities in our future scientists and mathematicians. Norton Monte S.), School. Sci. and Math., 1957, 57, № 8, 629—635 (англ.)

Автор дает советы, касающиеся развития в учениках чувства дисциплинированности, целенаправленности, склонности к экспериментированию, общительности, логической последовательности, творческого отношения к делу, умению выражать свои мысли, терпеливости, скромности и сообразительности.

В. П. Зубов

9479. **Преподавание математики в Королевской военной академии. Влардингеи** (Het wiskundeonderwijs aan de Koninklijke Militaire Academie. Vlaardingen M. van), Euclides (Nederl.), 1958, 33, № 7, 195—204 (гол.)

9480. **Об осуществлении дидактических принципов в преподавании математики. Ирошников Н. П.**, Матем. в школе, 1958, № 3, 23—35

9481. **Вклад математики в осуществление политехнического обучения. Мурариу** (Contribuţia matematicii la realizarea învăţămîntului politehnic. Murariu Petre), Rev. ped., 1958, 7, № 1, 16—29 (рум.)

9482. **О методических ошибках, допускаемых начинающими учителями. Карнацевич Л. С.**, Матем. в школе, 1958, № 3, 42—50

9483. **Методика изучения показательной функции в средней школе. Вандышева Е. В.**, Уч. зап. Муромск. пед. ин-та, 1957, вып. 2, 74—83

9484. **Развитие понятия степени в курсе алгебры средней школы. Осипова М. И.**, Уч. зап. Муромск. пед. ин-та, 1957, вып. 2, 84—115

9485. **Преподавание пропорциональности. Чер** (Az arányosság tanítása. Cser Andor), Mat. tanítása, 1958, № 1, 5—9 (венг.)

9486. **Задачи и вопросы** (Problems and questions), Math. Mag., 1958, 31, № 3, 163—178 (англ.)

В этом разделе журнала помещены присланные читателями задачи самого различного содержания и их решения. Особо выделены задачи, требующие повышенной сообразительности и применения специальных приемов.

9487 К. **Сборник задач по высшей математике. Т. 2. Гюнтер, Кузьмин** (Aufgabensammlung zur höheren Mathematik. Bd. 2. Günter N. M., Kusmin R. O. Übers. aus dem Russ. Berlin, VEB Dtsch. Verl. Wiss., 1957, VI, 289 S., ill.) (нем.)

В том 2 (том 1 см. РЖМат, 1958, 34 К) включены следующие отделы: Дифференциальные уравнения в частных производных; Ряды; Приближенные вычисления, Функции комплексной переменной; Уравнения математической функции, Вариационное исчисление, Теория вероятностей. Перевод выполнен несколькими авторами (A. Beck, W. Dege, M. Heidler, H. Morgenroth, S. Polze, K. Rieck, R. Schubert, H. Schulze, A. Weigert). М. К. Керимов

9488 К. **Курс высшей математики. Якоб** (Curs de matematici superioare. Iacob Caius. Bucureşti, Ed. tehn., 1957, 988 p., il., 46 lei), Bibliogr. RPR, 1957, 6, № 22, 811 (рум.)

9489 К. **Физика и математика. Т. 2. Хьюз, Сандерс, Хоровиц** (Physics and matematics. Vol. 2. Eds Hughes D. J., Sanders J. E., Horowitz J. (Progress Nucl. Energy Ser. I). London—New York—Paris—Los Angeles, Pergamon Press, 1958, vii, 375 pp., ill., 90 sh.) (англ.)

9490 К. **Введение в высшую математику. 2-е изд. Рыхновский** (Úvod do vyšší matematiky. 2. zcela přeprac. vyd. Rychnovsky Richard. Praha, SPN, 1955, 274 s., il., 19,60 Kčs) (чешск.)

Учебное пособие, изданное Высшим сельскохозяйственным учебным заведением в Праге. Предназначено для студентов 1-го курса высших сельскохозяйственных школ. K. Rektorys

Ср. также. 9501, 9680, 9769 К, 9770 К, 9950 К — 9955 К, 10025, 10026, 10070, 10071 К, 10121, 10192, 10196, 10199, 10202 К, 10308, 10321, 10328 К

ОСНОВАНИЯ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

Редакторы *П. С. Новиков, А. С. Есенин-Вольпин*

9491. **Несколько замечаний о перечислимых множествах. Успенский В. А.**, Z. math. Logik und Grundl. Math., 1957, 3, № 2, 157—170 (русск.; рез. англ.)

Приводятся некоторые теоремы, связанные главным образом с понятием рекурсивно-перечислимого множества и дополняющие полученные в этой области результаты. Затрагиваются следующие вопросы: 1) нумерации систем функций и множеств; 2) униформизация множеств; 3) дихотомическая классификация множеств; 4) свойства гиперпростых множеств. При рассмотрении первых двух вопросов автор пользуется аналогией с дескриптивной теорией множеств. Все доказательства даны подробно. Ю. Т. Медведев

9492. **Независимые схемы аксиом для S5. Андерсон** (Idependent axiom schemata for S5. Anderson A. R.), J. Symbolic Logic, 1956, 21, № 3, 255—256 (англ.)

Автор указывает, что в статье Саймонса (РЖМат, 1954, 4324) строятся системы независимых схем аксиом для систем строгой импликации S3 и S4 (Lewis C. I., Langford C. H., J. Symbolic Logic, 1932, № 4). В реферируемой статье приводится множество независимых схем аксиом для системы S5 (J. Symbolic Logic, 1932, 500—501). О. Б. Лупанов

9493. **Единственная аксиома для одной подсистемы исчисления высказываний. Роз** (A single axiom for a partial system of the propositional calculus. Rose Alan), Z. math. Logik und Grundl. Math., 1955, 1, № 3, 196—197 (англ.)

Автор указывает, что в работе Расёвой (Rasiowa H., Comptes Rendus (Warsaw), Cl. III, 1947, 40, 22—37)

найдена аксиоматизация для подсистемы двузначного исчисления высказываний, имеющей в качестве основных функций эквивалентность (E_{pq}) и отрицание эквивалентности (E'_{pq}), содержащая две (независимые) аксиомы

$$\text{(а)}\ EE_{pq}EE_{rq}E_{pr},$$

$$\text{(б)}\ EE_{pq}EE'_{rq}E'_{pr}$$

и два правила вывода — правило подстановки и $\frac{P,EPQ}{Q}$.

В реферируемой статье показывается, что вместо E и E' могут быть взяты E и константа 0 (означающая ложное высказывание), с единственной аксиомой (а) и перечисленными выше правилами вывода.

О. Б. Лупанов

9494. **Рекурсивно-измеримые множества и множества рекурсивно-открытые или рекурсивно-замкнутые. Крейсел, Лакомб** (Ensembles récursivement mesurables et ensembles récursivement ouverts ou fermés. Kreisel Georg, Lacombe Daniel), C. r. Acad. sci., 1957, 245, № 14, 1106—1109 (франц.)

Авторы устанавливают некоторые первоначальные результаты на основе следующих введенных ими определений.

1. Измеримое в смысле Лебега множество $E \subset [0,1]$ называется рекурсивно-измеримым, если функция $m_E(x) = \text{mes}\,(E \cap [0, x])$ рекурсивна.

2. Множество $E \subset [0,1]$ называется рекурсивно-открытым, если оно может быть представлено как объединение некоторой рекурсивно-перечислимой системы интервалов с рациональными концами. Множество, дополнение которого (на $[0,1]$) рекурсивно-открыто, называется рекурсивно-замкнутым.

Определение рекурсивной функции действительного переменного (необходимое для понимания точного смысла первого из приведенных определений) дано ранее в работах Лакомба (РЖМат, 1956, 4281). Эти работы не указаны в списке литературы, приводимом авторами реферируемой работы.

Ю. Т. Медведев

9495. **К теореме Сколема. Такэути** (On Skolem's theorem. Takeuti Gaisi), J. Math. Soc. Japan, 1957, 9, № 11, 71—76 (англ.)

Доказывается, что если гёделевская система аксиом Σ с присоединенной к ней аксиомой выбора E непротиворечива, то непротиворечиво расширение этой системы, получаемое присоединением некоторой функции, не содержащейся в системе $\Sigma + \{E\}$ и отображающей натуральный ряд ω, на универсальный класс V.

Точная формулировка утверждения автора очень длинна и использует понятия, введенные в предыдущих работах автора (РЖМат, 1957, 7587, 7588, 7590). По существу здесь излагается известный результат. Значение работы автора состоит в том, что формулировки и доказательства, по-видимому, являются финитными.

А. С. Есенин-Вольпин

9496. **Замечание к моей статье «К теореме Сколема». Такэути** (Remark on my paper: On Skolem's theorem. Takeuti Gaisi), J. Math. Soc. Japan, 1957, 9, № 2, 192—194 (англ.)

Результат статьи автора (реф. 9495) обобщается на произвольные классические системы, описывающие некоторую область D. В том же духе, что и в предыдущей статье, доказывается, что из непротиворечивости всякой такой системы следует непротиворечивость ее расширения, получающегося путем присоединения аксиом арифметики натуральных чисел (включая схему индукции) и аксиомы о том, что каждый элемент области D является однозначным образом некоторого натурального числа при некотором отображении f_0, не содержащемся в данной системе. А. С. Есенин-Вольпин

9497. **«Тождественные суждения» силлогистики. Хертиг** (Die «identischen Urteile» der Syllogistik. Härtig Klaus), Actes XI Congr. Internat. philos., Bruxelles, 1953, 5. Amsterdam-Louvain, 1953, 28—34 (нем.)

Рассматривается содержание тождественных суждений вида $X\alpha X$, где $\alpha = a, e, i, 0$ (SaP сокращенно обозначает: все S суть P и т. п.). Рассматриваются различные применения тождественных суждений. В частности, непосредственные умозаключения получаются из некоторого модуса и тождественного суждения. Например, заменяя в модусе Darapti $\frac{\substack{MaP \\ MaS}}{SiP}$ M через S, получаем $\frac{\substack{SaP \\ SaS}}{SiP}$, т. е. $SaP \to SiP$.

Можно доказать, что из истинности XaX и XiX следует неправильность любого модуса с положительными посылками и отрицательным выводом. Доказывается, что из непосредственных умозаключений и модусов XaX и XiX не выводятся. Полностью отвергается мнение о пустом содержании тождественных суждений. Указывается, что вопрос о тождественных суждениях рассматривали Лейбниц и в наше время Лукасевич. См. также РЖМат, 1956, 5044. Л. Е. Майстров

9498. **О конструктивном математическом анализе. Шанин Н. А.,** Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 2. М., АН СССР, 1956, 69—71

9499. **О некоторых обобщениях понятия нормального алгоритма. Нагорный Н. М.,** Тр. 3-го Всес. съезда, 2. М., АН СССР, 1956, 147

9500. **Об эквивалентности двух определений полноты системы аксиом. Рожанская Ю. А.,** Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 2, М., АН СССР, 1956, 147

9501. **Умственная деятельность в отношении к логическим и математическим символическим выражениям. Пьяже** (Les activités mentales en rapport avec les expressions symboliques logiques et mathématiques. Piaget Jean), Synthèse, s. a., 10, 127—145 (франц.)

См. также: 9494, 9532, 9637, 9638, 9702, 9704, 10025, 10089 К

ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

Редактор *Ю. В. Линник*

9502. **Порядок роста ζ-функции Римана вблизи прямой σ=1. Шёнфелд** (The order of the zeta function near the line σ=1. Schoenfeld Lowell), Duke Math. J., 1957, 24, № 4, 601—609 (англ.)

Пусть $\mu(\sigma, \omega) = \inf \mu$, где $\zeta(s, \omega) = O(t^{\mu_1})$ для $t \geqslant 1$, $\zeta(s, \omega) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+\omega)^{-s}$, $0 < \omega < 1$, $\text{Re}\,(s) = \sigma$. Тогда для каждого $\omega > \log 120\sqrt{2}$ существует число $C(\omega) < 1$, такое, что в интервале $C(\omega) < \sigma < 1$ имеет место оценка:

$$\mu(\sigma,\omega) < \frac{\sqrt{2}}{3}\,\Delta^{-\frac{3}{2}}\lg^{\frac{1}{2}}\Delta\left\{1 - \frac{1}{2}\frac{\lg\lg\Delta}{\lg\Delta} + \frac{\omega}{\lg\Delta}\right\}, \quad (1)$$

где $\Delta = (1-\sigma)^{-1}$. В частности для $\omega = 6$ имеем

$$\mu(\sigma, \omega) < \frac{1}{3}\sqrt{2}\,\Delta^{-\frac{3}{2}}\,\lg^{\frac{1}{2}}\Delta.$$

Доказательство (1) использует оценки И. М. Виноградова тригонометрических сумм. Н. Г. Чудаков

9503. Приближенное функциональное уравнение для рядов Дирихле типа Гекке. Апостол, Склар (The approximate functional equation of Hecke's Dirichlet series. Apostol T. M., Sklar Abe), Trans. Amer. Math. Soc., 1957, 86, № 2, 446—462 (англ.)

Обобщается приближенное функциональное уравнение для $\zeta(s)$ Римана на случай рядов Дирихле типа Гекке (Hecke E.), Dirichlet Series, Planographed lectures, Princeton, 1938). В доказательстве использованы оценки Харди и Литлвуда интегралов, содержащих функции Бесселя. В. М. Архангельская

9504. Сингулярный ряд для единственного квадрата. Карлиц (The singular series for a single square. Carlitz L.), Portug. math., 1957, 16, № 1—2, 7—10 (англ.)

Пусть $r_s(n)$ обозначает число представлений натурального числа n суммою s квадратов целых чисел. Далее, пусть

$$\mathfrak{S}_s(n) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k(n),$$

где

$$A_k(n) = \frac{1}{k^s} \sum_{1 \leqslant h \leqslant k,\ (h,k)=1} \exp(-2\pi i h n / k) \times$$

$$\times \Big(\sum \exp 2\pi i u^2 h / k\Big)^s. \qquad (1)$$

Как хорошо известно, Харди доказал, что при $5 \leqslant s \leqslant 8$

$$\frac{\pi^{\frac{s}{2}} n^{\frac{s}{2}-1}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \mathfrak{S}_s(n) = r_s(n).$$

Недавно Бателан, модифицируя ряд $\mathfrak{S}_s(n)$, доказал, что (1) имеет место также и при $s = 3$ и 4.

В случае $s = 2$ Рамануджан доказал, что $\pi\mathfrak{S}_2(n) = 2r_2(n)$.

В настоящей статье исследуется случай $s = 1$. Для этого рассматривается модифицированный ряд $\mathfrak{S}(n, N) = \sum_{k|N} A_k(n)$, где N — произвольное натуральное число.

Положим $N = \prod_{p|N} p^f$, $N' = \prod_{p/N} p^{[f/2]}$.

Далее, если N делится на λ различных простых чисел, то положим

$$\theta(N) = \begin{cases} 2^{\lambda} & \text{при нечетном } m, \\ 2^{\lambda+1} & \text{при четном } m. \end{cases}$$

Доказывается теорема: Пусть N пробегает последовательность целых чисел $\{N_i\}$ такую, что N_i / N_{i+1} и обладающую свойством, что для наперед заданного M существует такое j, что M / N_j. Тогда сингулярный ряд $\mathfrak{S}(n, N)$ удовлетворяет соотношениям

$$\lim_{i\to\infty} \frac{2}{n^{1/2}} \frac{\mathfrak{S}(n, N)}{\theta(N_i)} = r_1(n) \quad (n \neq 0)$$

и

$$\lim_{i\to\infty} \frac{\mathfrak{S}(0, N)}{N'} = r_1(0).$$

Г. А. Ломадзе

9505. О некоторых арифметических функциях. Деланж (Sur certaines fonctions arithmétiques. Delange Hubert), C. r. Acad. sci., 1957, 245, № 15, 1197—1200 (франц.)

Продолжение статьи (РЖМат, 1958, 2697).

Пусть два непересекающихся множества простых чисел E, E' определены так же, как и множество E в первой части работы (автор замечает, что определение множества E должно быть исправлено: E_1 должно быть бесконечным). Точно так же определяются функции ω и Ω. Пусть A — множество всех натуральных чисел или же множество всех натуральных бесквадратных чисел; $f(n)$ — одна из функций $\omega_E(n)$, $\Omega_E(n)$, $g(n)$ — одна из функций $\omega_{E'}(n)$, $\Omega_{E'}(n)$. Доказываются асимптотические формулы при $x \to \infty$, аналогичные полученным в первой части работы, для сумм

$$\sum u^{f(n)} v^{g(n)}, \qquad \sum u^{\omega_E(n)} v^{\Omega_E(n)-\omega_E(n)},$$

где u, v — комплексные переменные; первая сумма берется по всем $n \leqslant x$, $n \in A$, вторая — по всем натуральным $n \leqslant x$. Отсюда выводятся асимптотические формулы для числа натуральных чисел $n \leqslant x$, удовлетворяющих одному из следующих условий:

1) $n \in A$, $f(n) = m$, $g(n) = m'$;
2) $n \in A$, $f(n) \equiv r \pmod q$, $g(n) \equiv r' \pmod{q'}$;
3) $n \in A$, $f(n) = m$, $q(n) \equiv r \pmod q$;
4) $\omega_E(n) = m$, $\Omega_E(n) = m + q$;
5) $\omega_E(n) \equiv r \pmod q$ $\Omega_E(n) \equiv r' \pmod{q'}$.

Доказательства отсутствуют. И. П. Кубилюс

9506. Обобщение вполне мультипликативных арифметических функций. Суччи (Una generalizzazione delle funzioni aritmetiche completamente moltiplicative. Succi Francesco), Rend. mat. e applic., 1957, 16, № 1—2, 255—280 (итал.)

Интегральным произведением двух арифметических функций $f(n)$ и $g(n)$ называется третья арифметическая функция $(f \times g)(n) = \sum_{d|n} f(d)\, g(n/d)$. Роль единицы относительно этой операции играет функция $\alpha(n)$, равная 1 при $n = 1$ и 0 при $n > 1$. Обратная функция $f^{x^{-1}}$ к функции f определяется соотношением $f \times f^{x^{-1}} = \alpha$ и существует тогда и только тогда, когда $f(1) \neq 0$, причем $f^{x^{-1}} = \mu f$, если f — вполне мультипликативная функция; $\mu(n)$ — функция Мёбиуса. Изучается класс C комплексных арифметических функций, обобщающий класс вполне мультипликативных функций и состоящий из всех функций f, для которых обратная функция существует и равна μf. Отметим некоторые из результатов.

Каждая функция f из C определяется полностью значениями, которые она принимает для всех бесквадратных чисел, имеющих нечетное число простых делителей, и значением $f(1)$, причем $f(1) = \pm 1$. Функция $f(1) f(n)$ обладает свойством полной мультипликатности для всех n, имеющих не более двух различных простых делителей. В C нет функций, которые были бы мультипликативными, но не вполне мультипликативными.

Интегральное произведение $f \times g$ двух функций из класса C принадлежит к C тогда и только тогда, когда обратная функция к $f \times g$ равна 0 для всех n, делящихся на квадрат, но не на куб натурального числа, отличного от 1.

Если f и $f^{x^{-1}}$ одновременно принадлежат к C, то $f = \pm\alpha$. И. П. Кубилюс

9507. Об арифметических процессах суммирования. Винтнер (On arithmetical summation processes. Wintner Aurel), Amer. J. Math., 1957, 79, № 3, 559—574 (англ.)

Ряд Σa_n называется E-суммируемым, если существует $\lim_{n\to\infty} E_n$, где

$$E_n = \sum_{k=1}^{n} a_k [n/k] k/n.$$

Этот процесс суммирования был введен автором в 1943 г. (Erathostenian averages, Baltimore, 1943) и назван эратосфеновым. Автор возражает против его названия процессом Ингама (Харди Г., Расходящиеся ряды, Изд-во ин. лит., 1952, 463), который рассмотрел процесс впервые в 1945 г.

Дается новое доказательство теоремы Ингама, что E-суммируемость ряда влечет за собой $(C, 1)$-суммируемость к той же сумме, и ее обобщение: если S_n — средние арифметические Чезаро и $\limsup E_n < \infty$, то $\operatorname{osc} S_n \leqslant \alpha \cdot \operatorname{osc} E_n$, где $\operatorname{osc} S_n = \limsup |S_n - S_m|$ при $n > m \to \infty$, α — абсолютная константа. Аналогично обобщается связь между процессами суммирования Абеля и Ламберта.

Доказываются теоремы тауберова типа об E-суммируемости ряда, когда он суммируется по Ламберту, а также о суммируемости по Ламберту, когда ряд суммируется по Абелю.

Имеет место следующая теорема типа Аксера: Пусть последовательность чисел $s_n (n = 1, 2, \ldots)$, где $\sum_{n\leqslant x} s_n = o(x)$ и функция $f(x)$, $1 < x < \infty$, удовлетворяют одному из условий: либо 1) $s_n = O(1)$, $f(x)$ имеет ограниченную вариацию в каждом конечном интервале, $f(x) = O(\Phi(x))$, где $\Phi(x)$ — неотрицательная монотонная функция, причем $\int_1^\infty x^2 \Phi(x)\, dx < \infty$, либо 2) $\sum_{n\leqslant x} |s_n| = o(x)$, $f(1/x)$, $0 < x \leqslant 1$, интегрируема по Риману, то

$$\sum_{n\leqslant x} f(x/n) s_n = o(x).$$

Указывается связь теории простых чисел с соотношениями между методами суммирования. И. П. Кубилюс

9508. Об одном типе лакунарности. Хартман (Sur un type de lacunarité. Hartman S.), Matematiche, Catania, 1955, 10, 57—61 (франц.)

Говорят, что бесконечно возрастающая последовательность натуральных чисел удовлетворяет условию (P), если существует натуральное число k такое, что для каждого положительного целого l могут быть найдены l последовательных членов последовательности, например $n_{k+1}, n_{k+2}, \ldots, n_{k+l}$, удовлетворяющих условию $n_{k+i+1} - n_{k+i} < k$ $(i = 1, 2, \ldots, l-1)$. Автор замечает, что такие бесконечно возрастающие последовательности, которые не обладают свойством (P), могут мыслиться как подчиненные новому типу «лакунарного» условия, и, указав некоторые простые примеры последовательностей, обладающих свойством (P), он строит последовательность положительной плотности, которая не удовлетворяет (P). Он предполагает, что последовательность простых чисел также не удовлетворяет (P), и в подстрочном примечании указывает, что его предположение без труда может быть подтверждено с помощью одного результата Харди и Литтльвуда. В заключение доказывается следующая теорема: Если $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_\mu$ $(\mu < \infty)$ суть бесконечно возрастающие последовательности, которые не удовлетворяют (P), то ему также не удовлетворяет возрастающая последовательность, составленная из всевозможных элементов, которые содержатся в каких-нибудь из последовательностей $\sigma_1, \ldots, \sigma_\mu$. H. Halberstam

Перевод из Math. Revs, 1956, 17, № 6, 586.

9509. Критерий равномерного распределения показательной функции в комплексной области. Постников А. Г. Вестн. Ленингр. ун-та, 1957, № 13, 81—88 (рез. англ.)

Для любого комплексного числа $\alpha + i\beta$ обозначим через $\{\alpha + i\beta\}$ его дробную долю, т. е. комплексное число, вещественная часть и коэффициент мнимой части которого равны соответственно дробным долям чисел α и β. Пусть $a + ib$ — целое комплексное число, отличное от чисел ± 1, $\pm i$, $\mu_1 + i\mu_2$ — произвольное комплексное число; Δ — квадрат со сторонами, параллельными вещественной и мнимой оси, и лежащий внутри единичного квадрата; $N_p(\Delta)$ — число дробных долей $\{(\mu_1 + i\mu_2)(a + ib)^x\}$ с $x = 0, 1, \ldots p-1$.

Доказана теорема: Если для любого Δ имеет место соотношение $\overline{\lim}_{p\to\infty} N_p(\Delta)/p < C|\Delta|$, где $|\Delta|$ — площадь Δ, C — постоянная, то числа $\{(\mu_1 + i\mu_2) \times (a + ib)^x\}$ равномерно распределены в единичном квадрате. Строится пример числа $\mu_1 + i\mu_2$, удовлетворяющего условиям теоремы.

Аналогичный критерий равномерного распределения для показательной функции в вещественной области доказал И. И. Пятецкий-Шапиро (Изв. АН СССР, Сер. матем., 1951, 15, 49—52). И. П. Кубилюс

9510. Нормальные по Бернулли последовательности знаков. Постников А. Г., Пятецкий И. И., Изв. АН СССР. Сер. матем., 1957, 21, № 4, 501—514

Рассмотрим бесконечную последовательность независимых испытаний, при каждом из которых появляется либо цифра 1 с вероятностью p, либо цифра 0 с вероятностью q, $pq > 0$, $p + q = 1$. Каждой конечной или бесконечной последовательности знаков 0 и 1 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$ сопоставим число $\alpha = \alpha_1 2^{-1} + \alpha_2 2^{-2} + \ldots$. Любому отрезку вида $[A, A + 2^{-r}]$, где $A = \varepsilon_1 2^{-1} + \varepsilon_2 2^{-2} + \ldots + \varepsilon_r 2^{-r}$ ($\varepsilon_k = 1$ или 0), припишем меру $\mu[A, A + 2^{-r}] = p^j q^{r-j}$, где j — число единиц среди $\varepsilon_1, \ldots \varepsilon_r$. Эту меру продолжим по непрерывности на интервалы произвольного вида из $[0, 1]$ и построим теорию измерения для множеств из $[0, 1]$, аналогичную лебеговой. Тогда $\mu[A, A + 2^{-r}]$ равно вероятности наступления при первых r испытаниях чисел $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r$. Определение меры вводит вероятность во множества бесконечных последовательностей исходов.

Для последовательности знаков $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$ обозначим через $N_p(\alpha, \Delta)$ число, указывающее сколько раз встретится s-членная комбинация знаков $\Delta = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_s)$ среди комбинаций $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_s)$, $(\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{s+1}), \ldots, (\alpha_p, \alpha_{p-1}, \ldots, \alpha_{p+s-1})$, т. е. число дробных долей $\{\alpha^{2x}\}$, $x = 0, 1, \ldots, p-1$, принадлежащих интервалу $[\Delta, \Delta + 2^{-s}]$. Последовательность α называется нормальной по Бернулли, если для любого $s \geqslant 1$ и любой s-членной комбинации Δ

$$N_p(\alpha, \Delta)/p \to \mu[\Delta, \Delta + 2^{-s}]$$

при $p \to \infty$.

Все числа отрезка $[0, 1]$ вместе с семейством преобразований T^k, $k = 1, 2, \ldots$, где $T_\alpha = \{2\alpha\}$, образуют дискретную динамическую систему, причем мера μ является инвариантной для преобразования T. Из эргодической теоремы Биркгофа, распространенной Риссом

(Riesz F., Comment. math. helv., 1944—1945, 17, 211—239) на случай не взаимно однозначных преобразований, выводится, что с вероятностью 1 исходы бесконечной последовательности испытаний образуют нормальную по Бернулли последовательность знаков.

Имеет место обобщение критерия Пятецкого (Изв. АН СССР. Сер. матем., 1951, 47—52) равномерного распределения дробных долей функции $\alpha 2^x$: если для любого $s \geqslant 1$ и любой s-членной комбинации Δ

$$\overline{\lim}_{p\to\infty} N_p(\alpha, \Delta)/p < C\mu[\Delta, \Delta + 2^{-s}],$$

где C — константа, не зависящая от s и Δ, то последовательность α — нормальна по Бернулли.

Строится пример нормальной по Бернулли последовательности знаков. И. П. Кубилюс

9511. О трансцендентности чисел вида α^β. Платонов М. Л., Тр. Иркутского ун-та, 1957, 15, 82—98

Используя метод А. О. Гельфонда 1949 г. (Успехи матем. наук, 1949, 4, вып. 5, 14—48), автор обобщает ряд результатов Риччи (Ann. R. Scuola Norm. Sup. Pisa, 1935, Ser. II, 4, 341—372). Доказывается трудно-обозримая теорема о трансцендентности чисел вида α^β, в случае когда α и β в некотором смысле достаточно хорошо приближаются алгебраическими числами.

Теорема. Пусть $\{\xi_i\}$ и $\{\eta_i\}$ — две последовательности алгебраических чисел, сходящиеся соответственно к числам $\xi \neq 0, 1$ и η (алгебраически зависимым, если они оба трансцендентны); ν_i обозначает степень минимального алгебраического поля, содержащего числа ξ_i и η_i; x_i; y_i — минимальные натуральные числа, такие, что $x_i\xi_i$ и $y_i\eta_i$ являются целыми алгебраическими числами;

$$\delta_i = \max(|\xi - \xi_i|, |\eta - \eta_i|), \quad N_i = \ln\frac{1}{\delta_i},$$

$$X_i = |\overline{\xi_i}|, \quad Y_i = |\overline{\eta_i}|,$$

где $|\overline{\alpha}|$ — наибольшая из абсолютных величин чисел, сопряженных с алгебраическим числом α; Λ_i — граница линейной независимости чисел 1 и η_i в поле рациональных чисел.

Тогда, если можно указывать неотрицательные целые рациональные значения параметров $r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, q_0, q, p$ такие, что для бесконечного множества значений i будут выполняться следующие соотношения:

$$\nu_0(p'+1)(r_1+1)(r_2+1) < pq_0q, \tag{1}$$

где ν_0 — постоянная, а

$$p' = \begin{cases} p = 0, & \text{если } \xi \text{ и } \eta \text{ — оба алгебраические числа,} \\ p + q_0r_2, & \text{если } \xi \text{ — трансцендентное, } \eta \text{ — алгебраическое,} \\ p + r_1, & \text{если } \xi \text{ — алгебраическое, } \eta \text{ — трансцендентное,} \\ p + q_0r_2 + r_1 & \text{если } \xi \text{ и } \eta \text{ — оба трансцендентные,} \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} r_4^{1+\varepsilon_0} q_1 + \nu_1(r_1 \ln q_1 + r_4q_1 + p + r_3 \ln r_3) + \\ + (p_0 + q_0r_4)\nu_i \ln(ex_iX_i) + (p_1 + r_3) \times \\ \times \ln(ey_iY_i) = 0 \ (r_1r_2 \ln r_2), \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

где $\varepsilon_0 > 0$, $r_3 > r_1$, $r_4 > r_2$, $q_1 = \max(q_0, q)$,

$$p_0 = \begin{cases} p, & \text{если } \xi \text{ — трансцендентное,} \\ 0, & \text{если } \xi \text{ — алгебраическое,} \end{cases}$$

$$p_1 = \begin{cases} p, & \text{если } \eta \text{ — трансцендентное,} \\ 0, & \text{если } \eta \text{ — алгебраическое,} \end{cases}$$

$r_3r_4 \ln r_4 = o(N_i)$, $q_1 = o(\Lambda_i)$, $r_5 \geqslant (q_0+1)(q+1)$,

$\varepsilon_0 r_3 r_4 \ln r_4 > 8r_5 \ln r_5 + 2^6 q_0 q \ln q_1 + 2^7 q\nu_i \ln(q_1 y_i Y_i)$,

то ξ^η является трансцендентным числом.

Более обозримые следствия из своей теоремы автор предполагает опубликовать в другой статье.

А. Б. Шидловский

9512. Совершенные и предельные формы с шестью переменными. Барнс (The perfect and extreme senary forms. Barnes E. S.), Canad. J. Math., 1957, 9, № 2, 235—242 (англ.)

В работе приводятся без доказательств факты, подводящие итог тому, что известно в настоящее время о предельных и совершенных квадратических формах с 6 переменными. Указывается 6 предельных форм: $\varphi_0 = \sum_1^6 x_i^2 + \sum_{i<j} x_ix_j$, $\varphi_1 = \varphi_0 - x_1x_2$, $\varphi_2 = \varphi_0 - x_1x_2 - x_1x_3$, $\varphi_3 = \varphi_0 - \frac{1}{2}(x_1x_2 + x_3x_4 + x_5x_6)$, $\varphi_4 = \varphi_0 - \frac{1}{2} \times (x_1x_2 + x_3x_4 + x_3x_5 + x_3x_6 + x_4x_5 + x_4x_6 + x_5x_6)$, $\varphi_6 = \varphi_0 - \frac{1}{2}(x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_6 + x_2x_5 + x_4x_6 + 2x_5x_6)$ и одна совершенная, но не предельная, форма $\varphi_5 = \varphi_0 - \frac{1}{2}(x_1x_2 + x_3x_4 + x_3x_5 + x_4x_5)$. Формы φ_5 и φ_6, по замечанию автора, указываются впервые, остальные формы были даны в разное время Вороным, Хофрейтером, Кокстером, Кнезером, Барнсом. О последних двух работах см. РЖМат, 1956, 998, 999. Утверждается, что $\varphi_0, \ldots \varphi_4, \varphi_6$ — представляют полную систему неэквивалентных предельных, а $\varphi_0, \ldots, \varphi_4, \varphi_5, \varphi_6$ — неэквивалентных совершенных форм с 6 переменными. Минимум всех форм φ_i для целых x_i, не равных одновременно 0, равен 1. Вычислены порядки групп целочисленных автоморфизмов φ_i, количество пар минимальных векторов $\pm L$ для φ_i (т. е. целочисленных векторов L, для которых $\varphi_i(L) = 1$) и определители φ_i. Дано n-мерное обобщение формы φ_6 и подробное описание группы ее автоморфизмов.

Примечание референта. Форма φ_5 была указана в 1947 г. в дипломной работе студента ЛГУ В. С. Владимирова. Б. Б. Венков

9513. Некоторые приложения одного арифметического свойства квадрик. Сегре (Alcule applicationi di una proprietà aritmetica delle quadriche. Segre Beniamino). Rev. Unión mat. argent. y Asoc. fís. argent., 1955, 17, 231—250 (итал.)

Пусть $\varphi \equiv \sum_{i,j=1}^{2n} \varphi_{ij} x_ix_j = 0$ — неособая квадрика в проективном пространстве S_{2n-1} над полем Γ характеристики $\neq 2$. В предыдущей работе автора (Rend. Semin. mat. Torino, 1950, 9, 137—144) было показано, что если φ содержит некоторое S_{n-1}, определенное над Γ, то $(-1)^n D$ есть квадрат элемента из Γ, где $D \neq 0$ — дискриминант φ. Даются различные приложения этой теоремы. Отметим два из них:

1) Если $f(x) = \sum_{i,j=1}^4 a_{ij}x_ix_j$, $g(x) = \sum_{i,j=1}^4 b_{ij}x_ix_j$ — две четверичные квадратичные формы над Γ, такие, что дискриминант $D(u) = \det(a_{ij} + ub_{ij})$ не имеет кратных корней, то эллиптическая кривая $\omega^2 = D(u)$ является якобиевой кривой для $f(x) = 0$, $g(x) = 0$ и

между двумя многообразиями имеется алгебраическое соответствие индекса (1,4).

2) Пусть $\varphi(z)$ — полином степени $2g+2$ с коэффициентами из Γ дискриминанта $\neq 0$. Изучается гиперэллиптическая кривая $C: \omega^2 = \varphi(z)$. Строятся некоторые проективные модели якобиева многообразия U и многообразия Виртингера J для C. Рассматривая некоторое соответствие индекса (1, 2) между U и J, автор приходит к разложениям $\varphi(z) = [\sigma(z)]^2 + [\tau(z)]^2$, где σ и τ — полиномы степени $\leqslant g+1$. Дается характеристика всех таких разложений (в подходящем расширении Γ).

Б. Б. Венков

9514. Покрытие пространства сферами. Фью (Covering space by spheres. Few L.), Mathematika, 1956, **3**, № 6, 136—139 (англ.)

Пусть Λ — решетка определителя $d(\Lambda)$ в трехмерном евклидовом пространстве, обладающая тем свойством, что сферы радиуса 1 с центрами в точках Λ покрывают все пространство, т. е. каждая точка пространства находится на расстоянии, не большем, чем 1, от некоторой точки решетки Λ. Бамба (РЖМат, 1955, 5604) доказал, что

$$d(\Lambda) \leqslant 32/5\sqrt{5},$$

причем равенство достигается тогда и только тогда, когда Λ есть решетка центрированных кубов с ребром, равным $4/\sqrt{5}$. Барнс (РЖМат, 1957, 8409) дал другое доказательство этой теоремы. В реферируемой заметке предлагается третье доказательство.

А. В. Малышев

9515. Несколько замечаний о плоских решетках и плотнейших заполнениях одинаковыми кругами. Брох (Some remarks concerning the plane lattice and close-packing of equal circles. Broch E. K.), Avhandl. utg. Norske vid. akad. Oslo. Mat.-naturvid. kl., 1956, № 3, 7 pp. (англ.)

Несколько очевидных замечаний о плотнейшем решеткообразном заполнении плоскости кругами.

Б. Б. Венков

9516. О суммах и разностях простых чисел и квадратов. Цулауф (On sums and differences of primes and squares. Zulauf Achim), Compositio math. (1957), **13**, № 2, 103—112 (англ.)

Пусть заданы системы чисел: $\varepsilon_\sigma = \pm 1$, $(\sigma = 1, 2, \ldots, S)$ и целые рациональные b_τ $(\tau = 1, \ldots, t)$, причем $\frac{1}{2} \times (s+t) > 2$, $N(q, n)$ — число представлений натурального q в форме

$$q = q' - q_s'', \quad \min(q' - q'') \leqslant n, \qquad (1)$$

где $q' = \sum_{\sigma=1}^{s} \varepsilon_\sigma p_\sigma$, $q'' = \sum_{\tau=1}^{t} b_\tau g^2_\tau$, p_σ — простые, принадлежащие заданным классам a_σ вычетов по mod K_σ, для $\sigma = 1, 2, \ldots, s$; g^2_τ — точные квадраты.

Автор доказывает, что при $n \to \infty$

$$N(q, n) \sim \varkappa S(q) n^{\frac{s+t}{2}} \ln^{-s} n,$$

где величина $\varkappa$ определяется заданием системы $\varepsilon_\sigma, b_\tau$, $S(q)$ — сингулярный ряд. Ранее автор показал (J. Math., 1954, **193**, 39—53), что $S(q) \neq 0$ для q, удовлетворяющих некоторым условиям. Нарушение последних влечет невозможность (1) для некоторых q.

Н. Г. Чудаков

9517. О некоторых приложениях дедекиндовых сумм. Мейер (Über einige Anwendungen Dedekindscher Summen. Meyer C.), J. reine und angew. Math., 1957, **198**, № 3-4, 143—203 (нем.)

Дается систематическое построение теории дедекиндовых сумм и некоторых ее приложений.

Первый раздел работы посвящен «специальной дедекиндовой сумме», определяемой следующим образом:

$$s(a, c) = \sum'_{\mu \bmod c} P_1\left(\frac{a\mu}{c}\right) P_1\left(\frac{\mu}{c}\right),$$

где $(a, c) = 1$, $P_1(x) = x - [x] - \frac{1}{2}$, а штрих над знаком суммы означает, что суммирование ведется по полной системе вычетов mod c, кроме $\mu \equiv 0 \pmod{c}$.

Во втором разделе рассматривается «общая дедекиндова сумма»

$$s_{gh}(a, c) = \sum'_{\mu \bmod c} P_1\left(\frac{a\mu}{c} + \frac{ag + ch}{fc}\right) P_1\left(\frac{\mu}{c} + \frac{g}{fc}\right),$$

для параметров g и h, взятых по mod f, при условии $(a, c) = 1$, $a \equiv 1, c \equiv 0 \pmod{f}$, штрих над знаком суммы означает, что $\mu \not\equiv 0$ и $\mu \not\equiv -\frac{c}{f}h \pmod{c}$. При $g = h = 0$ общая дедекиндова сумма обращается в специальную.

Примечание референта. Среди имеющихся здесь приложений дедекиндовых сумм приводится доказательство квадратичного закона взаимности над полем рациональных чисел, в основе которого лежит исходящее от Е. И. Золотарева истолкование символа Лежандра.

И. Г. Мельников

9518. Некоторые обобщения чисел Пуле и Кармикаеля. Дюпарк (Enige generalisaties van de getallen van Poulet en Carmichael. Duparc H. J. A.), Rapp. Math. centrum, 1956, № 005, 1—2 (гол.)

В статье (Duparc H. J. A., Rapp. Math. centrum, 1955, № 012, 1—4) автор показал, что при заданном натуральном $a > 1$ существует бесчисленное множество составных чисел m со свойством $m \mid a^{m-1} - 1$.

Ранее были протабулированы все числа $m < 10^8$ в случае $a = 2$ (Poulet P., Sphinx, 1938, **8**, 42—52). В статье Кармикаеля (Carmichael R. D., Amer. Math. Monthly, 1912, **19**, 22—27) рассматриваются составные числа m со свойством $m \mid a^{m-1} - 1$ при всех a с $(a, m) = 1$.

В настоящей заметке рассматривается несколько обобщений вышеупомянутых чисел m и ставится вопрос: бесконечны ли множества этих чисел?

Г. А. Ломадзе

9519. О характере одного частного сравнения. Росси (Sul carattere di una particolare congruenza. Rossi Francesco Saverio), Boll. Unione mat. ital., 1957, **12**, № 4, 694—697 (итал., рез. англ.)

Устанавливаются некоторые соотношения, приводящие к обобщению теоремы Вильсона для некоторых классов простых чисел.

В. А. Голубев

9520. Квадратные уравнения с нетипичным дискриминантом. Цеккендорф (Equations quadratiques à discriminant atypique. Zeckendorf E.), Bull. Soc. roy. sci. Liège, 1958, **27**, № 1-2, 28—40 (франц.)

Рассматриваются рекуррентные последовательности порядка m, $n: mt_x + nt_{x+1} = t_{x+2}$. Решаются квадратные уравнения $h_x^2 - (\gamma^2 + m) F_x^2 = (-m)^x$, где m и 2γ — порядок рекуррентной последовательности, и $h_x^2 - M \times (sF_x)^2 = (-m)^x$, где $\gamma^2 + m = Ms^2$.

Определяются значения γ и s, даются формулы членов последовательностей и их характеристики, формула, позволяющая построить начальные члены для восстановления последовательности.

В. А. Голубев

9521. **О проверке девятью и одиннадцатью. Блок** («On casting out nines and elevens». Bloch A.), Math. Gaz., 1957, 41, № 338, 271 (англ.)

Указываются приемы, облегчающие проверку вычислений при помощи вычетов по модулю 11, особенно удобные при денежных расчетах в английской валюте. В. А. Голубев

9522. **О суммах двух квадратов. Сатклифф** (On sums of two squares. Sutcliffe A.), Math. Gaz., 1957, 41, № 338, 288—289 (англ.)

Доказывается теорема: Целое число разлагается на сумму двух квадратов тогда и только тогда, когда оно выражается в форме $2^n(4N+1)$, где $n \geqslant 0$ — целое и N есть сумма двух треугольных чисел. В. А. Голубев

9523. **Простые числа. Ивс** (The prime numbers. Eves Howard W.), Math. Teacher, 1958, 51, № 3, 201—203 (англ.)

9524. **О рациональных точках на окружности. Кламкин** (On rational points on a circle. Klamkin Murray S.), Scripta math., 1954, 20, № 3—4, 222—223 (англ.)

9525. **Полные значения первых семнадцати совершенных чисел. Улер** (Full values of the first seventeen perfect numbers. Uhler H. S.), Scripta math., 1954, 20, № 3-4, 240 (англ.)

9526. **Тройки равновеликих рациональных треугольников. Гинзбург** (Triplets of equiareal rational triangles. Ginsburg Jekuthiel), Scripta math., 1954, 20, № 3-4, 219 (англ.)

АЛГЕБРА

Редакторы *А. И. Ширшов, Г. Н. Поваров*

9527. **Соотношения эквивалентности. Гай** (On equivalence relations. Guy W. T., Jr), Amer. Math. Monthly, 1955, 62, № 3, 179—180 (англ.)

9528 К. **Элементы теории множеств и алгебраических структур. Василаке** (Elemente de teoria mulţimilor şi a structurilor algebrice. Vasilache Sergiu. Bucureşti, Acad. R. P. R., 1956, 234 p., il., 11,65 lei), Bul. bibliogr., 1956, A, № 13, 489 (рум.)

Даются основные сведения из теории множеств и алгебраических структур (в смысле Бурбаки). Книга содержит три главы. В первой рассматриваются некоторые понятия из исчисления высказываний, необходимые для доказательства ряда теорем следующих глав. Вторая глава посвящена элементарной теории множеств. Здесь рассматриваются соотношения эквивалентности, порядка, кардинальные числа, порядковые типы, различные структуры, определенные на семействах подмножеств одного и того же множества. Большое внимание уделяется лемме Цорна и теореме Цермело о полной упорядоченности произвольного множества. В третьей главе дается понятие алгебраической структуры и изучаются ее простейшие свойства. После довольно подробного рассмотрения структур групп и колец автор переходит к общему вопросу о симметризации внутренних законов ассоциативности и коммутативности. В связи с этим вопросом рассматриваются важные для операционного исчисления операторы Микусинского. Далее изучаются векторные пространства, причем показывается значение понятия дуального пространства к данному векторному пространству. Последние страницы посвящены краткому изложению теории алгебр над коммутативным кольцом с единицей. В. А. Андрунакиевич

9529 Д. **О некоторых теоремах высшей алгебры. Вивье** (Sur quelques théorèmes d'algèbre extérieure. Vivier Marcel.— Thèse. Sci. math. Paris. Paris, Gauthier-Villard, 1956, 84 p.), Bibliogr. France, 1957, 146, № 48, Thèses, 1956, № 6, 157 (франц.)

МНОГОЧЛЕНЫ И ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

9530. **Комбинаторные обозначения. Хогбен** (Combinatory notation. Hogben Lancelot), Nature, 1956, 178, № 4528, 329 (англ.)

Кратко излагаются преимущества употребления в комбинаторике некоторых обозначений.

9531. **Число путей в одной уличной сети. Штёр** (Über die Anzahl der Wege in einem gewissen Strassennetz. Stöhr Alfred), Math. Z., 1957, 68 № 1, 77—81 (нем.)

Рассматривается комбинаторная проблема — определить число путей, соединяющих данные две точки с целыми координатами, если каждая элементарная часть пути соединяет точки с целыми координатами, имеет длину 1 и направлена либо вверх, либо направо. Для числа путей, соединяющих точку $A(0, 0)$ с точкой $B(r,s)$, легко получить значение $\binom{r+s}{r}$. Задача, однако, существенно усложняется, если, так это делает автор, рассматривать только «секторные пути», т. е. такие пути, соединяющие точки $A(0, 0)$, $B(r, s)$, которые целиком лежат по одну сторону диагонали AB. Эти секторные пути автор называет примитивными в том случае, когда они не имеют с диагональю общих точек, отличных от A и B. Обозначая через $b(r, s)$ число всех секторных путей, а через $c(r, s)$ — число всех примитивных секторных путей, соединяющих точки $A(0, 0)$, $B(r, s)$, автор находит явное выражение для производящих функций:

$$\sum{}' b(nr_0, ns_0)z^n \sum_{n=1}^{\infty}{}' C(nr_0, ns_0)z^n$$

и находит явное и очень простое выражение для $b(n,ns)$, пользуясь интегральной формулой Коши.

Н. П. Романов

9532. **О разложении многочленов на множители конечным числом шагов. Фрёлих, Шепердсон** (On the factorisation of polynomials in a finite number of steps. Fröhlich A., Shepherdson J. C.), Math. Z., 1955, 62, № 4, 331—334 (англ.)

Результат Ван-дер-Вардена (Van der Waerden, Math. Ann, 1930, 102) о несуществовании общего алгоритма разложения полиномов на множители (алгоритма расщепления), приложимого к полиномам над любым «явно заданным» полем K, дополняется построением следующего явно заданного поля K_0, для которого нет алгоритма расщепления:

$$K_0 = R(\sqrt{p}_{\lambda(1)}, \sqrt{p}_{\lambda(2)}, \dots), \qquad (1)$$

где p_m — m-е простое число, а $\lambda(n)$ — рекурсивная функция, для которой $\lambda(n) \neq \lambda(m)$ при $n \neq m$ и множество значений которой образует нерекурсивный класс (о функции $\lambda(n)$ см. Kleene S. C., Math. Ann., 1936, 112).

Далее строятся такие явно заданные поле k и его простое несепарабельное расширение K, что k имеет алгоритм расщепления, а K — нет. Авторы называют два явных представления поля явно изоморфными, если изоморфизм между ними таков, что существует рекурсивный алгоритм для вычисления соответствующих значений. В статье показано, что существуют расширения простого поля как трансцендентные, так и алгебраические, которые не являются явно изоморфными. Вместе с тем все явные представления конечных расширений простых полей явно изоморфны. За всеми подробностями авторы отсылают к своей работе, переданной в Trans. Roy. Soc., London.

В заключение критикуются работы Крулля (РЖМат, 1954, 4739; 1955, 1655; 1956, 199), различавшего алгоритмы расщепления в зависимости от различных способов, которыми задаются границы числа шагов, потребных для разложения на множители.

А. Г. Школьник

9533. **Новое доказательство основной теоремы алгебры. Гао Хэн-шань** (Kao Heng-san), Шусюэ дзиньчжань, 1957, **3**, № 4, 608—611 (кит.; рез. англ.)

9534. **Новое доказательство теоремы В. А. Маркова при помощи теоремы Штурма. Константинеску Ф.**, Успехи матем. наук, 1957, **12**, № 6, 147—148

9535. **Некоторые нефакторизуемые полиномы. Хольдер** (Certain non-factorable polynomials. Holder Doyne), Math. Mag., 1957, **31**, № 2, 80 (англ.)

Показывается, что если $a(x) = a_n x^n + \ldots + a_0$ — целочисленный полином, причем a_n, a_0, $a(1)$ — нечетные, то он не содержит целочисленного линейного множителя, в частности целочисленный квадратный трехчлен неприводим в поле рациональных чисел, если все его коэффициенты — нечетные. Результат этот в современных курсах высшей алгебры предлагается в качестве задачи (см., например, Фаддеев, Соминский, Сборник задач по высшей алгебре, ГТТИ, 1949, задача 665).

В. В. Морозов

9536. **Заметка о расположении нулей полиномов. Кёйперс** (Note on the location of zeros of polynomials. Kuipers L.), Simon Stevin, 1956, **31**, № 2, 61—72 (англ.)

Доказывается несколько теорем, касающихся расположения нулей полиномов вида $f(z+\lambda) + \gamma f(z+\mu)$. Эти теоремы продолжают исследование референта (Tohoku Math. J., 1933, **38**, 93—100), Вайснера (Weisner L., там же, 1937, **44**, 175—177) и Надя (Nagy J. V., там же, 1936, **41**, 415). Одна из них гласит: Пусть $f(z) = a_0(z-z_1)(z-z_2)\ldots(z-z_n)$ и пусть $\lambda_k (|\lambda_k| > 1)$ для $k = 1,2,\ldots, n$ и h — некоторые комплексные числа. Обозначим через C_k, C'_k окружности, определенные соответственно уравнениями

$$\left|\frac{z-z_k+h}{z-z_k-h}\right| = |\lambda_k|, \qquad \left|\frac{z-z_k-h}{z-z_k+h}\right| = |\lambda_k|, \; k = 1,2,\ldots,n.$$

Пусть G и G' обозначают пересечение кругов, ограниченных соответственно C_k и C'_k. Тогда полиномы $f(z+h) + \lambda f(z-h)$, $\lambda f(z+h) + f(z-h)$, где $\lambda = \lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n$, не имеют нулей соответственно в G и G'.

Автор изучает также полиномы вида $\int_{z-h}^{z+h} f(t)dt$, $\mu f(z-h)\,g(z+1) + \lambda f(z+h)\,g(z-1)$ (g — полином), обобщая одну из теорем референта. Для полиномов $f(z)$ с вещественными коэффициентами доказана следующая теорема: если его нули $z_k = x_k + iy_k$ лежат в полосе $|y_k| \leqslant m$ $(n > 0)$, то все нули полинома $f(z+mi) + \gamma f(z-mi)$, где γ — комплексное число с единичным модулем, вещественны.

Примечание референта. Последняя из приведенных в реферате теорем в сущности следует непосредственно из теоремы Эрмита — Билера.

Н. Обрешков

9537. **Условия устойчивости линейных систем и условия реализуемости функций *RC*-сетями. Фуллер** (Stability criteria for linear systems and realizability criteria for *RC*-networks. Fuller A. T.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1957, **53**, № 4, 878—896 (англ.)

Пусть $f(p) = a_0 + a_1 p + \ldots + a_n p^n$ — многочлен с действительными коэффициентами, для которого $a_n > 0$, и пусть H_i — соответствующие определители Гурвица. Основной результат: многочлен $f(p)$ тогда и только тогда является H-многочленом (т. е. действительные части всех его корней отрицательны), когда

$$H_{n-1} > 0,\ H_{n-3} > 0,\ H_{n-5} > 0 \begin{cases} H_3 > 0, \text{ если } n \text{ четно;} \\ H_2 > 0, \text{ если } n \text{ нечетно;} \end{cases}$$

$$a_{n-1} > 0,\ a_{n-3} > 0,\ a_{n-5} > 0 \text{ и } a_0 > 0. \quad \begin{cases} a_1 > 0, \text{ если } n \text{ четно;} \\ a_2 > 0, \text{ если } n \text{ нечетно;} \end{cases}$$

По сравнению с классическим критерием Гурвица ($H_i > 0$ для всех i) этот критерий содержит вдвое меньше детерминантных неравенств.

Доказано также, что все корни многочлена $f(p)$ тогда и только тогда действительны и отрицательны (случай апериодичности), когда многочлен $f(p^2) + pf'(p^2)$ является H-многочленом. Из этого утверждения непосредственно вытекает, например, известный критерий периодичности, предложенный Мееровым (Докл. АН СССР, 1945, **12**, 1169—1178).

Кроме того, рассмотрен вопрос о реализуемости данной дробнорациональной функции как импеданса или апередаточной функции некоторой *RC*-сети. В отличие от ранее известных решений этого вопроса, полученные автором условия содержат лишь коэффициенты данной функции.

М. М. Постников

9538. **Новое применение критерия устойчивости Гурвица-Рауса. Ашер** (A new application of the Hurwitz-Routh stability criteria. Usher Theron, Jr), Commun. and Electronics, 1957, № 33, 530—533. Discuss., 533 (англ.)

Для многих вопросов, связанных с проблемой качества регулирования, бывает нужно оценить аргументы корней данного устойчивого многочлена $P(s)$ степени n. Автор замечает, что аргументы корней многочлена $P(s)$ тогда и только тогда заключаются в пределах от $\pi - \theta$ до $\pi + \theta$, когда устойчив многочлен $F(z) = P(ze^{i\theta}) \times P(ze^{-i\theta})$. Так как последний многочлен имеет действительные коэффициенты, для выяснения его устойчивости применим критерий Гурвица. Для $n \leqslant 10$ приведены выражения коэффициентов многочлена $F(z)$ через коэффициенты многочлена $P(z)$ и угол θ. Рассмотрены числовые примеры.

М. М. Постников

9539. **Определение устойчивости и определение скорости исчезновения переходного процесса: алгебраические критерии** (Determination of stability and damping: algebraic criteria. Computer), Electronic and Radio Engr, 1957, **34**, № 7, 268 (англ.)

Несколько простых замечаний об условиях устойчивости (гурвицевости) многочленов. В частности, формулируется (без доказательства и без ссылок) теорема Эрмита-Билера. Новых результатов нет.

М. М. Постников

9540. **Математический спектр корней алгебраического уравнения. Орлов** (Spectre mathématique

des racines d'une équation algébrique. Orloff Constantin), Весн. Друштва матем. и физ. Нар. Реп. Србије, 1954, 6, № 1-2, 56—62 (франц.; рез. серб.)

Пусть $f(x)$ — целочисленный полином с простыми корнями, расположенными в интервале (a, b), где a, b — целые числа. Этому полиному сопоставляется число S (спектр) $(0 \leqslant S \leqslant 1)$, зависящее от коэффициентов многочлена и разбиения интервала (a, b) на 10^n частей. Изучение десятичного разложения числа S позволяет найти приближенные значения всех корней многочлена. С. Д. Берман

9541. К относительной непрерывности корней алгебраических уравнений. Островский (Zur relativen Stetigkeit von Wurzeln algebraischer Gleichungen. Ostrowski Alexander), Jahresber. Dtsch. Math. Ver., 1956, 58, № 3, 98—102 (нем.)

Пусть $f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n$, $g(z) = z^n + b_1 z^{n-1} + \ldots + b_n$ $(a_n b_n \neq 0)$, x_ν, соответственно y_ν $(\nu = 1, \ldots, n)$ — корни этих полиномов, $|x_\nu| = r_\nu$, $|y_\nu| = \rho_\nu$ $(r_1 \leqslant r_2 \leqslant \ldots \leqslant r_n$, $\rho_1 \leqslant \rho_2 \leqslant \ldots \leqslant \rho_n)$. Назовем Ньютоновской мажорантой полинома $f(z)$ полином $\mathfrak{M}_f(z) = T_0 z^n + T_1 z^{n-1} + \ldots + T_n$ с наименьшими положительными коэффициентами, удовлетворяющими условиям $|a_\nu| \leqslant T_\nu$ $(\nu = 0, 1, \ldots, n)$, $T_\nu^2 \geqslant T_{\nu-1} T_{\nu+1}$ $(\nu = 1, \ldots, n-1)$.

Доказан результат, усиливающий прежние результаты автора (Acta math., 1940, **72**, 99—257): Если для $\tau > 0$, $4n\tau^{1/n} \leqslant 1$, модули коэффициентов полинома $g(z) - f(z)$ не превосходят соответствующих коэффициентов полиномов $\mathfrak{M}_f(z)$ и $\mathfrak{M}_g(z)$, умноженных на τ, то

$$\left(\frac{1+\tau^{1/n}}{1-\tau^{1/n}}\right)^u \geqslant \frac{\rho_\nu}{r_\nu} \geqslant \left(\frac{1-\tau^{1/n}}{1+\tau^{1/n}}\right)^u,$$

где u — наибольшее нечетное число, не превосходящее n.

При $\tau \to 0$ получается оценка для $\left|\frac{\rho_\nu}{r_\nu} - 1\right|$, эквивалентная $2n\tau^{1/n}$, в то время, как ранее полученные оценки были эквивалентны $4n\tau^{1/n}$. Условие теоремы выполняется, если имеют место неравенства $|b_\nu - a_\nu| \leqslant \tau |a_\nu|$, $|b_\nu - a_\nu| \leqslant \tau |b_\nu|$ $(\nu = 1, \ldots, n)$. Доказательство существенно опирается на прежние работы автора (цит. работа и РЖМат, 1958, 8774). Н. Чеботарев

9542. Новый, простой вывод преобразований Лоренца. Комьятхи (A Lorentz-transzformációk új, egyszerű levezetése. Komjáthy Aladár), Magyar tud. akad. Mat. és. fiz. tud. oszt. közl., 1957, 7, № 2, 179—182 (венг.)

9543. Условия апериодичности в линейных системах. Фуллер (Conditions for aperiodicty in linear systems. Fuller A. T.), Brit. J. Appl. Phys., 1955, 6, № 12, 450—451 (англ.)
РЖМех, 1956, 7193.

9544. Неоднородные билинейные системы. Кремнева Ю. П., Вестник Ленингр. ун-та, 1957, № 19, 79—86 (рез. англ.)

Если не считать введения и резюме, то эта статья отличается лишь названием от предыдущей статьи автора (РЖМат, 1958, 122). С. Н. Черников

9545. Исправление к статье «Заметка к вопросу решаемости определенной системы неравенств при помощи положительных чисел». Червена (Oprava k článku «Poznámka k otázce řešitelnosti jisté soustavy nerovností kladnými čísly. Červená Alena), Časop. pěstov. mat., 1958, 83, № 1, 97—98 (чешск.; рез. русск., нем.)

Исправляются ранее опубликованные условия совместности системы неравенств (РЖМат, 1958, 7480):

$$\alpha_1 C_{11} - \alpha_2 C_{12} - \alpha_3 C_{13} - \ldots - \alpha_n C_{1n} > 0,$$
$$-\alpha_1 C_{21} + \alpha_2 C_{22} - \alpha_3 C_{23} - \ldots - \alpha_n C_{2n} > 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$-\alpha_1 C_{21} - \alpha_2 C_{n2} - \alpha_3 C_{n3} - \ldots + \alpha_n C_{nn} > 0,$$

Автор утверждает, что эта система тогда и только тогда совместна, когда произведение

$$C_{11}^{(j)}\, C_{22}^{(j)} \ldots C_{jj}^{(j)}, \quad \text{где } C_{ik}^{(j)} = C_{ik}^{j+1} C_{j+1,\,j+1}^{(j+0)} + (1 - 2\delta_{ik})\, C_{i,\,j+1}^{(j+1)} C_{j+1,\,k}^{(j+1)} \quad (i, k = 1, \ldots j,\ C_{ik}^{(n)} = C_{ik}),$$

имеет наибольшее значение из всех произведений типа $C_{1i_1}^{(j)} C_{2i_2}^{(j)} \ldots C_{ji_j}^{(j)}$, где $i_1, i_2, \ldots, i_j$ — произвольная перестановка чисел $1, 2, \ldots, j$. С. Н. Черников

9546. Формулы для вычисления определителя квадратной матрицы одного частного вида. Натанзон В. Я., Прикл. матем. и механ., 1957, **21**, № 4, 593—595

Выводятся формулы для вычисления миноров

$$D\begin{pmatrix}1,2,\ldots,\ p\\ 1,2,\ldots,\ p\end{pmatrix} \quad \text{и} \quad D\begin{pmatrix}p+1,\ p+2,\ldots,\ n\\ p+1,\ p+2,\ldots,\ n\end{pmatrix}$$

матрицы $C = A - \lambda E$, если элементы матрицы $A = (a_{ik})_1^n$ удовлетворяют условию $a_{ik} = 0$ при $i - k > 1$. Кроме того, даются формулы для вычисления собственных векторов этой матрицы и указывается, что ее характеристические числа можно определить методом подбора. Очевидно, автор имеет в виду определение характеристических чисел с помощью построения $u(\lambda)$-линии. Указанные вопросы для матриц частного вида $a_{ik} = 0$ при $|i - k| > 1$ были рассмотрены Ф. Р. Гантмахером и М. Г. Крейном (Осцилляционные матрицы и ядра, М.—Л., ГИТТЛ, 1950). А. Ф. Голубчиков

9547. Об идемпотентных матрицах. Кан (On idempotent matrices. Khan N. A. Publs math., 1957, 5, № 1-2, pp. 54—59) (англ.)

Квадратная матрица A называется идемпотентной, если $A^2 = A$. Пусть k — целое число. В работе, в частности в теоремах 1 и 2, рассматриваются идемпотентные матрицы A с элементами $a_{ij} = P/2^Q$, где P и Q — целые числа, удовлетворяющие условиям

$$P \equiv 0 \pmod{k} \text{ и } Q \leqslant k.$$

Число p называется псевдопростым, если оно не является простым и удовлетворяет следующему условию: $2^p \equiv 2 \pmod{p}$.

Автором получены следующие результаты:

Теорема 1. Если k — простое или псевдопростое число, то $[2(I \pm A)]^k \equiv 2I \pmod{k}$, и обратно.

Теорема 2. Если $f(x)$ — некоторый многочлен с действительными коэффициентами, то: 1) $f(I + A)$ имеет характеристические числа $f(2)$ кратности r и $f(1)$ кратности $n - r$; 2) $f(I - A)$ имеет характеристические числа $f(0)$ кратности r и $f(1)$ кратности $n - r$, где r — ранг матрицы, n — ее порядок.

Теорема 3. Если $f(x)$ — многочлен с действительными коэффициентами и D — такая нильпотентная матрица порядка n, что $f(1)D + [f(2) - f(1)]DA = 0$,

то матрица $f(I+A)+D$ имеет характеристические числа $f(2)$ кратности r и $f(1)$ кратности $n-r$.

Теорема 4. Если D — такая нильпотентная матрица порядка n с действительными элементами, что $D=DA$, то матрица $(I-A)^k+D$ имеет характеристические числа 0 кратности r и 1 кратности $n-r$.

А. Ф. Голубчиков

9548. К обобщению неравенства Адамара, выполненному Сасом. Мирский (On a generalization of Hadamard's determinantal inequality due to Szász. Mirsky L.), Arch. Math., 1957, 8, № 4, 274—275 (англ.)

Сас (Szász O.,Monatsh. Math. und Phys., 1917, 28, 253—257) получил следующее обобщение неравенства Адамара;

$$P_1 > P_2^{1/\binom{n-1}{1}} > P_3^{1/\binom{n-1}{2}} > \ldots > P_{n-1}^{1/\binom{n-1}{n-2}} > P_n.$$

Здесь P_k — произведение главных миноров k-го порядка положительно определенной матрицы A. В работе этот результат доказывается более простыми средствами и дается следующее обобщение:

Для положительно определенной матрицы A последовательность

$$(\det A)^{-n/(n-k)} P_k^{1/\binom{n-1}{k}}, \quad k=0,1,2,\ldots,n-1, \quad P_0=1,$$

является строго возрастающей. А. Ф. Голубчиков

9549. Замечание к нормальной жордановой форме матриц. Птак (Eine Bemerkung zur Jordanschen Normalform von Matrizen. Pták Vlastimil), Acta scient. math., 1956, 17, № 3-4, 190—194 (нем.)

Дано приведение матрицы к нормальной жордановой форме на основании следующих предложений:

1. Относительно данной матрицы A векторное пространство X может быть разложено в прямую сумму таких подпространств X_s и X_r, что в X_s матрица A является нильпотентной, а в X_r — регулярной.

2. Пусть $A^q=0$ и x_0 — такой вектор, для которого $x_0A^{q-1}\neq 0$; пусть, далее, X_0 является минимальным подпространством, содержащим x_0. Тогда существует такое инвариантное пространство X', что пространство X может быть разложено в прямую сумму подпространств X_0 и X': $X=X_0+X'$.

Автор указывает, что эти предложения не являются новыми (см. например., Мальцев А., Основы линейной алгебры, М.— Л., 1947); в настоящей работе доказательство этих предложений приводится с помощью теории дуальных пространств. А. Ф. Голубчиков

9550. О матричных решениях циклического уравнения. Терстон (On matric solutions of a cyclic equation. Thurston H. S.), Amer. Math. Monthly, 1956, 63, № 6, 405—407 (англ.)

Доказывается, что всякое циклическое уравнение $f(x)=0$ n-й степени над полем рациональных чисел имеет сопряженный ряд рациональных матричных решений $B_1, B_2, \ldots, B_n$ (B_i — квадратные матрицы n-го порядка), обладающий тем свойством, что B_{i+1} получается из B_i путем циклической перестановки строк и столбцов. Для доказательства последнего свойства устанавливается, что $B_{i+1}=U^{-1}B_iU$, где матрица U получена из единичной путем циклической перестановки столбцов. Решений B_i, обладающих указанным свойством, множество. В качестве примера рассматривается уравнение $x^3+x^2-2x-1=0$ и находятся два сопряженных ряда его матричных решений с матрицами

$$B_1=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&-1\\0&-1&-1\end{pmatrix}, \qquad C_1=\begin{pmatrix}-2&-1&-2\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}.$$

А. Г. Школьник

9551. Матрицы. Ким Кё Сек, Сухак ка мулли, Математика и физика, 1957, 1, № 3, 60—68 (кор.)

9552. Замечание о матричных многочленах. Мирский, Радо (A note on matrix polynomials. Mirsky L., Rado R.), Quart. J. Math., 1957, 8, № 30, 128—132 (англ.)

Пусть $\varphi(x)$ — некоторый многочлен и A — квадратная матрица. Очевидно, что если A — диагональная или нормальная матрица (или подобна такой матрице), то $\varphi(A)$ — матрица того же типа.

Авторы рассматривают условия, достаточные для того, чтобы из диагональности или нормальности матрицы $\varphi(A)$ следовала диагональность или соответственно нормальность матрицы A. Ими доказаны следующие предложения:

Теорема 1. Пусть A — комплексная квадратная матрица порядка n с характеристическими числами $w_1, w_2, \ldots, w_n$; $\varphi(x)$ — некоторый многочлен и $f(x)$ — такой многочлен, что $f(A)=0$. Тогда, если $\varphi'(w_r)\neq 0$, $f'(w_r)=0$, то из диагональности матрицы $\varphi(A)$ следует диагональность матрицы A; если, кроме того, $\varphi(w_r)\neq\varphi(w_s)$, $w_r\neq w_s$, то из нормальности матрицы $\varphi(A)$ следует нормальность матрицы A.

Теорема 2. Пусть $f(x)$ и $\varphi(x)$ — многочлены с коэффициентами из поля ε и пусть ε' — такое расширение поля ε, которое является полем разложения для $f(x)$:

$$f(x)=\prod_{r=1}^{m}(x-\alpha_r)^{k_r}, \quad \alpha_i\neq\alpha_j, \quad k_1,\ldots,k_m\geqslant 1.$$

Тогда необходимыми и достаточными для существования такого многочлена $p(x)\in\varepsilon[x]$, что $p\{\varphi(x)\}\equiv x\,[\mathrm{mod}\, f(x)]$, являются условия:

$$\varphi(\alpha_r)\neq\varphi(\alpha_s), \qquad 1\leqslant r<s\leqslant m$$

$$\varphi'(\alpha_r)\neq 0 \qquad \text{для } k_r>1.$$

Отсюда тотчас следует

Теорема 3. Пусть $\varphi(x)$ — некоторый многочлен и

$$f(x)=\prod_{r=1}^{m}(x-\alpha_r)^{k_r}, \quad \alpha_i\neq\alpha_j, \quad k_i\geqslant 1$$

— минимальный многочлен для матрицы A. Тогда для существования такого многочлена $\rho(x)$, что $\rho\{\varphi(A)\}=A$, необходимо и достаточно выполнение условий:

$$\varphi(\alpha_r)\neq\varphi(\alpha_s), \quad 1\leqslant r<s\leqslant m \text{ и } \varphi'(\alpha_r)\neq 0,$$

если $k_r>1$.

В заключение авторы показывают возможность обобщения приведенных теорем на случай, когда многочлен $\varphi(x)$ заменяется регулярной функцией $\chi(z)$.

А. Ф. Голубчиков

9553 К. Векторные пространства и матрицы. Тролл, Торнхейм (Vector spaces and matrices. Thrall Robert McDowell, Tornheim Leonard. New York, Wiley, London, Chapman and Hall, 1957, XII, 318 pp., 54 sh.) (англ.)

Учебное пособие по линейной алгебре, рассчитанное на начинающих студентов-математиков и соответствующее, как указывается в предисловии, годовому курсу лекций при 3 лекциях в неделю. Изложение материала очень детализированное. В книге перепле-

таются между собой два стиля: вычислительный, при котором матрица трактуется как таблица чисел, и операторный, при котором матрица рассматривается как линейный оператор в конечномерном векторном пространстве. Операторный стиль явно доминирует.

Книга состоит из 11 глав, разбитых в свою очередь на параграфы (всего — 91 параграф), большинство которых сопровождается значительным количеством примеров и задач для самостоятельных упражнений. В гл. 4 автор излагает теорию определителей, используя материал предыдущих 3 глав, в которых даны основные сведения о векторных пространствах, линейных преобразованиях и матрицах, о системах линейных уравнений.

В гл. 5 исследуются понятия эквивалентности и подобия матриц, а также характеристических чисел и собственных векторов матрицы. Гл. 6, 7 содержат основные сведения о квадратичных и эрмитовых формах. Здесь же исследуются свойства симметрических, кососимметрических, ортогональных, эрмитовых и унитарных матриц.

Гл. 8 содержит теорию полиномов от одной переменной величины и теорию простых алгебраических расширений поля. Не требуя, чтобы расширение поля снова было полем, автор получает алгебраический фундамент, на котором можно строить не только теорию Галуа, но и общую теорию подобия. Материал преподносится в оригинальном и сравнительно элементарном изложении.

В гл. 9 изучаются матрицы с полиноминальными и целыми коэффициентами. В качестве приложений рассматриваются системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Гл. 10 посвящена приведению матриц с помощью преобразования подобия к каноническим (жорданову и др.) видам. В гл. 11 рассматриваются матричные задачи, связанные с линейным программированием и математической теорией игр.

В конце книги помещены 3 дополнения: 1. Математическая индукция, 2. Соответствия и отображения и 3. Библиография, имеющая специальный раздел, посвященный линейным неравенствам, теории игр и линейному программированию. Ф. Р. Гантмахер

9554 К. Матричное исчисление. Керубино (Calcolo delle matrici. Cherubino Salvatore. (Montr. mat. Consiglio naz. ricerche, 4), Roma, Ed. Cremonese, 1957, VII, 322 p., 4000 L.) (итал.)

Книга представляет собой систематический курс теории матриц, состоящий из 4 глав. Первая глава содержит основные сведения о матрицах и квадратичных формах. В первых параграфах излагаются действия над матрицами (в том числе и над блочными матрицами), приведение матриц к треугольному виду и применения к исследованию систем линейных уравнений. Далее приводятся свойства полиномиальных матриц, матриц с целыми элементами; излагается теория квадратичных и эрмитовых форм. Предполагается, что читатель знаком с теорией определителей.

В первой же главе читатель знакомится с небольшим материалом из абстрактной алгебры, с векторными пространствами, с дифференцированием и интегрированием матриц, с мультипликативным интегралом.

Вторая глава носит название «Структурные свойства». В центре этой главы находится приведение матриц к нормальной жордановой форме. В качестве приложения рассматривается общая структура матрицы, перестановочной с данной и, вообще, свойства перестановочных матриц. При этом широко используется характеристика Сегре вместо элементарных делителей.

Однако в этой же главе имеется и другой интересный материал. Автор особо выделяет теорему Лаппо-Данилевского, согласно которой из mod $A \leqslant B$ следует $\max|\lambda(A)| \leqslant \max|\lambda(B)|$. Подробно излагаются классические исследования Фробениуса (со сравнительно недавними дополнениями Виландта) о спектральных свойствах матриц с неотрицательными элементами. Здесь же излагаются минимальные свойства (по Куранту) характеристических чисел пучка квадратичных форм.

Третья глава (§§ 1—4 объемом в 42 стр.) носит название «Приближенное вычисление и границы для характеристических чисел». В ней устанавливаются приемы и формулы для приближенного вычисления максимального характеристического числа и приводятся теоремы, относящиеся к матрицам с доминирующими диагональными элементами (теорема Леви — Адамара, теорема Тауски и др.). В качестве приложений в этой главе рассматриваются теоремы Рауса-Гурвица и Шура-Кона, относящиеся к многочленам, у которых все корни расположены в левой комплексной полуплоскости, соответственно внутри единичного круга.

Наконец, последняя четвертая глава носит название «Функции от матриц». Здесь, наряду со степенными рядами от матрицы (со скалярными и матричными коэффициентами), изучается и более общее понятие о матричной функции от матриц из нормированной матричной алгебры.

Изложение материала компактное. Приложения матричного исчисления к задачам механики и техники отсутствуют. Книга рассчитана на математиков (студентов старших курсов, научных работников). Для советского читателя представляет интерес изложение некоторых разделов последних двух глав.

Ф. Р. Гантмахер

9555 К. Алгебра. Руководство по определителям, матрицам и алгебраическим формам. Феррар (Algebra: A text-book of determinants, matrices, and algebraic forms. 2nd ed. Ferrar William Leonard. London, Oxford Unif. Press, 1957 (1958), VIII, 220 pp., 17 sh. 6d.), Brit. Nat. Bibliogr., 1958, № 423, 9 (англ.)

ГРУППЫ

9556. О группах симметрии рельефных бордюрных орнаментов. Тиберіу (Asupra grupurilor de simetrii ale chenarelor în relief. Tiberiu Roman), An. Univ. «C. I. Parhon». Ser. ştiinţ. natur., 1957, № 16, 9—14 (рум.; рез. русск., франц.)

Доказывается невозможность построения теории группы симметрий рельефных бордюрных орнаментов при помощи подстановок и иллюстрируется на примере постановок шести элементов.

Доказывается далее возможность использования матриц для той же цели. Представляются элементы и операции симметрии рельефных бордюрных орнаментов матрицами. Используя наложение двух линейных преобразований, автор выводит 31 группу симметрий этих орнаментов. Дается также их полная структура.

Резюме автора

9557. О конечных группах показателя 5. Хигман (On finite groups of exponent five. Higman Graham), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1956, 52, july, № 3, 381—390 (англ.)

Дается положительное решение ослабленной проблемы Бернсайда (РЖМат, 1956, 5133) для показателя $n=5$. Доказывается (при $n=5$) предложение Rn: Для любого положительного целого числа k найдется такое целое число $r_{n,k}$, что любая конечная группа показателя n, порожденная k образующими, имеет порядок не выше $r_{n,k}$.

Из результатов работы Холла и Хигмана (РЖМат, 1958, 4509) следует, что справедливость предложения

R_5 влечет за собой выполнение предложений R_{10}, R_{15} и R_{20}, а также S_{30} и S_{60}, где S_n получается из R_n заменой слова «конечная» на «разрешимая».

Основной результат следует из доказанной в работе локальной нильпотентности алгебры Ли, удовлетворяющей 4-му условию Энгеля, над полем P характеристики, взаимно простой с 6.

Независимо и иным методом этот же результат был получен А. И. Кострикиным (РЖМат, 1957, 2105).

В работе доказывается, что кольцо Ли, сопоставимое периодической группе показателя p, удовлетворяет ($p-1$)-му условию Энгеля и может рассматриваться как алгебра над полем характеристики p. Формулировка этого предложения и детальное его доказательство для $p=5$ содержится в работе И. Н. Санова (Изв. АН СССР, сер. матем., 1952, 16, 23—54). В. Н. Латышев

9558. **Конечные группы преобразований Кремоны на плоскости и изоморфные им группы соответствующих матриц. Мейнхардт** (Endliche Gruppen von Cremona-Transformationen der Ebene und die isomorphen Gruppen der zugeordneten Matrizen. Meinhardt Dietrich), Wiss. Z. Martin-Luther-Univ. Halle-Wittenberg. Math.-naturwiss. Reihe, 1957, 6, № 4, 689—695 (нем.)

Излагаются методы построения квадратных матриц, соответствующих преобразованиям Кремоны на плоскости. Элементы этих матриц являются целыми числами; определители равны ± 1. Для случая конечной группы преобразований Кремоны на плоскости дан такой метод построения соответствующих матриц, при применении которого последовательному выполнению двух преобразований, входящих в эту группу, будет соответствовать произведение матриц, соответствующих этим преобразованиям. Таким образом каждой конечной группе преобразований Кремоны соответствует изоморфная группа линейных преобразований. Приведены комплексная и действительная запись этой последней группы. В. К. Туркин

9559. **Неразложимые молекулярные представления конечных групп с циклической силовской p-подгруппой. Каш, Кнезер, Купиш** (Unzerlegbare modulare Darstellungen endlicher Gruppen mit zyklischer p-Sylow-Gruppe. Kasch F., Kneser M., Kupisch H.), Arch. Math., 1957, 8, № 5, 320—321 (нем.)

Пусть G — группа конечного порядка g с циклической силовской p-подгруппой. Доказывается, что число g является верхней границей числа неэквивалентных неразложимых представлений группы G над полем характеристики p; причем указываются группы, для которых эта граница достигается (менее точное значение для этой верхней границы было получено Хигманом (РЖМат, 1955, 4251). В. К. Туркин

9560. **Существенное подобие. Один контрпример. Голдман** (Essential similarity: a counterexample. Goldman A. J.), Amer. Math. Monthly, 1958, 65, № 1, 30—31 (англ.)

Группы $G(\circ)$ и $G(\cdot)$ называются существенно подобными, если существует такой элемент $C \in G$, что $x \circ y = x \cdot c \cdot y$ для любых $x, y \in G$.

Эллис (РЖМат, 1955, 4905) высказал предположение, что мультипликативные группы тел $G(t, \circ)$ и $G(+, \cdot)$ всегда существенно подобны. Автором строится противоречащий пример.

Примечание референта. Противоречащий пример был построен В. М. Курочкиным (РЖМат, 1955, 4905). В. Д. Белоусов

9561. **О группах с конечными классами сопряженных элементов. Черников С. Н.**, Докл. АН СССР, 1957, 114, № 6, 1177—1179

Дается новое определение класса слойно-конечных групп и устанавливаются некоторые свойства групп с конечными классами сопряженных элементов, связанные с существованием у них абелевых подгрупп с централизаторами конечного индекса (группа называется слойно-конечной, если она содержит конечное число элементов любого данного порядка). Показано, что класс локально нормальных групп со специальными силовскими подгруппами (т. е. с силовскими подгруппами, удовлетворяющими условию минимальности для абелевых подгрупп) совпадает с классом слойно-конечных групп. Также показано, что группа, централизатор каждой абелевой подгруппы которой имеет конечный индекс, является конечным расширением своего центра (обратное утверждение очевидно). Доказаны еще две теоремы о периодических группах, содержащих абелевы подгруппы с централизаторами конечного индекса. П. А. Гольберг

9562. **Группы с конечными классами сопряженных абелевых подгрупп. Еремин И. И.**, Докл. АН СССР, 1958, 118, № 2, 223—224

Нёйман (РЖМат, 1956, 5116) доказал, что группа, в которой для каждой подгруппы существует лишь конечное число ей сопряженных подгрупп, является конечным расширением своего центра. В реферируемой работе показано, что этот результат верен и в том случае, если для каждой абелевой подгруппы существует конечное число сопряженных подгрупп.

П. А. Гольберг

9563. **О некоторых классах бесконечных групп. Плоткин Б. И.**, Успехи матем. наук, 1958, 13, № 1, 189—192

Работа является продолжением ряда ранее опубликованных работ автора (РЖМат, 1956, 8614; 1957, 2076). Группа $\mathfrak{G}$ называется $\overline{W}$-группой, если она является расширением радикальной группы с помощью F-полупростой группы. Доказано, что группа $\mathfrak{G}$ будет $\overline{W}$-группой тогда и только тогда, когда она обладает возрастающим нормальным рядом с локально нильпотентными или F-полупростыми факторами. Определяется еще один класс групп и для него доказывается аналогичная теорема.

Показано, что в произвольной группе подгруппа, порожденная всеми инвариантными $\overline{W}$-подгруппами, снова является $\overline{W}$-подгруппой. П. А. Гольберг

9564. **Алгебраические элементы и ниль-элементы в группах. Плоткин Б. И.**, Успехи матем. наук, 1958, 13, № 1, 211—212

9565. **О суммах упорядоченных групп. Шик** (Über Summen einfach geordneter Gruppen. Šik František), Чехосл. матем. ж., 1958, 8, № 1, 22—53 (нем.; рез. русск.)

Обозначим через $\sum G_\nu$, соответственно через $\widetilde{\sum} G_\nu$, прямую, соответственно полную прямую, кардинальную сумму системы $\{G_\nu\}$ упорядоченных групп G_ν. Групповая операция записывается аддитивно. Частично упорядоченная подгруппа G группы $\widetilde{\sum} G_\nu$ называется полупрямой суммой системы $\{G_\nu\}$ упорядоченных групп, если проекция группы G в G_ν равна G_ν для всякого ν. Полупрямая сумма G системы $\{G_\nu\}$ называется вполне полупрямой, если $G \supset \overline{G}_\nu$ для всякого ν, $\overline{G}_\nu$ есть подгруппа группы $\widetilde{\sum} G_\nu$, состоящая из всех элементов вида $(\ldots, x_\nu, \ldots)$, где на месте с индексом ν стоит произвольный элемент группы G_ν, а все прочие места занимают нули. В работе исследуются необходимые и достаточные условия для того, чтобы структурно упо-

рядоченная группа (l-группа) была той или иной суммой упорядоченных групп G_ν.

Два элемента x, y l-группы G называется дизъюнктными, если $|x| \wedge |y| = 0$. В том случае, когда каждый элемент подмножества $A \subset G$ дизъюнктен всякому элементу подмножества $B \subset G$, подмножества A и B называются дизъюнктными. Дизъюнктность элементов x и y, соответственно множеств A и B, обозначается $x\delta y$, соответственно $A\delta B$. Подмножество $A \subset G$ называется компонентой, если существует подмножество $B \subset G$ такое, что A является множеством всех элементов из G, дизъюнктных с каждым элементом множества B. В более ранней работе (РЖМат, 1957, 159) автор показал, что система всех компонент в l-группе G образует полную алгебру Буля, в которой нижняя грань $\bigwedge K_\nu$ системы компонент $\{K_\nu\}$ есть пересечение всех K_ν, а G является наибольшим элементом этой алгебры. Система компонент $\{K_\nu\}$ называется полной в G, если ее верхняя грань в структуре (т. е. в алгебре Буля) равна G. Элемент x l-группы G называется острием элемента a, $0 < a \in G$, если x — минимальный элемент в G со свойством $a \geqslant x > 0$, $(a - x)\,\delta x$. Элемент $x \in G$ называется острием в группе G, если он является острием какого-либо элемента этой группы. Два l-идеала I, K l-группы G называются взаимно дополнительными прямыми факторами, если $I \cap K = (0)$, $I + K = G$. Каждый l-идеал, который является одним из взаимно дополнительных прямых факторов в G, называется прямым фактором в G. l-подгруппа H l-группы G называется полувыпуклой в G, если проекция группы H в произвольный прямой фактор в G является частью H.

Отметим следующие условия на l-группах: 1) G есть вполне полупрямая сумма системы упорядоченных групп; 2) в G имеют место такие свойства: а) каждый элемент $a \in G$, $a > 0$, имеет острие; б) если $x \geqslant y > 0$ и если x — острие, то и y — острие; в) если y — острие, $a \geqslant y$, то над y существует острие элемента a; 3) в G существует система попарно дизъюнктных упорядоченных прямых факторов, полная в G; 4) каждая ненулевая компонента содержит минимальный прямой фактор в G; 5) G — полная прямая сумма системы упорядоченных групп в G; 6) для любого бесконечного множества $\{x_\rho\}$ попарно дизъюнктных положительных элементов из G существует в G элемент $\bigvee x_\rho$; 7) для каждого непустого множества попарно дизъюнктных острий, в G существует элемент, для которого это множество является системой всех острий; 8) G — прямая сумма системы упорядоченных групп; 9) объединение любой цепи компонент в G является прямым фактором в G; 10) сумма любой системы компонент в G является компонентой в G; 11) структура компонент в G является замкнутой подструктурой в структуре l-идеалов в G; 12) ни для какого бесконечного множества $\{x_\rho\}$ попарно дизъюнктных положительных элементов из G не существует в G элемента $\bigvee x_\rho$; 13) каждый элемент, больший нуля, из G обладает конечным количеством острий.

В работе показано, что на l-группе G условия 1), 2), 3) и 4) эквивалентны между собой, условия 5), 1) совместно с 6), 1) совместно с 7 образуют вторую совокупность эквивалентных друг другу условий и, наконец, условия 8), 9), 10), 11), 1) совместно с 12) и 1) совместно с 13 составляют третью группу эквивалентных между собой условий.

Если l-группа G есть вполне полупрямая сумма системы упорядоченных групп $\{G_\nu\}$, то следующие условия на G эквивалентны: (1) каждая компонента в G является прямым фактором в G; (2) G полувыпукла в $\sum G_\nu$; (3) структура прямых факторов в G является замкнутой подструктурой в структуре компонент в G.

Показано также, что l-группа является упорядоченной в том и только в том случае, если каждый ее элемент, больший нуля, есть острие.

Приведен ряд примеров l-групп, которые подтверждают или опровергают возможность соединения рассматриваемых свойств на одной и той же группе.

А. А. Виноградов

9566. Анализ подобия групповых соотношений. Шик (Ähnlichkeitsanalyse von Gruppenrelationen. Schiek Helmut), Acta math., 1956, 96, № 3-4, 157—252 (нем.)

Рассматривается свободное произведение F свободных абелевых групп B_α, каждая из которых задана системой образующих γ_α и некоторой системой соотношений коммутирования. Слово S называется сектором слова W, состоящего из букв алфавита γ, полученного объединением всех систем γ_α, если $W = XSY$ (знак $=$ означает графическое равенство), причем слово S состоит из букв одной системы γ_α, а последняя буква слова X (если X не пусто) и первая буква слова Y (если Y не пусто) принадлежат системам γ_β, отличным от γ_α. Число секторов слова W обозначается через $\varkappa(W)$. Вводятся обозначения: $W_1 \sim W_2$, если слово W_2 получается из слова W_1 с помощью: 1) вставок и сокращений пар вида aa^{-1} и $a^{-1}a$, 2) перестановки букв внутри секторов; $W_1 \approx W_2$, если W_2 получается из W_1 с помощью лишь операции 2); $W_1 \simeq W_2$, если $\varkappa(W_1) = \varkappa(W_2) = k + 1$ и если для i-го сектора S_i слова W_1 и i-го сектора T_i слова W_2 имеет место: а) $S_i \approx T_i$, если $1 \leqslant i \leqslant k$; б) S_{k+1} и T_{k+1} состоят из букв одной и той же системы γ_α. Слово W называется сокращенным, если не существует слова $W' \sim W$, состоящего из меньшего числа букв, чем W. Далее рассматривается группа, получаемая из F добавлением некоторых новых соотношений вида $R = 1$ (1 означает пустое слово). Левые части этих соотношений («определяющие слова») предполагаются сокращенными. Множество $\mathfrak{R}$ определяющих слов предполагается замкнутым относительно формального обращения, циклической перестановки букв и перестановки букв внутри секторов. Предполагается далее, что существует (натуральное) число $j \geqslant 2$, удовлетворяющее аксиомам:

Аксиома Z: $\varkappa(R) > 4j - 2$ для всех $R \in \mathfrak{R}$.

Аксиома B: Если $R_1, R_2 \in \mathfrak{R}$, $R_1 = S_1 \ldots S_n$, $R_2 = T_1 \ldots T_n$ (S_i и T_i означают соответственно секторы слов R_1 и R_2), и если $S_1 \ldots S_j \simeq T_1 \ldots T_j$, то $R_1 \approx R_2$.

Аксиома D_1: Если $R_1, R_2, R_3 \in \mathfrak{R}$, причем $R_1 = XYR_1'$, $R_2 = XY'R_2'$, $R_3 = ZR_3'$, $Z \simeq Y'^{-1}Y$, $X \neq 1$, $Y \neq 1$, $Y' \neq 1$, и если выполняется хотя бы одно из неравенств: $\varkappa(X, Y) \geqslant j$, $\varkappa(X, Y') \geqslant j$, то справедливо хотя бы одно из утверждений: а) $R_1 \approx R_2$; б) $\varkappa(XY) = 1$ (откуда по аксиоме B: $Y'^{-1}X^{-1}R_2'^{-1} \approx ZR_3'$); в) $\varkappa(XY') = 1$ (откуда при $Z \approx Y'^{-1}Y : Y^{-1}Y'\,R_3'^{-1} \approx Y^{-1}X^{-1}R_1'^{-1}$).

Аксиома D_2. Если $R_1, R_2, R_3, R_4 \in \mathfrak{R}$, причем $R_1 \approx XY\,R_1'$, $R_2 \approx XY'\,R_2'$, $R_3 \approx X'ZR_3'$, $R_4 \approx X'Y'\,R_4'$, $Z \approx Y$, $X \neq 1$, $X' \neq 1$, $Y \neq 1$, $Y' \neq 1$, $\varkappa(XY) \geqslant j$, $\varkappa(XY') \geqslant j$, то справедливо хотя бы одно из утверждений: а) последние секторы X и X' состоят из букв одной и той же системы γ_α, б) то же для первых секторов Y и Y'.

Теорема A. Если сокращенное слово W равно 1 в группе, удовлетворяющей аксиомам Z, B, D_1, D_2 и

$W \neq 1$, то W содержит подслово K, для которого существует $R \in \mathfrak{R}$, такое, что $R = XKY$, где $\varkappa(X) < j$, $\varkappa(Y) < j$.

При доказательстве используется возможность представить любое слово, равное 1 в группе, в виде $V_1 R_1 V_1^{-1} \ldots V_n R_n V_n^{-1}$, где слова $V_i R_i V_i^{-1}$ сокращенные и никакое V_i не содержит подслова C, для которого при некотором $R \in \mathfrak{R}$ $R = P \subset Q$, $\varkappa(C) > \varkappa(P^{-1}Q^{-1}) + 2$.

Если дополнительно потребовать, чтобы γ и $\mathfrak{R}$ были заданы явно, и чтобы для любого слова C из букв γ можно было (финитным образом) решить, существует ли $R \in \mathfrak{R}$, где $R = XCY$, $\varkappa(C) > \varkappa(X^{-1}Y^{-1}) + 2$, и (в случае положительного решения) одно из таких R найти конечным процессом, то теорема А позволяет решить в данной группе проблему тождества следующим алгоритмом: слово W сокращается полностью до W', в W' ищется такое подслово K, что для некоторого $R \in \mathfrak{R}$ $R = XKY$, $\varkappa(K) > \varkappa(X^{-1}Y^{-1}) + 2$; K заменяется на $X^{-1}Y^{-1}$, полученное слово снова сокращается, и т. д. Этот процесс приводит к 1 тогда и только тогда, когда W равно 1 в группе.

В конце работы приведен пример, показывающий, что при отбрасывании аксиомы D_1 теорема А становится неверной. Отмечено известное родство исследований автора с работами В. А. Тартаковского (Матем. сб., 1949, 25(67), 3—50, 251—274; 1952, 30(72), 39—52; Изв. АН СССР, Сер. матем., 1949, 13, 483—494) и указано, что хотя класс групп, удовлетворяющих аксиомам автора, и рассматривавшийся В. А. Тартаковским класс групп с k-сократимым базисом ($k > 6$) имеют непустое пересечение, ни один из этих классов не содержится в другом. Приведен пример группы с 5-сократимым базисом, удовлетворяющей аксиомам автора.

Примеры групп с k-сократимым базисом ($k > 6$), не удовлетворяющих аксиомам автора, не приводятся (однако построение таких примеров не представляет трудностей — *реф.*). А. В. Гладкий

9567. О сложных коммутаторах элементов групп. Кикодзе Э. Б., Успехи матем. наук, 1957, 12, № 4, 301—303

Доказывается, что если некоторый сложный коммутатор длины n (с фиксированной расстановкой скобок) для элементов данной группы G тождественно обращается в единицу, то группа G разрешима. Кроме того, доказывается, что если существует такое натуральное число n, что сложные коммутаторы длины n, образованные из элементов данной группы G, не зависят от распределения в них скобок (а зависят лишь от элементов группы), то каждый из них равен единице, а следовательно, группа G нильпотентна.

А. И. Ширшов

9568. Обнаружение групповой инвариантности или полной симметрии булевой функции. Мак-Класки (Detection of group invariance or total symmetry of a Boolean function. McCluskey E. J., Jr), Bell System. Techn. J., 1956, 35, № 6, 1445—1453 (англ.)

Излагается метод, позволяющий определить наличие любой групповой инвариантности у булевой функции, т. е. наличие таких перестановок или инверсирований переменных, которые оставляют функцию неизменной. Этот метод распространяется на обнаружение функций, которые полностью симметричны.

Резюме автора

9569. Теоретико-групповая функция Мёбиуса-Дельсарта и теория линейных представлений конечных групп. Жмудь Э. М., Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1957, № 1, 133—141

Дельсарт (Delsarte S., Ann. Math., 1948, 49, 600—609) понятие о функции Мёбиуса перенес в теорию конечных абелевых групп. Автор обобщает понятие о функции Мёбиуса на случай произвольной конечной группы.

Пусть G — конечная группа с областью операторов Ω, порождающей все внутренние автоморфизмы группы G; N_G^0 — множество всех подгрупп группы G, допустимых относительно области Ω; $N_G^{(i+1)}$ — множество всех фактор-групп $H_1^{(i)} / H_2^{(i)}$, где $H_1^{(i)} \in N_G^{(i+1)}$, $H_2^{(i)} \in N_G^{(i+1)}$; $E_G = \bigcup_{i=1}^{\infty} N_G^{(i)}$.

Пусть $f(x)$ — функция, определенная на множестве E_G и удовлетворяющая условиям: 1) область ее значений содержится в заданном поле P нулевой характеристики; 2) если x, y содержится в E_G и операторно изоморфны, то $f(x) = f(y)$.

Множество всех функций $f(x)$ обозначается через D_G. Это множество является алгеброй над полем P относительно операций сложения и умножения на элементы P, определенных обычным образом, и операции умножения, определенной формулой $(f * g)(x) = \sum_{d/x} f(d)\, g\left(\frac{x}{d}\right)$, где d пробегает множество всех допустимых подгрупп группы x.

Единицей алгебры D_g является функция, равная 1 для групп, операторно изоморфных единичному элементу группы G, и 0 для всех других групп из E_G. Некоторые из элементов алгебры имеют обратные; в частности, функция 1, равная единице для любого x из E_G. Функция, обратная функции 1, названа автором функцией Мёбиуса — Дельсарта группы G и обозначена через $\mu_D(x)$. Имеют место формулы обращения Дедекинда—Дельсарта:

$$1)\ g(x) = \sum_{d/x} f(d),\ f(x) = \sum_{d/x} g(d)\, \mu_D\left(\frac{x}{d}\right);$$

$$2)\ h(x) = \sum_{d/x} f\left(\frac{x}{d}\right),\ f(x) = \sum_{d/x} h\left(\frac{x}{d}\right) \mu_D(d)$$

(d пробегает все допустимые подгруппы группы x).

Пусть $[y]$ означает порядок группы y. Автор называет функциями Эйлера — Дельсарта k-го порядка и, соответственно, I и II рода группы G выражения:

$$\varphi_I^{(k)}(x) = \sum_{d/x} \left[\frac{x}{d}\right]^k \mu_D(d),$$

$$\varphi_{II}^{(k)}(x) = \sum_{d/x} [d]^k\, \mu_D\left(\frac{x}{d}\right)$$

(d пробегает те же значения, что и ранее).

Выведен ряд теорем, устанавливающих связь между свойствами группы и значениями ее функций Мёбиуса — Дельсарта и Эйлера—Дельсарта. В. К. Туркин

9570. Метод групповых колец для групп с конечным числом образующих. Чжэнь Го-цзай (A group ring method for finitely generated groups. Chen Kuo-Tsai), Trans. Amer. Math. Soc., 1954, 76, № 2, 275—287 (англ.)

Пара $\{F / R\}$, где F — свободная группа с конечным числом образующих, а R — нормальный делитель группы F, называется представлением (presentation). Гомоморфизмом представлений $\{F / R\}$ и $\{F' / R'\}$ называется такой гомоморфизм $\sigma : F \to F'$, при котором $\sigma(R) \subseteq R'$. Если при этом σ индуцирует изоморфное отображение фактор-группы F / R на фактор-группу F' / R', то σ называется изоморфизмом.

Гомоморфизмы $\sigma:\{F/R\}\to\{F'/R'\}$ и $\tau:\{F/R\}\to\{F'/R'\}$ называются эквивалентными, если они индуцируют один и тот же гомоморфизм фактор-группы F/R в F'/R' (в этом случае условимся употреблять обозначение $\sigma\sim\tau$).

Кольцо (или группа) $V(F,R)$ (V — функция представления $\{F/R\}$) называется алгебраическим инвариантом, если: 1) каждый гомоморфизм представлений $\sigma:\{F/R\}\to\{F'/R'\}$ однозначно определяет гомоморфизм $\sigma^*:V(F,R)\to V(F'/R')$; 2) $\sigma^*=\tau^*$ при $\sigma\sim\tau$; 3) тождественному изоморфизму $\sigma:\{F/R\}\to\{F/R\}$ ($\sigma(u)=u$ и $u\in F$) соответствует тождественный изоморфизм $\sigma^*:V(F,R)\to V(F,R)$; 4) если $\sigma_1:\{F/R\}\to\{F_1/R_1\}$ и $\sigma_2:\{F_1/R_1\}\to\{F_2/R_2\}$, то $(\sigma_2\sigma_1)^*=\sigma_2^*\sigma_1^*$.

Доказывается, что изоморфным фактор-группам F/R и F'/R' соответствуют изоморфные алгебраические инварианты $v(F,R)$ и $v(F',R')$. Фактор-группа M/N является алгебраическим инвариантом, если $M(F,R)$ — подгруппа группы F, $N(F,R)$ — нормальный делитель группы M и $\sigma M(F,R)\subseteq M(F',R')$, $\sigma N(F,R)\subseteq N(F',R')$ для каждого гомоморфизма представлений $\sigma:\{F/R\}\to\{F'/R'\}$. Вторым типом алгебраических инвариантов являются фактор-кольца $\mathfrak{M}/\mathfrak{R}$, где $\mathfrak{M}(F,R)$ — подкольцо группового кольца IF группы F над кольцом с единицей I, а $\mathfrak{R}(F,R)$ — идеал кольца $\mathfrak{M}$, и при этом гомоморфизм $\sigma:\{F/R\}\to\{F'/R'\}$ представлений индуцирует такой гомоморфизм IF на IF', при котором $\sigma\mathfrak{M}(F,R)\subseteq\mathfrak{M}[F',R')$, $\sigma\mathfrak{R}(F,R)\subseteq\mathfrak{R}(F',R')$.

Пусть $\overline{(N-1)_M}$ — двусторонний идеал группового кольца IM группы M над кольцом I, порожденный всеми элементами вида $(a-1)$, где $a\in N$ (N — нормальный делитель группы M). Каждому инварианту M/N типа фактор-группы соответствует инвариант $IM/\overline{(N-1)_M}$ типа фактор-кольца.

Посредством гомоморфизма ψ группового кольца IF в некоммутативное кольцо формальных степенных рядов $\Delta(x_1,\ldots,x_n,\ I)$ от n переменных над кольцом I из инварианта $\mathfrak{M}/\mathfrak{R}$ типа фактор-кольца можно получить новый алгебраический инвариант $\Phi(\mathfrak{M})/\Phi(\mathfrak{R})$. Пусть B — фиксированная группа. B-представлением называется тройка $\{F/R,\alpha\}$, где F — свободная группа с конечным числом образующих, R — нормальный делитель группы F, а α — гомоморфизм F в B, ядро которого содержит R.

Используя результаты Фокса о дифференцировании в кольце IF (РЖМат, 1956, 1666), автор получает с помощью теории B-представлений производные инварианты из инвариантов типа фактор-кольца.

В частности, рассмотрены инварианты, сходные с полиномами Александера (Alexander, Trans. Amer. Math. Soc. 1928, 30, 275—306). С. Д. Берман

9571. О некоторых простых группах, определенных Шевалле. Р и (On some simple groups defined by C. Chevalley. R e e R i m h a k), Phys. Rev., 1957, 106, № 1, 392—400 (англ.)

По заданным полупростой комплексной алгебре Ли $\mathfrak{G}$ и полю K строится группа $\mathfrak{G}(\mathfrak{G},K)$, введенная в рассмотрение Шевалле (РЖМат, 1958, 6508). Доказывается, что $\mathfrak{G}(A_n,K)$ и $\mathfrak{G}(C_n,K)$ изоморфны фактор-группам $SL(n+1,K)$ и $Sp(2n,K)$ по их центрам. Далее, $\mathfrak{G}(D_n,K)$ ($n\geqslant 3$) и $\mathfrak{G}(B_n,K)$ (если характеристика поля отлична от 2) изоморфны коммутантам фактор-групп групп $O(2n,K)$ и $O(2n+1,K)$ по их центрам. Если K — поле характеристики 2, то $\mathfrak{G}(B_n,K)\subset Sp(2n,K)$, а если при этом K совершенно, то эти группы изоморфны. Группа $\mathfrak{G}(G_2,K)$ отождествляется с некоторой простой подгруппой группы $O(7,K)$, рассматривавшейся Диксоном. А. Л. Онищик

9572. Линейные представления унимодулярной группы. К а ц (Лінійні представлення унімодулярної групи. К а ц Г. І.), Наук. зап. Житомирськ. держ. пед. ін-т. Сер. фіз.-матем., 1957, 3, 7—61 (укр.)

Рассматриваются конечномерные линейные представления унимодулярной группы G. Сначала (в § 1) выводится формула, выражающая матричные элементы операторов представления группы G через инфинитезимальные опсраторы этого представления. Далее (в § 2) дается новый вывод результатов И. М. Гельфанда и Цетлина (Докл. АН СССР, 1950, 71, № 5), именно, в пространствах неприводимых конечномерных представлений группы G определенным образом строятся базисы и находятся в явном виде матрицы инфинитезимальных операторов представлений в этих базисах. Эти результаты применяются в § 3 к вычислению размерностей и характеров неприводимых представлений по их весам и к разложению кронекеровского произведения неприводимых представлений группы G на неприводимые представления. Так, для размерности N представления (картановского) веса $p_1, p_2, \ldots, p_n$ ($p_1\geqslant p_2\geqslant\ldots\geqslant p_n$) получается формула

$$N=\frac{\Pi_{1\leqslant\nu<\mu\leqslant n}(l_\nu-l_\mu)}{\Pi_{1\leqslant\nu<\mu\leqslant n}(\mu-n)},\text{ где } l_\nu=p_\mu+n-\mu,$$

n — порядок матриц группы G, а для тензорного произведения $D\times D'$ — разложение

$$D\times D'=\sum_T C^T D_T,$$

где C^T определяется из соотношения

$$P_\chi(\delta_1,\ldots,\delta_n)\chi'(l_1,\ldots,l_n)=\sum_T C^T\chi(t_1,\ldots,t_n),$$

в котором χ^1 — характер D', $l_\chi(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)$ — характер D — рассматриваемый как функция собственных значений группового элемента, а δ_i — операторы, определенные формулами $\delta_i\chi(l_1\ldots l_i\ldots l_n)=\chi(l_1\ldots l_{i+1}\ldots\ldots l_n)$. М. А. Наймарк

9573. Компактные группы Ли в целом. Д ы н к и н Е. Б., О н и щ и к А. Л., Успехи матем. наук, 1955, 10, № 4, 3—74

Работа состоит из двух глав. В первой дается строгое и сжатое изложение классической теории классификации компактных групп Ли в целом: максимальные торы, диаграмма, характеристическая решетка и ее свойства, накрывающее пространство и порядок связности, вычисление фундаментальных групп и центров. Использование идеи Е. Б. Дынкина задания простой алгебры Ли схемой ее простых корней и введение расширенной системы простых корней (расширение присоединением наименьшего корня) позволяет дать понятию порядка связности присоединенной группы прозрачную геометрическую интерпретацию.

Во второй главе решаются две тесно связанные друг с другом задачи: А) Дана подалгебра $\widetilde{L}$ алгебры Ли L полупростой компактной группы Ли G; требуется указать строение в целом соответствующей ей связной подгруппы $\widetilde{G}$ группы G. Б) Даны полупростые компактные группы Ли $\widetilde{G}, G$ (причем $\widetilde{G}$ односвязна) и изоморфизм $\widetilde{L}\to L$ соответствующих алгебр Ли. Ему отвечает локально изоморфное отображение $\widetilde{G}\to G$. Требуется вычислить ядро последнего. Задача эта сводится к случаю, когда группа G односвязна, а группа $\widetilde{G}$ проста; для последнего случая строятся явные формулы в терминах теории представлений алгебр Ли.

Существенные особенности и трудности представляет при этом случай, когда $\widetilde{G}$ — спинорная группа. В заключение полученные результаты применяются к классификации в целом однородных пространств, группа движений которых компактна и полупроста.

Довольно обширное введение, систематизирующее подготовительный материал, позволяет читать статью почти без привлечения дополнительной литературы.

В. В. Морозов

9574. **Ограниченные группы преобразований. Смит** (Bounded groups of transformations. Smith R. C. T.), Proc. Amer. Math. Soc., 1957, 8, № 5, 831—833 (англ.)

Дается некоторое дополнение к результату Бохнера и Мартина (Bochner S., Martin N. T., Several complex variables, Princeton, 1948, Theorem 8).

9575. **Проблема ниток бус. Лич** (A problem on strings of beads. Leech John), Math. Gaz., 1957, 41, № 338, 277—278 (англ.)

Рассматриваются нитки бус — последовательности, элементами которых являются шары трех цветов. Доказано существование бесконечных ниток бус, в которых никакие две соседние подпоследовательности не совпадают. Автор отмечает, что его доказательство отлично от доказательства Морзе и Ходлунда — единственного из ранее опубликованных, которое ему известно (см. примечание в РЖМат, 1956, 7160).

Л. М. Глускин

9576. **Группировки по триадам. Обобщенная задача Киркмена. Муэтт** (Groupements en triades. Problème de Kirkman généralisé. Mouette Léon), Mathesis, 1956, 65, № 1-3, 46—52 (франц.)

Обсуждаются методы решения следующей задачи. Дано $N = 6n + 3$ различных элементов, которые можно расположить по тройкам, или триадам. Требуется образовать $3n + 1$ множеств, или правильных подгрупп, состоящих каждое из $2n + 1$ триад, и при этом должны удовлетворяться два условия: 1) каждый из N элементов встречается один и только один раз в каждой из $3n + 1$ подгрупп; 2) два любых элемента встречаются вместе в одной и только одной из $(3n + 1)$ $(2n + 1)$ триад группировки.

Г. Н. Поваров

9577. **Об одном обобщении понятия группы. Тверморс** (Om en generalisation af gruppebegrebet. Tvermoes H.), 12te Skand. matematikerkongr. Lund, 1953. Lund, 1954, 310—311 (дат.)

9578. **О мономиальном представлении полугрупп. Шютценбергер** (Sur la représentation monomiale des demi-groupes. Schützenberger Marcel Paul), C. r. Acad. sci., 1958, 246, № 6, 865—867 (франц.)

Пусть A и B — переместимые между собой полугруппы преобразований множества Σ^*. Между элементами множества Σ^* вводится бинарное отношение $T_A : \sigma T_A \sigma'$ $(\sigma, \sigma' \in \Sigma^*)$ тогда и только тогда, когда существуют элементы $a, a' \in A$, для которых $\sigma = a\sigma'$, $\sigma' = a'\sigma$. Аналогично вводится бинарное отношение T_B. Отношение $\mathfrak{Q}$ определяется как произведение отношений T_A и T_B (см., например, РЖМат, 1956, 8580).

Пусть Σ — произвольный $\mathfrak{Q}$-класс. Σ является объединением T_B-классов Σ^i и T_A-классов Σ_λ. В каждом множестве $\Sigma^i \cap \Sigma_\lambda$ выберем произвольно по элементу σ^i_λ. Найдутся такие элементы $a^i_1, a^1_i \in A$, что $a^i_1 \sigma^1_1 = \sigma^i_1$, $a^1_i \sigma^i_1 = \sigma^1_1$.

Обозначим через A^i максимальную подполугруппу полугруппы A, отображающую множество Σ^i в себя; через φ_i — гомоморфизм A^i, состоящий в отождествлении всех элементов $a \in A^i$, которые индуцируют одинаковые отображения множества Σ^i. Все полугруппы $\overline{A}^i = \varphi_i A^i$ изоморфны между собой и являются полугруппами с левым сокращением. Каждому элементу $a \in A$ ставится в соответствие $I \times I$ - матрица $M(a)$ с элементами $m_{ik}(a)$ из полугруппы $A^* = \overline{A}' \cup 0$, где 0 — внешне присоединенный нуль, I — множество всех индексов i. Именно: $m_{ik}(a) = \varphi_1(a^i_1 a a^1_k)$, если $a\sigma^i_1 \in \Sigma^k$, и $m_{ik}(a) = 0$, если $a\sigma^i_1 \notin \Sigma^k$. Оказывается, что $M(aa') = M(a)M(a')$. Рассматриваются некоторые свойства указанных представлений, в частности, их связь с представлениями Клиффорда (РЖМат, 1957, 2924).

Л. М. Глускин

9579. **Заметка об изоморфизме топологических фактороидов. Шулка** (Poznámka o izomorfizme topologických faktoroidov. Šulka Robert), Mat.-fyz. časop., 1956, 6, № 3, 137—142 (словацк.; рез. русск.)

Автор развивает идеи более ранней работы (РЖМат, 1958, 152) и пользуется введенными там понятиями. Разбиение $[G]_2$ на группоиде G называется закрытием разбиения $[G]_1$ на группоиде G, порожденным разбиением $\{G\}$ на $[G]_1$, если для любого класса $X_2 \in [G]_2$ существует такой класс $\mathfrak{X} \in \{G\}$, что $X_2 = \bigcup_{X_1 \in \mathfrak{X}} X_1$. Результатом исследований является следующая теорема:

Пусть G — топологический группоид, $[G]_1$ — топологический фактороид, $[G]_2$ есть разбиение на G, являющееся одновременно закрытием топологического фактороида $[G]_1$ порожденным разбиением $\{G\}$ на $[G]_1$. Тогда справедливо следующее: $[G]_2$ и $\{G\}$ являются топологическими фактороидами лишь в том случае, когда по крайней мере один из них является топологическим фактороидом и они, следовательно, взаимно изоморфны.

L. Misík

9580. **Ретракции в полугруппах. Уоллес** (Retractions in semigroups. Wallace A. D.), Pacif. J. Math., 1957, 7, № 3, 1513—1517 (англ.)

Пусть S — бикомпактный моб, E — множество всех его идемпотентов, R_e, L_e и H_e — соответственно R-класс, L-класс и H-класс, порожденные любым элементом $e \in E$ (РЖМат, 1957, 2924); $H = \bigcup_{e \in E} H_e$; $Z_e = H_e \times (R_e \cap E) \times (L_e \cap E)$; M_e — множество всех $x \in S$, для которых $ex \in H$ и $xe \in H$; K_e — множество всех произведений lhr, где $l \in L_e \cap E$, $h \in H_e$, $r \in R_e \cap E$. Пусть, далее, x — любой элемент из S, $\eta(x)$ — единица группы H_e, в которой содержится x, а $\theta(x) = x^{-1}$ — элемент, обратный к x в H_e. Доказывается, что множество H замкнуто, отображение $\eta : S \to E$ является ретракцией, а отображение $\theta : H \to H$ — гомеоморфизмом. Множество K_e топологически изоморфно Z_e и является ретрактом в M_e. Минимальный идеал K полугруппы S топологически изоморфен $eSe \times (Se \cap E) \times (eS \cap E)$, где $e \in E \cap K$; K является ретрактом S.

Л. М. Глускин

9581. **О полугруппах, всякая подполугруппа которых имеет левую единицу. Колибиарова** (O pologrupách ktorých každá čiastočná pologrupa má lávu jednotku. Kolibiarová Blanka), Mat.-fyz. časop., 1957, 7, № 3, 177—182 (словацк.; рез. русск., англ.)

Полугруппа S по определению удовлетворяет условию L, если всякая ее подполугруппа обладает левой единицей. Доказывается, что полугруппа S тогда и только тогда удовлетворяет условию L, когда 1) S является объединением своих попарно непересекающихся периодических подгрупп G_i и 2) множество всех идемпотен-

тов $e_j \in S$ является подполугруппой полугруппы S и удовлетворяет условию L (РЖМат, 1953, 116).

Пусть полугруппа S удовлетворяет условию L. Всякий правый идеал полугруппы S является ее двусторонним идеалом. Если существует такой элемент $x \in S$, что $e_i = e_k x$, где e_j — единица группы G_j, то отображение $\varphi g = g e_i$ является гомоморфизмом группы G_k в группу G_i. Л. М. Глускин

9582. Заметка о структуре мультипликативной полугруппы классов вычетов. Паризек (Poznámka o štructúre multiplikatívnej pologrupy zvyškových tried. Parízek Bohumír), Mat.-fyz. časop., 1957, 7, № 3, 183—185 (словацк.; рез. русск., англ.)

Для того чтобы мультипликативная полугруппа классов вычетов по модулю m была объединением своих попарно непересекающихся подгрупп, необходимо и достаточно, чтобы m имело вид $m = p_1 p_2 \ldots p_k$, где p_i — различные простые числа. Л. М. Глускин

9583. Полугруппы, удовлетворяющие условиям минимальности. Манн (Semigroups satisfying minimal conditions. Munn W. D.), Proc. Glasgow Math. Assoc., 1957, 3, № 3, 145—152 (англ.)

Обозначим через M_l, M_r и M_f условия минимальности соответственно для левых, правых и двусторонних главных идеалов полугруппы S; через M_l^* и M_r^* — условия минимальности для ее L-классов и R-классов (РЖМат, 1957, 2924). Пусть F — некоторый F-класс полугруппы S (РЖМат, 1955, 1672), I — порождаемый им главный идеал. Множество $J = I \setminus F$ является идеалом полугруппы I. Если фактор-полугруппа $I - J$ проста или является нуль-полугруппой (РЖМат, 1956, 1125), то класс F называется простым; если $I - J$ вполне проста, то F называется вполне простым. Полугруппа S называется полупростой (вполне полупростой), если все ее F-классы просты (соответственно вполне просты).

Доказывается, что полупростая полугруппа, удовлетворяющая условию M_l, удовлетворяет и условию M_f. Полугруппа S, удовлетворяющая условиям M_l^* и M_f^*, вполне полупроста тогда и только тогда, когда она полупроста или каждый ее F-класс содержит идемпотент. Полупростая полугруппа, удовлетворяющая условиям M_l и M_r, вполне проста. Регулярная полугруппа (РЖМат, 1957, 166), удовлетворяющая условию M_l, вполне полупроста. Полугруппа S тогда и только тогда является объединением групп, когда она удовлетворяет условиям (2,0) (РЖМат, 1957, 165) и M_l^*. Полугруппа, удовлетворяющая условиям (2,0) и M_l, является объединением групп. Если вполне полупростая полугруппа удовлетворяет одному из условий M_l, M_r, M_f, то она удовлетворяет и двум остальным.

Верхним радикалом полугруппы S называется объединение N всех таких идеалов $M \subset S$, что $S - M$ полупроста. Если S содержит верхний радикал N (в частности, если S — периодическая полугруппа или удовлетворяет условиям M_l и M_r), то $S - M$ вполне полупроста.

Пусть S — полугруппа с нулем без нильпотентных идеалов. Если S удовлетворяет одному из условий M_l, M_r, M_f, то любой ненулевой идеал $A \subset S$ содержит ненулевой идеал A' полугруппы S, не содержащий отличных от 0 и A' идеалов полугруппы S. В заключение автор рассматривает понятие M-радикала, аналогичное радикалу, ранее рассмотренному Шварцем (Schwarz Š., Sbor. prác. Přírodoved. fac. Slovenskej Univ. Bratislave, 1943, 6, 64). Л. М. Глускин

9584. Заметка об идемпотентных полугруппах. 1. Кимура (Note on idempotent semigroups. 1. Kimura Naoki), Proc. Japan. Acad., 1957. 33, № 10, 642—645 (англ.)

Пусть S — идемпотентная полугруппа (РЖМат, 1956, 7160). Для того чтобы любые элементы $a, b \in S$ удовлетворяли условию

$$aba = ab,$$

необходимо и достаточно, чтобы для всяких элементов a, b из любой вполне простой полуподгруппы $S_\alpha \subset S$ имело место $ab = a$. Если любые элементы $a, b, c \in S$ удовлетворяют условию $abaca = abca$, то полугруппа может быть разложена в некоторое специальное произведение. Л. М. Глускин

9585. К теории колец и полугрупп. Тьеррен (Contribution à la théorie des anneaux et des demi-groupes. Thierrin Gabriel), Comment. math. helv., 1957, 32, № 2, 93—112 (франц.)

Полугруппа D называется рефлективной, если для любых элементов $a, x, y \in D$ их $xa = ya$ следует $ax = ay$, и наоборот. Доказано, что всякий левый идеал Da рефлективной полугруппы D изоморфен ее правому идеалу aD. Аналогичное утверждение справедливо и для рефлективных колец. Всякий идемпотент рефлективной полугруппы содержится в ее центре. Всякая рефлективная полугруппа, содержащая минимальный правый идеал (и, в частности, всякая конечная рефлективная полугруппа), является гомогруппой (РЖМат, 1953, 117). Рефлективная полугруппа, не имеющая собственных идеалов и отличная от группы, двусторонне стационарна (РЖМат, 1956, 6423) и не содержит элементов конечного порядка. Рефлективное кольцо A не содержит делителей нуля, если $A^2 \neq 0$.

Непустое подмножество H элементов полугруппы D называется ее рефлективным комплексом, если для любых $a, b \in D$ из $ab \in H$ следует $ba \in H$. Рефлективный комплекс $H \subseteq D$ называется вполне рефлективным, если для любых $a, b, c \in D$ из $abc \in H$ следует $cba \in H$. Идеал P полугруппы или кольца A называется полупростым, если из $a^2 \in P$ следует $a \in P$. Доказано, что всякий полупростой идеал полугруппы или кольца рефлективен. Любое кольцо без ненулевых нильпотентных элементов рефлективно. Если P — ненильпотентный минимальный левый идеал рефлективного кольца A, то P является телом и рефлективным идеалом.

Пусть M — рефлективный идеал полугруппы или кольца A. Множество $\Re(M)$ всех элементов $a \in A$, для которых $a^n \in M$ при некотором n, является рефлективным комплексом A и называется рефлективным радикалом M. $\Re(M)$ является пересечением всех полупростых идеалов A, содержащих M. Если A — кольцо, то $\Re(M)$ совпадает с радикалом Мак-Коя идеала M. Если M — пересечение всех рефлективных идеалов кольца A, то фактор-кольцо $A / \Re(M)$ коммутативно. Для примарного идеала M кольца или полугруппы множество $\Re(M)$ является простым идеалом.

Для того чтобы кольцо A было изоморфно прямой сумме конечного числа тел, необходимо и достаточно выполнение следующих условий: 1) A удовлетворяет условию минимальности для левых идеалов, 2) A не содержит отличных от 0 левых нильпотентных идеалов, 3) A рефлективно. Для того чтобы регулярное кольцо было изоморфно подпрямой сумме тел, необходимо и достаточно, чтобы оно было рефлективно.

Приведено большое число предложений о вполне рефлективных комплексах колец и полугрупп и, в частности, об их вполне рефлективных идеалах. Л. М. Глускин

9586 Д. Проблема изоморфизма одинаково расположенных групп конечного порядка. Киппельс (Das Problem der Isomorphie bei situationsgleichen Gruppen von endlicher Ordnung. Kippels Herbert.— Diss., Math.-naturwiss. Fak., Köln., 1957.

Düsseldorf, Triltsch, 1955, 40 S.), Dtsch. Nationalbibliogr., 1957, B, № 13, 975 (нем.)

9587 Д. **Система независимых аксиом для полугрупп с однозначным разложением на полупростые множители. Хинцен** (Ein System von unabhängigen Axiomen für Halbgruppen mit eindeutigen Halbprimfaktorzerlegungen. Hintzen Josef.— Diss., Math.-naturwiss. Fak., Köln, 1957, 19 S.), Dtsch. Nationalbibliogr., 1957, B, № 25, 1969 (нем.)

9588 Д. **Векторное умножение над группами. Сокращенное изложение. Кноблих** (Eine Vektormultiplikation über Gruppen. Gekürzt. Knoblich Gerhard.— Diss., Naturwiss. Fak., Mainz. 1955, 30 S.), Dtsch. Nationalbibliogr., 1957, B, № 27, 2171 (нем.)

9589 Д. **О вложениях конечных групп. Вуссинг** (Über Einbettungen endlicher Gruppen. Wußing Hans-Ludwig.— Diss., Math.-naturwiss. Fak., Leipzig, 1957, 33 S.), Dtsch. Nationalbibliogr., 1957, B, № 25, 1969 (нем.)

9590 Д. **Определяющие соотношения некоторых полугрупп подстановок. Айзенштат А. Я.** Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Ленингр. гос. пед. ин-т им. А. И. Герцена, Л., 1958

ПОЛЯ, КОЛЬЦА И СТРУКТУРЫ

9591. **Об уравнениях простой степени. Курбатов В. А.,** Матем. сб., 1957, 43, № 3, 349—366

Пользуясь обычными средствами теории Галуа, автор дает следующий критерий разрешимости в радикалах. Уравнение простой степени n $f(x)=0$, неприводимое в числовом поле Ω, решается в радикалах, если существует система сопряженных величин $\theta(x_k)$ $(k=0, 1, 2, \ldots, n-1)$, которые не принадлежат $\Omega(\varepsilon)$ и которые линейно между собой связаны соотношением $\sum_{k=0}^{n-1} c_k \theta(x_k)=0$, в котором не все коэффициенты $C_k \in \Omega(\varepsilon)$ $(k=0, 1, 2, \ldots, n-1)$ одинаковы, где $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ — корни многочлена $f(x)$, $\theta(x)$ — многочлен с коэффициентами из $\Omega(\varepsilon)$, ε — первообразный корень n-й степени из единицы.

Требование неприводимости многочлена $f(x)$ не является необходимым. Указывается на возможность распространения полученных результатов на произвольные поля характеристики нуль. Б. М. Уразбаев

9592. **Случай существования подполя у гиперэллиптического поля алгебраических функций. Дороднов А. В.,** Уч. зап. Казанск. ун-та, 1957, 117, № 2, 3—6

Исследуется случай (оставшийся не разобранным в предыдущей работе автора, РЖМат, 1957, 3833), когда преобразование в себя гиперэллиптического поля алгебраических функций K одной переменной имеет период, равный степени двойки. Показывается, что если жанр поля K больше трех и преобразование не оставляет инвариантными все точки Вейерштрасса, то K содержит подполе жанра >1 (ранее трансцендентным методом этот результат получен Вильтхейсом (Wiltheiss, Math. Ann., 1886, 26, 127)). В. В. Морозов

9593. **Алгебраические расширения произвольных полей. Уэйпле** (Algebraic extensions of arbitrary fields. Whaples G.), Duke Math. J., 1957, 24, № 2, 201—204 (англ.)

Используя исключительно аппарат теории Галуа, автор доказывает следующие утверждения:

1. Пусть n — любое целое число. Тогда существует поле K, обладающее конечным алгебраическим расширением, степень которого делится на n, и не обладающее расширением степени $\leqslant n$.

2. Пусть p — нечетное простое число и k — поле, обладающее циклическим расширением степени p. Тогда поле k обладает расширением K, являющимся объединением возрастающей последовательности циклических расширений поля k степеней p^n, $n=1,2,\ldots$

Для $p=2$ утверждение 2 справедливо тогда и только тогда, когда сумма квадратов произвольных элементов поля k есть опять квадрат или когда поле k обладает циклическим расширением степени 4.

Б. М. Уразбаев

9594. **Построение полей алгебраических чисел с заданной разрешимой группой Галуа. Шафаревич И. Р.,** Изв. АН СССР, сер. матем., 1954, 18, № 6, 525—578

Доказывается, что над любым полем алгебраических чисел существует бесконечное число расширений с наперед заданной разрешимой группой Галуа (теорема 7).

В первой части работы (§§ 1—3) рассматриваются арифметические инварианты и их применение к выводу необходимых и достаточных условий погружаемости шольцева поля в простое центральное шольцево расширение (теорема 1), а также устанавливаются условия погружаемости и для центральных шольцевых расширений (теорема 2).

Вторая часть (§ 4) посвящена построению полей с разрешимой группой Галуа. Для конструкции разрешимых полей используется теорема Фаддеева (РЖМат, 1954, 2007)— Гашютца (Gaschütz W., J. reine und angew. Math., 1952, 190, 93—107), которая позволяет, с одной стороны, получить условия погружаемости для произвольных шольцевых полей (теорема 5), а с другой, свести построение произвольных разрешимых полей к ряду разрешимых полей степени l^a, рассмотренных в предыдущих работах автора (РЖМат, 1954, 5468; 1955, 2085; 1956, 243, 244). Б. М. Уразбаев

9595. **О круговых луночках, квадрируемых при помощи конических сечений. Беркович Л. М.,** Уч. зап. Казанск. ун-та, 1957, 117, № 2, 7—10

Продолжая исследование А. В. Дороднова (Изв. Казанск. физ.-матем. об-ва, 1945, 13, 95—126), автор рассматривает некоторые, оставшиеся не разобранными первым, но возможные случаи квадрируемости и показывает, что они не приводят к нетривиальным решениям. Тем самым рассматриваемая задача получает дальнейшее продвижение, однако окончательного решения еще не получает. В. В. Морозов

9596. **Локальная теория полей классов. Хокшильд** (Local class field theory. Hochschild G.), Algebr. Geom. Conf. Notes. Univ. Chicago. Chicago, s. a., 33—37 (англ.)

В локальной теории полей классов устанавливается взаимно однозначное соответствие между всеми конечными абелевыми нормальными расширениями L p-адического поля K и всеми подгруппами H конечного индекса мультипликативной группы K^* поля K. Это соответствие задается формулой $H=N_{L|K}(L^*)$. При этом символ норменного вычета Хассе задает изоморфное отображение фактор-группы K^*/H на группу Галуа G поля L над K. Этот символ непосредственно определяется только для циклических расширений L поля K, а для абелевых расширений задается через норменные вычеты циклических компонент поля, что затрудняет исследование его свойств.

Поэтому естественно рассмотреть обратное отображение группы G на фактор-группу K^*/H. Если L — конечное нормальное (не обязательно абелево) расширение поля K, то существует гомоморфизм φ группы G на группу K^*/H, ядром которого является коммутант группы G.

Определение гомоморфизма φ связано с изучением

группы $H^2(G, L^*)$ классов ассоциированных между собой факторов $a_{S,T} \in L^*$, где $S, T \in G$.

В реферируемой заметке (представляющей собой обзорный доклад) приведены результаты о группе $H^2(G, L^*)$ и ее гомоморфизмах. С. Д. Берман

9597. **Лемма Гензеля. Рейнер** (Hensel's lemma. Rayner F. J.), Quart J. Math., 1957, 8, № 32, 307—311 (англ.)

Приведено доказательство леммы Гензеля для полных псевдонормированных колец. З. И. Боревич

9598. **К статье Ланга о квазиалгебраических замыканиях. Нагата** (Note on a paper of Lang concerning quasi algebraic closure. Nagata Masayoshi), Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto., 1957, A30, № 3, 237—241 (англ.)

Согласно определению Ланга (Lang S., Ann. Math., 1952, 55, 373—390) поле K называется C_i-полем, если каждая однородная форма над полем K степени d от n переменных при $n > d^i$ имеет в K нетривиальные нули, и полем с сильным C_i-свойством (strongly C_i), если каждый полином от n переменных над полем K степени d и без свободного члена при $n > d^i$ имеет в K нетривиальный нуль.

Автор доказывает, что однородные формы $f_1, \ldots, f_r$ степени d от n переменных над C_i-полем K (соответственно полиномы без свободных членов $f_1, \ldots, f_r$ степени d от n переменных над полем K с сильным C_i-свойством) обладают в этом поле нетривиальным общим корнем при $> rd^i$. Если K — C_i-поле (поле с сильным C_i-свойством), то расширение L поля K является C_{i+r}-полем (соответственно полем с сильным C_{i+r}-свойством), где $r = (L; K)$.

Первая и четвертая теоремы доказаны Лангом при дополнительных ограничениях на поле K.

В заключительном параграфе заметки перечисляются нерешенные вопросы о C_i-полях и полях с сильным C_i-свойством. С. Д. Берман

9599. **О примере неразветвленного расширения Галуа. Фудзисаки Гэндзиро**, Сугаку, 1957, 9, № 2, 97—99 (японск.)

9600. **О числе подполей поля алгебраических функций от одного переменного. Жижченко А. Б.**, Изв. АН СССР. Сер. матем., 1957, 21, № 4, 541—548

Доказывается, что поле алгебраических функций от одной переменной Σ с алгебраическим замкнутым полем констант имеет только конечное число подполей Σ' рода большего 1, над которыми оно сепарабельно. Если основное поле есть поле комплексных чисел, эта теорема была доказана Де-Франчисом и Севери, использовавшими теорию приведения абелевых интегралов.

Доказательство состоит из двух частей. В первой части, следуя Севери (Severi F., Vorlesungen über algebraische Geometrie, Leipzig — Berlin, 1921), автор доказывает, что подполя Σ образуют алгебраическую систему, распадающуюся на конечное число неприводимых. Во второй части доказывается, что размерность любой неприводимой алгебраической системы подполей равна нулю.

Здесь рассмотрение абелевых интегралов, используемое в работах Де-Франчиса и Севери, заменяется каноническим отображением кривой в ее якобиево многообразие.

В заключение приводятся примеры, показывающие, что без наложенных на поля Σ и Σ' ограничений теорема о конечности числа подполей может быть неверна. И. Р. Шафаревич

9601. **О возможности упорядочения комплексных чисел. Фридман А. А.** (III), Уч. зап. Рязанск. гос. пед. ин-т, 1958, 15, 55—56

9602. **О простых идеалах первой степени. Дуйчев И.**, Acta math. Acad. sci. hung., 1956, 7, № 1, 71—73 (рез. англ.)

Дается простое доказательство известной теоремы о существовании бесконечного числа простых идеалов первой степени во всяком конечном расширении K поля рациональных чисел R, основанное на том факте, что всякий простой идеал, делящий целый примитивный элемент ξ поля K, но не делящий дискриминант неприводимого над полем R многочлена, которому удовлетворяет ξ, имеет степень 1. С. Д. Берман

9603. **Проблема представления функций независимости. Лазарсон** (The representation problem for independence functions. Lazarson T.), J. London Math. Soc., 1958, 33, № 1, 21—25 (англ.)

Пусть S — произвольное конечное множество. Функция $g(x_1, \ldots, x_r)$ $(x_i \in S$; r — произвольное натуральное число) называется I-функцией (функцией независимости), если она принимает значение 1 или 0, не меняется при любой перестановке аргументов и удовлетворяет следующим условиям: а) $g(x_1, \ldots, x_r, y) \leqslant g(x_1, \ldots, x_r)$; б) $g(x, x) = 0$ для всех $x \in S$; в) если $g(x_1, \ldots, x_r) = g(y_1, \ldots, y_{r+1}) = 1$, то для некоторого g_j $(1 \leqslant j \leqslant r+1)$ $g(x_1, \ldots, x_r, y_j) = 1$.

Если S — множество векторов линейного пространства над телом D, то функция $g(x_1, \ldots, x_r)$, равная 1, когда векторы $x_1, \ldots, x_r$ линейно независимы, и нулю в противном случае, называется натуральной I-функцией.

Будем говорить, что I-функция $g(x_1, \ldots, x_s)$ может быть представлена над телом D, если существует такое отображение $x \to R(x)$ множества S в конечномерное линейное пространство V над телом D, что $g(x_1, \ldots, x_r) = h(R(x_1), \ldots, R(x_r))$, где h — натуральная I-функция на V.

Автор доказывает, что существует I-функция, заданная на множестве из 16 элементов, не представимая ни над каким телом D. С. Д. Берман

9604. **Об операции подстановки в кольце полиномов. Нёбауер** (Über die Operation des Einsetzens in Polynomringen. Nöbauer Wilfried), Matl. Ann., 1958, 134, № 3, 248—259 (нем.)

Множество $T[x] = R$ всех полиномов от одного неизвестного над коммутативным кольцом T изучается как алгебра с двумя кольцевыми операциями и третьей операцией подстановки: $f(x) \circ g(x) = f[g(x)]$. Полным идеалом кольца R автор называет идеал A, удовлетворяющий условию: $f_1(x) \circ f_2(x) \equiv g_1(x) \circ g_2(x) \pmod{A}$ если $f_1(x) \equiv g_1(x) \pmod{A}$ и $f_2(x) \equiv g_2(x) \pmod{A}$. Идеал A кольца R тогда и только тогда является полным, когда $f(x) \circ g(x) \equiv 0 \pmod{A}$, если $f(x) \in T[x]$, $g(x) \in A$. Каждому полному идеалу A однозначно соответствует такой идеал α кольца T, что $(\alpha) \subseteq A \subseteq \{\alpha\}$, где (α) — идеал кольца R, порожденный идеалом α, а $\{\alpha\}$ — идеал этого кольца, образованный всеми полиномами $f(x)$, для которых $f(a) \equiv 0 \pmod{a}$ при $a \in T$.

Соответствие $A \to \alpha$ является гомоморфизмом алгебры всех полных идеалов кольца R на алгебру всех идеалов кольца T. В фактор-кольце R/A по полному идеалу A естественным образом определяется операция подстановки. Элементы кольца R/A относительно этой операции образуют полугруппу Q/A, а обратимые элементы полугруппы $Q(A)$ — подгруппу $R(A)$. Если $C = A \cap B$, то существует изоморфизм полугруппы $Q(C)$ на прямое произведение $Q(A) \times Q(B)$, при ко-

тором $R(C)$ изоморфно отображается на $R(A) \times R(B)$. Из равенства $C = A_1, \ldots, A_r$, где $A_1, \ldots, A_r$ — попарно взаимно простые полные идеалы, вытекает разложение $R(C) = R(A_1) \times \ldots \times R(A_r)$. Полугруппа $Q(\{\alpha\})$, где α — идеал в кольце T, допускает изоморфное отображение в полугруппу всех однозначных отображений множества T/α в себя, при котором группа $R(\{\alpha\})$ переходит в подгруппу симметрической группы S_r (r — мощность множества T/α).

В заключительном параграфе работы рассмотрены примеры. С. Д. Берман

9605. Сильно определенные полиномы. Льюис (Strongly definite polynomials. Lewis D. J.), Michigan Math. J., 1957, 4, № 2, 187—191 (англ.)

Однородный полином $f(x_1, \ldots, x_n)$ над кольцом R от n переменных $x_1, \ldots, x_n$ называется определенным, если он имеет в R только тривиальный нуль. Шевалле (Chevalley C., Abhandl. math. Semin. Univ. Hamburg, 1936, 11, 73—75) показал, что степень определенного полинома $f(x_1, \ldots, x_n)$ над конечным полем не менее чем n.

Брауэр (Brauer R., Bull. Amer. Math. Soc., 1945, 51, 749—755) для $\mathfrak{p}$-адического поля K доказал существование такой функции $\Phi_K(d)$, что $n \leqslant \Phi_K(d)$ для любого определенного полинома $f(x_1, \ldots, x_n)$ над K.

Пусть K — поле, полное относительно дискретного нормирования, Q — кольцо целых величин поля K, $\mathfrak{p}$ — простой идеал в кольце Q, q — число элементов поля $Q/\mathfrak{p}$.

Автор называет однородный полином $f(x_1, \ldots, x_n)$ степени d над Q сильно определенным, если из сравнения

$$f(a_1, \ldots, a_n) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}^d} \quad (a_i \in Q)$$

вытекает, что $a_i \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Теорема. Существует такой полином $\Phi_d(y)$ степени $(d-1)$ над кольцом целых рациональных чисел, что $n \leqslant d^2 \Phi_d(q-1)$ для любого сильно определенного полинома $f(x_1, \ldots, x_n)$ степени d над Q $(d < q)$.

С. Д. Берман

9606. Обобщение теоремы о главном идеале. Терада (A generalization of the principal ideal theorem. Terada Fumiyuki), J. Math. Soc. Japan, 1955, 7, Suppl. dec., 530—536 (англ.)

Пусть G — конечная группа, S — некоторый ее автоморфизм, F — нормальный делитель группы G, порожденный коммутаторами и элементами вида $S(\sigma)\sigma^{-1}$ $(\sigma \in G)$, Z — кольцо целых чисел с тождественными операторами из G и $v: H^{-2}(F, Z) \to H^{-2}(G, Z)$ — гомоморфизм подъема (для групп когомологий размерности — 2). Обозначим через $I(G)$ идеал группового кольца $Z[G]$, порожденный элементами $1 - \sigma$, $\sigma \in G$. Отображение

$$\sum_{\sigma \in G} a(\sigma)(1-\sigma) \to \sum_{\sigma} a(\sigma)(1 - \sigma^{-1} S(\sigma)), \quad a(\sigma) \in Z,$$

модуля $I(G)$ в модуль $I(F)$ естественным образом порождает гомоморфизм $S^*: H^{-2}(G, Z) \to H^{-2}(F, Z)/A$, где A — ядро гомоморфизма v. Доказывается, что ядро гомоморфизма S^* содержится в ядре гомоморфизма ограничения $r: H^{-2}(G, Z) \to H^{-2}(F, G)$.

Пусть теперь Δ/Ω — конечное нормальное расширение поля алгебраических чисел Ω с группой Галуа G, а Σ — промежуточное поле, соответствующее нормальному делителю F. Обозначим через C_Δ, C_Σ и C_Ω — группы классов идеальных элементов полей Δ, Σ и Ω соответственно.

Цепочка отображений

$$H^0(G, C_\Delta) \to H^{-2}(G, Z) \xrightarrow{S^*} H^{-2}(F, Z)/A \xrightarrow{v} \to H^{-2}(G, Z) \to H^0(G, C_\Delta)$$

определяет эндоморфизм ε группы $C_\Omega / N_{\Delta|\Omega} C_\Delta$. Из полученного теоретико-группового результата следует, что ядро эндоморфизма ε (если его рассматривать в группе C_Σ) содержится в $N_{\Delta|\Sigma} C_\Delta$. Последнее утверждение содержит в себе как частный случай доказанную автором ранее обобщенную теорему о главном идеале (РЖМат, 1956, 6445). З. И. Боревич

9607. О делителях нуля в групповой алгебре. Желязко (On the divisors of zero of the group algebra. Żelazko W.), Fundam. math., 1957, 45, № 1, 99—102 (англ.)

Доказывается, что групповая алгебра $L_1(G)$ произвольной локально бикомпактной топологической группы G содержит делители нуля. С. Д. Берман

9608. О неразложимых представлениях алгебр. Джанс (On the indecomposable representations of algebras. Jans James P.), Ann. Math., 1957, 66, № 3, 418—429 (англ.)

Пусть $G_A(d)$ — число неэквивалентных неразложимых представлений степени d над полем K ассоциативной конечномерной алгебры A над этим полем. Алгебра A называется алгеброй с существенно неограниченными степенями представлений, если $G_A(d) = \infty$ для бесконечного числа натуральных чисел d.

Брауэр и Тролль (Brauer R., Bull., Amer. Math. Soc., 1941, 47, Abstract 334, p. 684; Thrall R. M., там же, 1947, 53, Abstract 22, p. 49) высказали предположение, что алгебра A с ограниченными степенями неразложимых представлений допускает только конечное число неразложимых представлений, и всякая алгебра над бесконечным полем с неограниченными степенями неразложимых представлений является алгеброй с существенно неограниченными степенями представлений. Иосии (РЖМат, 1957, 3870) доказал первое из этих предположений для алгебр над алгебраически замкнутым полем, радикал которых является нулевой алгеброй, и для алгебр этого же типа получил необходимые и достаточные условия ограниченности степеней неразложимых представлений (РЖМат, 1957, 4647). Хигман (РЖМат, 1955, 4251) показал, что степени неразложимых представлений групповой алгебры конечной группы G над полем K характеристики p ограничены тогда и только тогда, когда силовская p-подгруппа группы G циклична.

В реферируемой заметке доказывается, что если число идеалов алгебры A над алгебраически замкнутым полем бесконечно, то A — алгебра с существенно неограниченными степенями представлений. Эта теорема обобщает один результат Накаяма (Nakayama T., Proc. Imp. Acad. Tokyo, 1940, 16, 285—289), впервые обнаружившего существование алгебр с неограниченными степенями представлений. Если алгебра A содержит конечное число идеалов, то каждый ее идеал является главным. В этом случае каждому идеалу A_0 алгебры A, содержащемуся в радикале этой алгебры, можно сопоставить некоторый граф.

Автор указывает на три различные условия для этого графа, достаточные для того, чтобы A была алгеброй с существенно неограниченными степенями представлений. С. Д. Берман

9609. Замечание об алгебрах со строго неограниченным числом представлений. II. Йосии (Note on algebras of strongly unbounded representation type. II. Yoshii Tensho), Proc. Japan Acad., 1956, 32, № 10, 744—747 (англ.)

Часть I см. РЖМат, 1957, 3839. Приведено еще одно условие, достаточное для того, чтобы ассоциативная алгебра с единицей над алгебраически замкнутым полем была алгеброй со строго неограниченным числом представлений (РЖМат, 1957, 7217; 1957, 3839).

З. И. Боревич

9610. **Заметка о радикале групповой алгебры. Уоллес** (Note on the radical of a group algebra. Wallace D. A. R.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1958, 54, № 1, 128—130 (англ.)

Доказывается, что размерность n радикала N групповой алгебры конечной группы G над полем K характеристики p удовлетворяет неравенству $n \geqslant p^a - 1$, где p^a — порядок силовской p-подгруппы группы G. Равенство $n = p^a - 1$ имеет место тогда и только тогда, когда каждая силовская p-подгруппа группы G совпадает со своим нормализатором и пересечение любых двух различных силовских p-подгрупп этой группы равно единице.

Примечание референта. Если выполняются условия второй теоремы, то группа G представляется в виде полупрямого произведения $M \cdot P$, где M — нормальный делитель, а P — силовская p-подгруппа группы G. Легко показать, что в этом случае элементы $(\Sigma_{a \in P} a)(b - 1)$ $(b \in P;\ b \neq 1)$ образуют базис радикала N.

С. Д. Берман

9611. **Алгебры над бесконечными полями. Амицур** (Algebras over infinite fields. Amitsur A. S.), Proc. Amer. Math. Soc., 1956, 7, № 1, 35—48 (англ.)

Изучаются алгебры над несчетным основным полем F. Для таких алгебр доказывается, что каждый правый ниль-идеал лежит в некотором двустороннем ниль-идеале, что соответствует положительному решению известной проблемы Кёте.

При дополнительном предположении алгебраичности доказывается, что расширение основного поля снова приводит к алгебраической алгебре, и что каждая квадратная матрица с элементами из данной алгебры удовлетворяет некоторому алгебраическому уравнению с коэффициентами основного поля. Обе соответствующие проблемы были поставлены Джекобсоном.

Отметим также следующий результат: степени алгебраичности (индексы нильпотентности) элементов конечно-мерного подпространства алгебраической (ниль-) алгебры над расчетным основным полем ограничены в совокупности.

А. И. Ширшов

9612. **Обобщенные полугрупповые кольца. Конрад** (Generalized semigroup rings. Conrad Paul), J. Indian Math. Soc., 1957, 21, № 1—2, 73—95 (англ.)

Пусть S — частично-упорядоченное множество, являющееся объединением своих попарно непересекающихся цепей, с (возможно не всюду определенной) бинарной монотонной операцией; R — кольцо с нулем 0; Γ — совокупность всех отображений α: $s \to s\alpha$ множества S в кольцо R. На множестве Γ определены следующие две операции:

$$s(\alpha + \beta) = s\alpha + s\beta,\ s(\alpha\beta) = \sum_{xy=s} (x\alpha)(y\beta),$$

если же в S не существует таких x, y, что $xy = s$, то $(\alpha\beta) = 0$.

Обозначим через G подмножество Γ, состоящее из всех элементов γ со следующим свойством: множество всех $x \in S$, для которых $x\gamma \neq 0$, является объединением конечного числа цепей. Доказывается, что множество G замкнуто относительно умножения в Γ. Если $R^3 \neq 0$, то необходимым и достаточным условием того, что G является кольцом, служит выполнение ассоциативного закона в S. Если $R^3 = 0$ и G является кольцом с нулем 0, то $G^3 = 0$. Если G — кольцо и в S есть идемпотент, то G содержит подкольцо, изоморфное R. Если S — группа, и отношение $a < b$ не имеет места ни при каких $a, b \in S$, то G является групповым кольцом группы S над R. Если S — подполугруппа абелевой группы без кручения и R — область целостности, то и G является областью целостности. Последняя теорема допускает обращение. При некоторых дополнительных условиях (ассоциативный закон в S, закон сокращения и т. д.) в Γ выделен ряд других подколец. Результаты прилагаются к матричным кольцам, полиномиальным кольцам, кольцам формальных степенных рядов и т. д.

Л. М. Глускин

9613. **Решение уравнений 2-го и 3-го порядков в алгебре тридиадических чисел. Фадини** (La risoluzione delle equazioni di secondo e terzo grado nell'algebra dei numeri triduali. Fadini Angelo), Rend. Accad. sci. fis., mat. Napoli, 1954, 21, 114—126) (итал.)

9614. **Единицы неподвижных точек в инволютивных алгебрах. Раманатхан** (Units of fixed points in involutorial algebras. Ramanathan K. G.), Proc. Internat. Sympos. Algebr. Number Theory, 1955, Tokyo, 1956, 103—106 (англ.)

Пусть A — простая алгебра конечного ранга над полем рациональных чисел, в которой задан инволютивный антиавтоморфизм $\alpha \to \alpha^*$. Элемент $\xi \in A$ называется неподвижной точкой, если $\xi^* = \xi$. Пусть O — порядок в алгебре A над кольцом целых чисел. Регулярный элемент $u \in O$ называется единицей неподвижной точки ξ, если $u^{-1} \in O$ и $u^* \xi u = \xi$. В работе намечено доказательство теоремы, утверждающей, что группа $\Gamma(\xi)$ всех единиц точки ξ, норма которой отлична от нуля, имеет конечное число образующих. Во второй сформулированной без доказательства теореме устанавливается конечность «объема» фундаментальной области для группы $\Gamma(\xi)$, представленной определенным образом в виде непрерывной группы преобразований некоторого риманова пространства.

З. И. Боревич

9615. **О целых базисах. Манн** (On integral bases. Mann Henry B.), Proc. Amer. Math. Soc., 1958, 9, № 1, 167—172 (англ.)

Пусть I — дедекиндово кольцо, F — его поле отношений, F' — конечное сепарабельное расширение поля F и I' — кольцо целых (относительно I) элементов поля F'. Система $n = (F' : F)$ элементов $\omega_1, \ldots, \omega_n$ из I' называется целым базисом расширения F'/F, если каждый элемент из I' представляется в виде $x_1\omega_1 + \ldots + x_n\omega_n$, где $x_i \in I$.

Пусть характеристика поля F отлична от 2. Если $(F' : F) = 2$, то F'/F имеет целый базис тогда и только тогда, когда $F' = F(\sqrt{D})$, где главный идеал (D) равен дискриминанту расширения F'/F. Если не все идеалы поля F главные, то существует квадратичное расширение F'/F, не имеющее целого базиса. Таким образом, любое расширение F'/F поля F имеет целый базис тогда и только тогда, когда все идеалы в F главные.

Если характеристика поля F равна 2, то квадратичное расширение F'/F имеет целый базис тогда и только тогда, когда дифферента этого расширения есть главный идеал основного поля F.

З. И. Боревич

9616. **Замечание к статье Манна «О целых базисах». Ханли, Манн** (A note to the paper «On integral bases» by H. B. Mann. Hanly Virginia, Mann H. B.), Proc. Amer. Math. Soc., 1958, 9, № 1, 173—174 (англ.)

Доказывается, что если не все идеалы в F главные (см. обозначения реф. 9615), то и в случае, когда характеристика поля F равна 2, тоже существует квад-

ратичное расширение F'/F, не имеющее целого базиса. З. И. Боревич

9617. О квазинормированных кольцах. Ван Сянхао, Дунбэй женьминь дасюэ цзыжанькэсюэ сюэбао, Acta scient. natur., 1957, № 1, 27-40 (кит.; рез. англ.)

Пусть R — коммутативное кольцо без делителей нуля, не являющееся полем. Функция v, принимающая на R вещественные неотрицательные значения и ∞, называется полунормированием, если $v(a)=\infty$ лишь при $a=0$, $v(ab)\geqslant v(a)\,v(b)$, $v(a^2)=2v(a)$, $v(a+b)\geqslant \min(v(a), v(b))$ и существует $a\neq 0$, для которого $v(a)>0$. Кольцо R называется квазинормированным, если оно содержит такой элемент $r\neq 0$ (называемый ядерным элементом), что любой элемент $a\neq 0$ из R делит некоторую степень r. Если $h(a,n)$ обозначает наибольшее целое $k\geqslant 0$, для которого r^k делит a^n, то, функция $m(a)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{h(a,n)}{n}$ является полунормированием квазинормированного кольца R. Полунормирование m — наиболее сильное; именно, для любого полунормирования v имеем $m(x)\,v(r)\leqslant v(x)$ при всех $x\in R$. Квазино мированные кольца R характеризуются существованием полунормирования w, для которого не существует более сильных (и неэквивалентных w) полунормирований. Ядерные элементы a характеризуются условием $m(a)>0$. В квазинормированном кольце R существуют нормирования и $m(a)=\min V(a)$, где V пробегает все нормирования R, для которых $V(r)=1$; для любого полунормирования v существует такое нормирование V, что $v(x)\leqslant V(x)$. На примерах показано, что квазинормированное кольцо R может иметь бесконечно много неэквивалентных нормирований, а также что топология на R, индуцированная наиболее сильным полунормированием m, может быть строго слабее топологии, определяемой всеми ненулевыми идеалами, как системой окрестностей нуля. З. И. Боревич

9618. Инвариант расширения дифференциального поля. Кон (An invariant of difference field extensions. Cohn Richard M.), Proc. Amer. Math. Soc., 1956, 7, № 4, 656—661 (англ.)

Пусть дифференциальное поле G — конечно порожденное расширение дифференциального поля F: $G=F\langle a_1,\ldots,a_r\rangle$, и S_k — множество всех a_i и их первых k производных. Через d_k обозначается степень поля $F(S_{k+1})$ над полем $F(S_k)$, $k=0,1,2,\ldots$; предельной степенью дифференциального поля G относительно дифференциального поля F (обозначается l.d. (G/F)) называется наименьшее из чисел d_k.

Доказывается, что предельная степень не зависит от выбора системы образующих a_i. Если H, F и G — дифференциальные поля и $F\subseteq G\subseteq H$, то l.d. $(H/F)=$ = l.d. $(H/G)\cdot$l.d. (G/F). А. Х. Лившиц

9619. Алгебра группы автоморфизмов стандартной нуль-альгебры с двумя ведущими диадами. Гуревич Г. Б., Тр. Тульск. механ. ин-та, 1958, вып. 8, 21—25

Для стандартной нуль-алгебры F с двумя ведущими диадами (РЖМат, 1956, 4380) определяется алгебра Ли ее группы автоморфизмов G и все подалгебры из F, инвариантные относительно автоморфизмов из компоненты единицы группы G (называемые полухарактеристическими подалгебрами). В заглавии, очевидно, нужно читать: «алгебра Ли». В. В. Морозов

9620. Модулярные алгебры Ли. II. Кертис (Modular Lie algebras. II. Curtis Charles W.), Trans Amer. Math. Soc., 1957, 86, № 1, 91—108 (англ.)

Часть I см. РЖМат, 1957, 6892.

Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли над алгебраически замкнутым полем Ω характеристики $p>7$, форма Киллинга которой невырождена. Доказывается, что существует модулярная алгебра Ли $\mathfrak{k}$ над простым полем $Z_p\subset\Omega$, содержащаяся в алгебре $\mathfrak{g}$ и такая, что $\mathfrak{g}$ получается из $\mathfrak{k}$ при помощи расширения основного поля. Отмечается небольшая некорректность в конструкции модулярной алгебры Ли, описанной в первой части работы (РЖМат, 1957, 6892). Эта конструкция остается корректной и упрощается, если выбрать корневые векторы так, чтобы структурные константы были рациональными числами, что возможно в силу результата Шевалле (РЖМат, 1958, 6508). А. Л. Онищик

9621. Представления полупростых алгебр Ли ранга 2. Симония В. Т., Тбилисис математикис институтис промеби. Сакартвелос ССР мецниереба ta академиа, Тр. Тбилисск. матем. ин-та, АН ГрузССР, 1957, 24, 223—407

Дано полное перечисление линейных представлений особой простой алгебры Ли G_2. Если старший вес представления равен $a\lambda_1+b\lambda_2$, где a, b — неотрицательные целые числа, связанные соотношениями $a\geqslant 3b$, $a-b$ есть четное число, то каждый из весовых векторов этого представления задается целыми числами s, t, u, p, q, r, удовлетворяющими неравенствам

$$0\leqslant s\leqslant\frac{a-3b}{2},\quad 0\leqslant t\leqslant b,\quad 0\leqslant u\leqslant\frac{a-b}{2}-s-t,$$

$$0\leqslant p\leqslant\frac{a-b}{2}-s-u,\ 0\leqslant q\leqslant b+s-t,$$

$$0\leqslant r\leqslant b+s-t+p-q;$$

элементы матрицы каждого из корневых аффиноров представления — рациональные числа.

Кроме того, даны все линейные представления для алгебр Ли A_1, D_2, C_2, A_2; в отличие от результата И. М. Гельфанда и М. Л. Цетлина (Докл. АН СССР, 1950, 71, №№ 5,6) при $n=2$ матрицы корневых аффиноров указанных представлений также рациональны. Г. Б. Гуревич

9622. Заметка о муфанг-лиевых кольцах. Клейнфельд (A note on Moufand-Lie rings. Kleinfeld Erwin), Proc. Amer. Math. Soc., 1958, 9, № 1, 72—74 (англ.)

А. И. Мальцев (РЖМат, 1956, 7204) кольца с тождественными соотношениями:
$x^2=0$; $(xy)(xz)=[(xy)z]z+[(yz)x]x+[(zx)x]y$ назвал муфанг-лиевыми кольцами. В работе доказывается, что муфанг-лиево кольцо L характеристики взаимно простой с 2 и обладающее таким элементом x, что $xL=L$, является кольцом Ли. А. И. Ширшов

9623. Об эквивалентности представлений конечных групп группами автоморфизмов модулей над дедекиндовыми кольцами. Маранда (On the equivalence of representations of finite groups by groups of automorphisms of modules over Dedekind rings. Maranda J.-M.), Canad. J. Math., 1955, 7, № 4, 516—526 (англ.)

Пусть K — поле отношений дедекиндова кольца I, $\mathfrak{p}$ — простой идеал кольца I, T — кольцо всех $\mathfrak{p}$ — целых элементов поля K, G — группа порядка n; $\mathfrak{p}_1,\ldots,\mathfrak{p}_r$ — различные простые делители числа n в I; A, D и F — групповые кольца группы G соответственно над кольцами K, T и I.

Каждый свободный от кручения (над I) F-модуль однозначно порождает A-модуль $K\mathfrak{M}$ и D-модуль $T\mathfrak{M}$. Условимся говорить, что F-модули $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}_1$ I-эквивалентны, T-эквивалентны и K-эквивалентны, если соответственно F-изоморфны, D-изоморфны и K-изоморфны модули $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}_1$, $T\mathfrak{M}$ и $T\mathfrak{M}_1$, $K\mathfrak{M}$ и $K\mathfrak{M}_1$.

Пусть R, $R(\mathfrak{p})$ и R_g — разбиения класса Σ всех K-эквивалентных между собой конечных F-модулей $\mathfrak{M}$

соответственно на подмножества I-эквивалентных, T-эквивалентных и T-эквивалентных при любом простом идеале $\mathfrak{p}$ модулей, а r, $r(\mathfrak{p})$ и r_g — числа подмножеств в разбиениях R, $R(\mathfrak{p})$ и R_g.

Оказывается, что $R_g = \bigcap_{i=1}^{r} R(\mathfrak{p}_i)$ и $r_g = \prod_{i=1}^{r} r(\mathfrak{p}_i)$.

Если представление группового кольца A над полем K, соответствующее любому модулю $K\mathfrak{M}$ ($\mathfrak{M} \in \Sigma$) абсолютно неприводимо, то $r = hr_g$, где h — число классов идеалов в кольце I.

Отсюда вытекает конечность числа r для случая, когда I — кольцо целых алгебраических величин конечного расширения K поля рациональных чисел.

С. Д. Берман

9624. Трансфинитные операции теории упорядоченности. Шмидт (Die transfiniten Operationen der Ordnungstheorie. Schmidt Jürgen), Math. Ann., 1957, 133, № 5, 439—449 (нем.)

Полуструктурой называется частично упорядоченное множество с одним рефлексивным, транзитивным и антисимметричным отношением $\leq$, для каждых двух элементов a и b которого существует такой элемент $c = a \vee b$, что $a \leqslant c$, $b \leqslant c$, а если $a \leqslant d$, $b \leqslant d$, то $c \leqslant d$. На основе эквивалентности $a \leq b \leftrightarrow a \vee b = b$ бинарную операцию $(a, b) \to a \vee b$ можно положить в основу определения полуструктуры. Полуструктура есть алгебраическая система с одной ассоциативной, коммутативной и идемпотентной операцией, т. е.

$$\text{(I) } (a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c), \quad \text{(II) } a \vee b = b \vee a,$$
$$\text{(III) } a \vee a = a.$$

В работе рассматриваются операции в упорядоченном множестве, которые не являются неограниченно выполнимыми. В одной операции может участвовать не только конечное, но и бесконечное множество любой мощности элементов из рассматриваемого упорядоченного множества.

Понятие операции вводится следующим образом. Рассматривается абстрактное (позднее упорядоченное) множество E и однозначное отображение f некоторой области индексов I в основное множество E. Такое отображение f ставит в соответствие каждому элементу i из области индексов I один элемент $f(i) = f_i \in E$; в приложениях автор говорит о семействе f_i, $f = (f_i)_{i \in I}$. Операция Ω опять (здесь она не неограниченно выполнима) такого рода семейству или отображению f однозначно ставит в соответствие элемент $\Omega(f) = x \in E$, что записывается так $x = \Omega_{i \in I} f(i)$.

Ассоциативность имеет место только для специальных, так называемых двойных семейств; такое двойное семейство $f = (f_p)_{p \in P}$ отличается тем, что его область индексов P состоит из упорядоченных пар $p(i, k)$ ($i \in I$, $k \in K_i$); изменения k рассматриваются при фиксированном i. Такое семейство f есть функция двух переменных i и k или матрица $(f_{ik})_{i \in I,\, k \in K_i}$; при фиксированном $i \in I$ семейство $(f_{ik})_{k \in K_i}$ есть i-я строчка матрицы (аналогично для столбца).

Ассоциативность имеет место только в предположении, что для каждого индекса строчки i существует результат

$$\text{(AO)} \quad \Omega_{k \in K_i} f(i, k) = g(i) \quad i\text{-й строчки};$$

тогда ассоциативность словами выразится так: результат результатов строчек равен результату матрицы.

Другими словами: В предположении (AO) следующие уравнения эквивалентны:

$$\text{(A 1)} \ \Omega_{i \in I} g(i) = x \text{ и (A2) } \Omega_{\substack{i \in I \\ k \in K_i}} f(i, k) = x$$

Трансфинитная операция с этим свойством называется ассоциативной. Точно в таком смысле операция V или «supremum» в любом упорядоченном множестве E ассоциативна.

Абстрактная операция Ω называется коммутативной, если имеет место следующее: пусть $\Omega_{i \in I} f(i) = x$ и p — некоторая перестановка области индексов I, тогда $\Omega_{i \in I} f(p(i)) = x$.

Коммутативность есть инвариантность относительно специального преобразования индексов, именно перестановки индексов. Под общим инвариантом преобразования понимается следующее:

Пусть (T1) $\Omega_{i \in I} f(i) = x$ и t — взаимно однозначное отображение (преобразование) одной «новой» области индексов J на «старую» область индексов I, и пусть из (T1) следует (T2) $\Omega f(t(j)) = x$. Операция, удовлетворяющая этому условию, называется инвариантной. Заметим, что из (T2) следует (T1). Для обобщения идемпотентности существенно, чтобы взятое семейство не было пустым. Если f — непустое семейство и $f(i) = x$ (для всех $i \in I$), то операция Ω называется идемпотентной при условии, что и $\Omega_{i \in I} f(i) = x$. Ясно, что операции «supremum» и «infimum» не только ассоциативны, но инвариантны и идемпотентны.

Приведем в заключение первую теорему: Если Ω — ассоциативная, инвариантная идемпотентная операция, то инвариантность при преобразованиях имеет место не только при взаимно однозначных преобразованиях, но даже для всех однозначных преобразований индексов в следующей форме: если t однозначное (не необходимо однозначно обратимое) отображение J на I, то $\Omega_{j \in I} f(i) = x$ эквивалентно с $\Omega_{j \in J} f(t(j)) = x$.

В. И. Шнейдмюллер

9625. Теорема о структурах с делением. Мурата (A theorem of residuated lattices. Murata Kentaro), Proc. Japan Acad., 1957, 33, № 10, 639—641 (англ.)

Доказано, что структура с делением (Биркгоф Г., Теория структур, М., Изд-во ин. лит., 1952) при определенных условиях является коммутативной полной l-группой, которую можно разложить в прямое произведение ее бесконечных циклических подгрупп.

Л. М. Глускин

9626. Об аксиомах теории мультиструктур. Якубик Ян, Чехосл. матем. ж., 1956, 6, № 3, 426—430 (рез. франц.)

Решаются две проблемы, поставленные Бенадо, а именно доказывается; 1) Аксиома VI второго определения мультиструктуры (РЖМат, 1958, 6541) не зависит от остальных. 2) Существуют ассоциативные мультиструктуры, не являющиеся структурами. Если мультиструктура $\mathfrak{M}$ ассоциативна и если для любых $a, b, \in \mathfrak{M}$ множества $a \vee b$ и $a \wedge b$ непусты, то $\mathfrak{M}$ есть структура.

А. Х. Лившиц

9627. Свободная булева σ-алгебра со счетным числом образующих. Такэути (The free Boolean σ-algebra with countable generators. Takeuchi Kensuke), J. Math., 1953, 1, № 2-3, 77—79 (англ.)

Доказано, что свободная булева σ-алгебра изоморфна телу всех борелевских подмножеств канторова дисконтинуума. Этим положительно решается 79-я проблема Г. Биркгофа.

И. В. Стеллецкий

9628. Об одном доказательстве в алгебре Дюбрея. Митринович (Sur une démonstration dans l'algèbre de Dubreil. Mitrinovitch Dragoslav S. Publ. Elektrotehn. fak. Univ. Beogradu.

Ser. mat. i fiz., 1956, № 10, 3 p.) (франц.; рез. сербохорв.)

Указывается на неполноту доказательства дистрибутивности кольца множеств в книге Дюбрея (Dubreil P., Algèbre, t. 1, Paris 1946; и второе издание — РЖМат, 1956, 8580).

Примечание референта. Ввиду очевидной симметрии дистрибутивного закона, замечание автора не существенно. И. В. Стеллецкий

9629. **Функциональные представления некоторых алгебраических систем. Вильямсон** (On the functional representation of certain algebraic systems. Williamson J. H.), Pacif. J. Math., 1957, 7, № 2, 1251—1277 (англ.)

Пусть K — поле, A — коммутативная алгебра над полем K с единицей e, а B — подалгебра алгебры A, содержащая единицу. Подмножество $J \subset B$ называется B-идеалом, если оно является идеалом алгебры B.

Обозначим через K' поле K с присоединенным к нему таким элементом ∞, что $\infty + \lambda = \infty$ для всех $\lambda \in K'$ и $\lambda\infty = \infty$ для всех отличных от нуля $\lambda \in K'$. Введем в рассмотрение функцию $f(a, J)$, принимающую значения в K' и заданную для всех $a \in A$ и всех линейных подпространств $J \subset B$, не содержащих единицы:

$$f(a,J) = \begin{cases} \lambda, & \text{если } a - \lambda e \in J \\ \infty, & \text{если } a - \lambda e \in J \text{ для всех } \lambda \in K. \end{cases}$$

Очевидно, функция $f(a, J)$ определена однозначно. Она представляет собою аналог функции Гельфанда $x(M) = M(x)$, принимающей значения в поле комплексных чисел и заданной для всякого элемента x и всякого максимального идеала M данного коммутативного нормированного кольца R. В работе изучается круг вопросов, возникающих по аналогии с теорией представления коммутативного нормированного с помощью функций $x(M) = M(x)$ кольца.

Однако топологические аспекты теории не затрагиваются.

Приводятся примеры B-идеалов в различных алгебрах функций и линейных операторов. Вводятся понятия B-спектра и B-радикала. Изучаются алгебры над топологическими полями, а также (соответствующим образом определенные) самосопряженные алгебры. Отмечается связь построенной теории с теорией полей алгебраических функций от одной независимой переменной. В. Э. Лянце

9630. **Некоторые подмодули простых колец с инволюцией. Херштейн** (Certain submodules of simple rings with involution. Herstein I. N.), Duke Math. J., 1957, 24, № 3, 357—364 (англ.)

Пусть A — простое кольцо с инволюцией $x \to x^*$ ($x, x^* \in A$), K — множество всех кососимметрических элементов из A, т. е. $x \in K$, если $x^* = -x$, S — множество всех симметрических элементов A, т. е. $x \in S$, если $x^* = x$. Центр A обозначим через Z. Будем предполагать, что или $Z = (0)$, или размерность A над Z больше 16. Если L и M — аддитивные подгруппы кольца A, то через $[L, M]$ обозначим аддитивную подгруппу, порождаемую всеми элементами вида $lm - ml$, где $l \in L$, $m \in M$, а через $L^\circ M$ — аддитивную группу, порождаемую всеми элементами вида $lm + ml$.

Теорема 1. Если характеристика A отлична от 2, а U — аддитивная подгруппа множества K, причем $U^\circ S \subset U$, то либо $U = (0)$, либо $U = K$.

Теорема 2. Если характеристика A отлична от 2 и 3, а U — аддитивная подгруппа множества S, причем $[U, [K, K]] \subset U$, то или $U \subset Z$, или $U \supset [K, S]$.

Пользуясь теоремой 2, автор вновь доказывает теорему Бакстера: $K^\circ K = S$. Д. А. Супруненко

9631. **Об инъективных модулях. Морита, Кавада, Татикава** (On injective modules. Morita Kiiti, Kawada Yutaka, Tachikawa Hiroyuki), Math. Z., 1957, 68, № 3, 217—226 (англ.)

Пусть A — кольцо с единицей, удовлетворяющее условию минимальности для левых идеалов. Доказано, что если фактор-модули M_1 и M_2 проективного A-модуля P имеют конечное число образующих, то любой изоморфизм $M_1 \approx M_2$ индуцируется некоторым автоморфизмом $P \approx P$. Доказано также двойственное утверждение: любой изоморфизм между подмодулями инъективного A-модуля Q, имеющими конечное число образующих, индуцируется некоторым автоморфизмом модуля Q. Далее доказаны следующие утверждения: а) любой инъективный A-модуль разлагается в прямую сумму неразложимых модулей; б) инъективный модуль тогда и только тогда неразложим, когда его полупростая часть (т. е. аннулятор радикала кольца A) является простым модулем; в) если все простые A-модули вкладываются в инъективный модуль Q, то для любого A-модуля L и любого его подмодуля L_0 имеет место следующее соотношение двойственности: Ann (Ann(L_0 Hom(L,Q)); L) = L_0, обобщающее соотношение двойственности для модулей характеров над квазифробениусовыми кольцами (РЖМат, 1958, 8631); г) кольцо эндоморфизмов полупростой части $S(Q)$ инъективного A-модуля Q изоморфно факторкольцу кольца эндоморфизмов модуля Q по идеалу, состоящему из всех эндоморфизмов, равных нулю на $S(Q)$. Указывается, что для проективных модулей имеют место утверждения, двойственные утверждениям в) и г). Эти утверждения формулируются без доказательств. В качестве применения полученных результатов авторы доказывают, что кольцо A тогда и только тогда квазифробениусово, когда оно инъективно как левый A-модуль (ср. loco citato). Отсюда вытекает, что кольцо A тогда и только тогда квазифробениусово, когда любой A-модуль вкладывается в проективный (или даже в свободный) модуль, а также, когда любой A-модуль является фактор-модулем инъективного модуля. М. М. Постников

9632. **Гомологическая размерность и сизигии. Эйленберг** (Homological dimension and syzygies. Eilenberg Samuel), Ann. Math., 1956, 64, № 2, 328—336 (англ.)

Излагается аксиоматическая теория, являющаяся обобщением результата Гильберта о цепях сизигий и соответствующих результатов Картана — Эйленберга (РЖМат, 1956, 6427). Используется терминология цитированной работы.

Пусть $\Lambda = \Lambda_0 + \Lambda_1 + \Lambda_2 + \ldots$ — градуированное кольцо и N — его радикал, являющийся пересечением всех максимальных (однородных) левых идеалов кольца Λ. Рассматривается категория ${}_\Lambda\mathfrak{M}$ (соответственно $\mathfrak{M}_\Lambda$) градуированных левых (правых) Λ-модулей. Левый Λ-модуль называется квазисвободным, если он является прямой суммой проективных модулей, каждый из которых порожден единственным (однородным) элементом. Квазисвободный модуль имеет вид: $\Sigma_i \Lambda e_i b_i$, где b_i — образующие некоторого свободного модуля, а e_i — идемпотенты кольца Λ.

Будем предполагать, что: 1) кольцо $K = \Lambda/N$ полупросто; 2) любой идемпотент в K является образом идемпотента из Λ_0.

Подкатегория $\mathfrak{A}$ из $\mathfrak{M}$ называется совершенной, если выполнены следующие условия (аксиомы):

1) Если A, $B \in \mathfrak{A}$ и α: $A \to B$ (гомоморфизм), то $\alpha \in A$.

2) Если α: $A \to B$ является эпиморфизмом (т. е. гомоморфизмом A на B), и $A \in \mathfrak{A}$, тогда $B \in \mathfrak{A}$.

3) $\Lambda \in \mathfrak{A}$.

4) Если Λ-модуль P квазисвободен и $P/NP \in \mathfrak{A}$, то $P \in \mathfrak{A}$.

5) Если $A \in \mathfrak{A}$ и $NA = A$, то $A = 0$.

Рассматриваются совершенные категории, в которых выполнена также дополнительная аксиома:

6) Если $A \in \mathfrak{A}$ и $B \subset A$, то $B \in \mathfrak{A}$.

Эпиморфизм $\varphi\colon P \to A$ называется минимальным, если P проективен и $\ker \varphi \subset NP$. Показывается существование и единственность такого эпиморфизма для любого $A \in \mathfrak{A}$. Отсюда следует, что для любого $A \in \mathfrak{A}$ можно построить проективную резольвенту $\ldots \xrightarrow{d_n} X_n \xrightarrow{d_1} X_{n-1} \to \ldots \to X_0 \xrightarrow{\varepsilon} A \to 0$, где $I_m d_{i+1} \subset NX_i$ $(i = 0, 1, 2)$. Эта резольвента также называется минимальной.

Для любого модуля $A \in \mathfrak{A}$ показывается равносильность следующих условий:

1) Минимальная резольвента X модуля A имеет размерность, не превосходящую n.

2) Левая проективная размерность $l\dim_\Lambda A$ модуля A не превосходит n.

3) $\operatorname{Ext}_\Lambda^{n+1}(A, K) = 0$.

4) $\operatorname{Tor}_{n+1}(K, A) = 0$.

Отсюда вытекают следующие основные теоремы о размерностях. Обозначим $gl.\dim_\Lambda A = \sup l.\dim_\Lambda A$ и предположим, что ${}_\Lambda\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}_\Lambda$ содержат совершенные подкатегории, удовлетворяющие аксиоме 6). Тогда:

1) $gl.\dim_\Lambda \mathfrak{M} \leqslant r.\dim_\Lambda K$; $gl.\dim_\Lambda \mathfrak{M} \leqslant inj.l.\dim_\Lambda K$

2) Если n таково, что $\operatorname{Tor}_n(K_1 K) \neq 0$, $\operatorname{Tor}_{n+1}(K, K) = 0$, то $l.\dim_\Lambda K = gl.\dim_\Lambda \mathfrak{M} = n = gl.\dim \mathfrak{M}_\Lambda = r.\dim_\Lambda K_0$.

Устанавливаются некоторые случаи, для которых эти теоремы применимы: а) Λ_0 — нетерово кольцо и Λ_n — конечно порождаемы как Λ_0-модули; б) $N_0 = N \cap \Lambda_0$ нильпотентен, т. е. Λ_0 — полупримарное кольцо. В частности, получаются результаты о градуированных и локальных кольцах (РЖМат, 1956, 6427), а также результаты Ауслендера о полупримарных кольцах (РЖМат, 1958, 8634).

Если $\Lambda = K(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — кольцо многочленов от неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ над полупростым кольцом K и $A = \Lambda/I$, где I — некоторый идеал кольца Λ, то теорема (2) приводит к известному результату Гильберта о цепях сизигий, которые реализуются с помощью минимальной резольвенты. И. З. Розенкноп

9633. Гомологическая размерность в локальных кольцах. Ауслендер, Буксбаум (Homological dimension in local rings. Auslander Maurice, Buchsbaum David A., Trans. Amer. Math. Soc., 1957, 85, № 2, 390—405 (англ.)

Пусть R — локальное кольцо, m — максимальный его идеал. К известным соотношениям $\dim R \leqslant (m/m^2 : R/m) \leqslant \operatorname{gl.dim} R$ добавлены два новых $\operatorname{f.gl.dim} R = \operatorname{codim}_R R \leqslant \dim R$. Здесь $\operatorname{f.gl.dim} R = \sup.\dim_R E$ для всех R-модулей E с $\dim_R E < \infty$; $\dim_R E$ и $\operatorname{gl.dim} R$ — определяемые обычным образом гомологическая размерность (длина проективной резольвенты) и глобальная размерность; $\dim R$ — размерность Крулля, $\operatorname{codim}_R E$ — наименьшая верхняя грань длин E-последовательностей $x_1, \ldots, x_s$, подчиняющихся требованиям, чтобы $x_i \in R$ не были делителями нуля в $E/(x_1, \ldots, x_{i-1})E$ и $E/(x_1, \ldots, x_s)E \neq 0$. Доказано, что превращение найденных соотношений между гомологическими и чисто алгебраическими инвариантами в цепочку равенств может служить другим определением регулярного локального кольца. Результаты, полученные вначале для регулярных локальных колец, переносятся затем (при естественном обобщении всех понятий) на коммутативные нетеровы кольца с единицей. Проверяется выполнение «условия уплотнения» цепей для простых идеалов и справедливость теоремы Коэна — Маколея. Доказано, что всякое коммутативное нетерово наследственное кольцо является прямой суммой конечного числа дедекиндовых колец. Найдены некоторые свойства колец Зарисского. Часть результатов была опубликована авторами ранее (РЖМат, 1958, 6534) без подробных доказательств. А. И. Кострикин

9634. О когомологиях алгебр Ли. Леджер (On cohomology of Lie algebras. Leger George F., Jr), Proc. Amer. Math. Soc., 1957, 8, № 6, 1010—1020 (англ.)

Как известно, группы когомологий алгебр Ли в малых размерностях можно интерпретировать как группы некоторых расширений. Автор определяет последние группы как модули и доказывает, что известные стандартные изоморфизмы между группами когомологий и группами расширений оказываются при этом изоморфизмами модулей. М. М. Постников

9635. Q-ядра с операторами. Кобб, Тейлор (On Q-kernels with operators. Cobbe Anne P., Taylor R. L.), Quart. J. Math., 1957, 8, № 29, 13—38 (англ.)

Пусть G — аддитивная абелева группа с мультипликативной группой P в качестве группы левых операторов. Множество D авторы называют дистрибутивным пространством над парой (P, G), если группы P и G определены как группы левых операторов множества D, причем $p(g + d) = pg + pd$ (результат применения к элементу $d \in D$ оператора $p \in P$ обозначается через pd, а оператора $g \in G$ — через $g + d$). Кроме того, требуется также, чтобы группа G была просто транзитивной группой операторов, т. е. чтобы для любых двух элементов $d, d' \in D$ существовал такой однозначно определенный элемент $g \in G$, что $g + d = d'$; этот элемент обозначается через $d' - d$. Очевидно, что формула $(\lambda d)p = pd - d$ каждому элементу $d \in D$ относит некоторый коцикл $\lambda d \in z^1(P; G)$. Все коциклы вида λd принадлежат одному и тому же классу когомологий $\lambda(D)$, который авторы называют девиацией дистрибутивного пространства D. Без труда проверяется, что отображение $D \to \lambda(D)$ устанавливает взаимооднозначное соответствие между непустыми дистрибутивными пространствами (рассматриваемыми с точностью до изоморфизмов) и элементами группы $H^1(P; G)$.

Пусть теперь Q и k — произвольные (вообще говоря, не абелевы) аддитивные группы, в которых действует группа P. Автоморфизм группы Q (соответственно группы K), индуцированный элементом $p \in P$, авторы обозначают через p_Q (соответственно через p_K). Как известно, любое расширение $0 \to K \xrightarrow{\sigma} E \xrightarrow{\rho} Q \to 0$ группы Q с помощью группы K определяет некоторое Q-ядро θ, т. е. гомоморфное отображение группы Q в группу $O(K) = A(K)/I(K)$, где $A(K)$ (соответственно $I(K)$) — группа всех (соответственно всех внутренних) автоморфизмов группы K. Оказывается, что расширения (σ, E, ρ) и $p(\sigma, E, \rho) = (\sigma p_K^{-1}, E, p_Q \rho)$ тогда и только тогда имеют одно и то же Q-ядро θ, когда $\theta(p_Q q) = \nu(p_K + \theta(q) - \nu(p_K)$, где ν — естественное отображение $A(K) \to O(K)$. Таким образом, если Q-ядро θ удовлетворяет этому условию для всех $p \in T$, то группа P определяется как группа операторов множества Ext всех расширений с данным Q-ядром θ (рассматриваемых с точностью до изоморфизма). С другой стороны, группа P естественным образом определяется также и как группа операторов группы $H^2(Q; Z_K)$, где Z_K — центр группы K. Наконец, известно, что группа $H^2(Q; Z_K)$ действует в группе Ext (как группа сдвигов). Основной результат: множество Ext является дистрибутивным пространством над парой $(P, H^2(Q; Z_K))$. Девиацию этого дистрибутив-

ного пространства авторы обозначают через $\chi_1 \in H^1(P; H^2(Q; Z_K))$. Не любое дистрибутивное пространство над парой $(P, H^2(Q; Z_K))$ имеет вид Ext для некоторого θ, т. е. элементы вида χ_1 заполняют, вообще говоря, только некоторую подгруппу группы $H^1(P; H^2(Q; Z_K))$. Авторы дают полное внутреннее описание этой подгруппы. В частном случае, когда группа P тривиально действует на K, эта подгруппа является образом некоторого естественного гомоморфизма $H_0^3(\bar{Q}; Z_K) \to H^1(P; H^2(Q; Z_K))$, где $\bar{Q}$ — фактор-группа группы Q по подгруппе, порожденной всеми элементами вида $pq—q$, а $H_0^3(\bar{Q}; Z_K)$ — ядро естественного гомоморфизма $H^3(\bar{Q}; Z_K) \to H^3(Q; Z_K)$. В заключительной главе работы детально рассмотрен случай, когда группа Q циклична. Полученные здесь результаты опровергают, в частности, одно утверждение из предыдущей работы одного из авторов (Cobbe A. P. Quart. J. Math., 1951, 2, № 2, 269—285). М. М. Постников

9636. Полярные модули. Рис (Polar modules. Rees D.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1957, 53, № 3, 554—567 (англ.)

Векторное пространство M над полем K, рассматриваемое вместе с некоторым кольцом A его линейных преобразований, автор называет геометрическим модулем, если 1) кольцо A является гомоморфным образом некоторого кольца многочленов S; 2) пространство M имеет (как A-модуль) конечное число образующих. Геометрический модуль M автоматически является S-модулем, так что определены (также геометрические) модули $T^r(M) = \operatorname{Ext}_S^{n-r}(M, S)$, где n — число образующих кольца S. Оказывается, что модули $T^r(M)$ не зависят от выбора кольца S и равны нулю, если $r<0$ или $r>d$, где d — степень трансцендентности кольца A. Аналогичный результат (с естественным сдвигом размерностей) имеет место и для градуированных (в понятном смысле) геометрических модулей. Особое внимание автор уделяет модулю $M^* = T^d(M)$, который он называет модулем, полярным к модулю M. В частности, автор подробно изучает естественный гоморфизм $M \to M^*$ и доказывает, что $M^{**} \approx M^{***}$.

М. М. Постников

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ СХЕМ СВЯЗИ И УПРАВЛЕНИЯ

9637. Об одном семействе классов функций алгебры логики, допускающих простую схемную реализацию. Яблонский С. В., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 2. М., АН СССР, 1956, 149

9638. О классах функций алгебры логики, допускающих простую схемную реализацию. Яблонский С. В. Успехи матем. наук, 1957, 12, № 6, 189—196

Развернутое изложение ранее опубликованных тезисов (реф. 9637).

Класс Q функций алгебры логики называется инвариантным, если он содержит 0 и 1 и инвариантен относительно операций подстановок констант и переименования переменных (без отождествления). Вводятся обозначения: P_2 — класс всех функций алгебры логики; $P_Q(n)$ — число функций из класса Q, зависящих от переменных $x_1, \ldots, x_n$; $L_Q(n)$ (соответственно $L(n)$) — минимальное число контактов, достаточное для реализации любой функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ из Q (соответственно из P_2). Доказываются утверждения: 1) Каждый инвариантный класс Q является дополнением к сумме множеств Π_{g_i} функций, таких что всякая функция из Π_{g_i} при некоторой подстановке констант переходит в функцию g_i (общую для всех функций из Π_{g_i}), причем $g_i \notin Q$, но при любой подстановке констант g_i переходит в функцию из Q.

2) Если $Q \neq P_2$, то $P_Q(n) / 2^{2^n} \to 0$ при $n \to \infty$.

3) Последовательность $\{\sqrt[2^n]{P_Q(n)}\}$ стремится, не возрастая, к пределу ρ, причем $1 \leqslant \rho \leqslant 2$.

4) Основная теорема: Для того чтобы $\lim_{n\to\infty} L_Q(n) / L(n) = 0$ (где Q — инвариантный класс), необходимо и достаточно, чтобы $\lim_{n\to\infty} \sqrt[2^n]{P_Q(n)} = 1$. Эта теорема выясняет условия, при которых инвариантный класс состоит из функций, допускающих существенно более простую схемную реализацию, чем в общем случае.

5) Множество инвариантных классов, для которых $\lim_{n\to\infty} \sqrt[2^n]{P_Q(n)} = 0$ (а также множество всех инвариантных классов) имеет мощность континуума.

О. Б. Лупанов

9639. Электронный анализатор контактных схем. Родин В. Н., Автоматика и телемеханика, 1957, 18, № 5, 437—443

Описан принцип действия и конструктивные особенности электронного устройства, предназначенного для анализа контактных двухполюсников, содержащих контакты не более чем 6 реле. Анализатор определяет комбинации состояний реле, при которых двухполюсник замкнут или разомкнут, а также позволяет проверять возможность упрощения двухполюсника путем удаления (укорачивания или замыкания) лишних контактов.

Анализатор является электронным аналогом релейного схемного анализатора Шеннона и Мура (РЖМат, 1954, 5289), но имеет большую емкость (6 реле против 4) и не решает задачу определения типов контактов, необходимых для схемной реализации заданной булевой функции. Преимуществом электронного анализатора является его быстродействие (64 комбинации состояний шести реле выдаются за 0,3 сек). Приведены принципиальные схемы основных узлов анализатора.

П. П. Пархоменко

9640. Определение минимального числа промежуточных реле при синтезе многотактных схем. Лазарев В. Г., Сб. научн. работ по проводн. связи, АН СССР, 1956, вып. 5, 93—103

Рассматривается вопрос определения минимального числа промежуточных реле, которые должны быть введены в синтезируемую схему для того, чтобы обеспечить необходимые состояния исполнительных цепей при определенной последовательности действия приемных элементов. При выборе этого минимального числа промежуточных реле не учитываются ограничения по возможному размещению числа контактов на каждом из реле. Показывается, что вычисление точного числа промежуточных реле связано с анализом последовательности действия приемных реле для каждой конкретной схемы.

Приведены верхняя и нижняя оценки минимального числа промежуточных реле, причем эти оценки дают результаты, отличающиеся только на одно реле; оценки зависят от параметра, получаемого из условий работы схемы, без анализа последовательности действия приемных реле. Этим параметром служит наибольшее число таких повторяющихся одинаковых состояний приемных реле, при которых комбинации состояний исполнительных цепей различны или после-

довательность поступления состояний приемных реле является существенной (например, последовательность срабатывания импульсного реле счетной схемы).

Если обозначить это число через $m_{\max}$, то

$$2^{S_H} \geqslant m_{\max}, \qquad 2^{S_B} \geqslant 2m_{\max} - 1,$$

где S_H, S_B нижняя, соответственно, верхняя границы минимального числа промежуточных реле.

Указывается на возможность сближения верхней и нижней границ, что позволяет уменьшить число случаев, когда имеется расхождение между верхней и нижней границами по числу промежуточных реле. Приведены примеры, иллюстрирующие предложенную методику. Библ. 6 назв. В. Г. Лазарев

9641. Алгебраическое изучение импульсной техники посредством операторов. Сильвейра (Tratamento algébrico da técnica dos impulsos mediante operadores. Silveira Miguel da), Técnica, 1955, 30, № 256, 63—71 (порт.)

Преобразования, которые претерпевают последовательности δ импульсных функций $\delta(t)$ и последовательности μ единичных функций $H(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt$, могут быть представлены в операторной форме, с помощью линейной комбинации элементарных операторов. К последним, в частности, относятся и скалярные операторы, реализуемые идеальным атенюатором и усилителем. Действие этих операторов сводится к умножению указанных функций времени на постоянную величину и они не входят в рассмотрение. Амплитуды импульсов δ и μ являются техническими параметрами. Они должны превышать некоторый минимум, чтобы импульс оказывал действие, и в то же время не должны достигать определенного предела во избежание нежелательных эффектов. При этих условиях импульс δ может быть схематически представлен посредством псевдоимпульсной функции или псевдофункции Дирака, отнесенной к моменту t', при котором начинается реакция на этот импульс, т. е.

$$\delta_{t'} = DH(t - t'),$$

где D — оператор обобщенной производной (в смысле теории распределений), H — единичная функция.

Тогда импульсы μ длительности k при тех же ограничениях на амплитуду описываются функцией

$$\mu_{t',k} = H(t - t') - H(t - t' - k).$$

В качестве элементарных физических операторов рассматриваются: D — оператор производной, U — одновибратор, S — избиратель амплитуды, T — оператор переноса (сдвиг во времени). При взаимодействии оператором $U(k)$ на импульс $\delta_{t'}$ последний преобразуется в $\mu_{t'}$ длительностью k:

$$U(k)\,\delta_{t'} = \mu_{t',k}.$$

Автор устанавливает, что можно приближенно считать U обладающим свойствами линейного преобразования и рассматривать его как линейный оператор.

Оператор S распределяется на два следующих: S_α^+, воздействующий на ту часть функций, значение которых не превышает α, и S_α^- для функций, значение которых больше α. При некоторых ограничениях на область применения эти операторы можно считать линейными. Если воздействовать оператором S на результат дифференцирования μ, то получим:

$$S^+ D\mu_{t',k} = S^+(\delta_{t'} - \delta_{t'+k})\,\delta_{t'},$$

$$S^- D\mu_{t',k} = S^-(\delta_{t'} - \delta_{t'+k}) = -\delta_{t'+k}.$$

Таким образом, действие S^+ и S^- сводится к выбору из последовательности импульсов δ тех из них, которые соответствуют определенному моменту. В этом случае действие оператора $S^\pm$ может быть отождествлено с действием оператора проекции E, определенного в пространстве значений импульсов δ. Этот оператор уже является линейным. Зависимость между E и S следующая:

$$S^+ D\mu_{t',k} = E_t D\mu_{t',k},$$

$$S^- D\mu_{t',k} = E_{t'+k} D\mu_{t',k}.$$

Операторы D, S^+, S^- и U можно рассматривать как линейные, если выполнены следующие требования: а) оператор D применяется к импульсам μ без какого-либо ограничения; б) операторы могут встречаться только в комбинации $S^\pm D$; этим последним оператором можно воздействовать лишь на импульсы μ фиксированной полярности: в) оператором $U(k)$ можно воздействовать на последовательность импульсов δ с периодом $> k$, где k — длительность импульса.

С помощью линейной комбинации D, U, S и T получаются сложные операторы. Устанавливается изоморфизм между параллельным и последовательным соединением физических операторов и соответственно суммой и произведением их символов в аналитическом выражении. Дан пример построения блок-схемы генератора двойных импульсов на основе приведенного операторного метода. Г. К. Москатов

9642. Переключательные функции трех переменных. Дейвис (Switching functions of three variables. Davies D. W.), IRE Trans. Electronic Comput., 1957, 6, № 4, 265—275 (англ.)

Рассматриваются переключательные функции трех переменных. Функции и переменные могут принимать только два значения: 0 и 1. Показано, что переключательные функции трех переменных могут быть выражены через переключательные функции двух переменных. Так, $F_1\{F_2[A,F_3(B,C)], F_4(B,C)\}$ представляет любую переключательную функцию трех переменных, если выбрать подходящим образом переключательные функции F_1, F_2, F_3 и F_4. Определяется, какое наименьшее число переключательных функций двух переменных необходимо для выражения каждой из переключательных функций трех переменных. Для решения поставленной задачи используются свойства симметрических переключательных функций. Исследуются выражения, которые могут представлять любую переключательную функцию трех переменных путем перестановки переменных. Исследования проводятся с помощью «логических диаграмм», дающих более наглядное представление, чем структурные формулы переключательных функций. П. П. Пархоменко

9643. Универсальные тьюринговы машины. Упражнение в кодировании. Ван (Universal Turing machines: An exercise in coding. Wang Hao), Z. math. Logik und Grundl. Math., 1957, 3, № 2, 69—80 (англ.)

На основе своей предыдущей работы (РЖМат, 1958, 7445) автор рассматривает «общие машины с двумя запоминающими устройствами». Эти машины работают с бесконечной лентой, на которой они могут стирать и записывать символы согласно внутренней программе, хранящейся во втором запоминающем устройстве и выполняющей выбор (скачки). Если P и Q — такие машины, то через $U_{p,q}$ обозначается машина с последовательным запоминающим устройством, получаемая из Q вводом в нее программы, позволяющей машине Q имитировать любое поведение машины P, когда на ленту машины Q нанесена программа для машины P. Машины $U_{p,q}$ суть универсальные тьюрин-

говы машины. Базисная машина B есть минимальная общая машина с двумя запоминающими устройствами: она пользуется только двумя символами, обходится без стирания, имеет только один скачок (однако число команд в программе особо не ограничено).

В статье строится программа для машины B, делающая эту машину машиной $U_{b,b}$. Отмечается, что эта задача намного сложнее задач проектирования машин $U_{b,w}$ и $U_{w,w}$, где W — машина, получаемая из B добавлением операции стирания. Отмечается важность такого абстрактного программирования и рекомендуется специалистам и научным учреждениям уделить ему внимание. Рассматриваются возможности соединения машин типа $U_{b,b}$ с самовоспроизводящимися машинами Неймана (Neumann John von, Cerebral mechanisms in behavior (the Hixon symposium), Wiley, 1952). Высказывается мнение, что тем самым получится лучшая модель роста и развития живых организмов.

Г. Н. Поваров

9644. Заметка об одной задаче по комбинаторике. Трукко (Note on a combinatorial problem. Trucco Ernesto), Bull. Math. Biophys., 1957, 19, № 4, 309—336 (англ.)

Статья посвящена ряду вопросов теории соединений, непосредственно связанных с биотопологической трансформацией ($T^{(1)}X$) Решевского (РЖМат, 1957, 2127, 2128), и содержит ряд теорем, частью оригинальных, частью цитируемых, посвященных расчету количества возможных сочетаний (соответственно размещений) n немеченных или меченых объектов по m меченым или немеченым пакетам. В 1-й части даются рекуррентные формулы для расчета R_m^n - сочетаний из общего числа n меченых объектов при m немеченых пакетах: $R_m^n = m \cdot R_m^{n-1} + R_{m-1}^{n-1}$, где $R_1^n = R_n^n = 1$, и рассматривается связь числа R с коэффициентами разложения в ряд функции $(e^x - 1)^m$. Задача Рашевского связана с обратным случаем распределения n немеченых объектов по m меченым пакетам. Величина G_n, выражающая количество возможных здесь распределений при соблюдении некоторых ограничений (суммарно для всех m от 1 до n), представляет собою полное количество графов, получаемых для данного n по трансформации Рашевского. Общее число распределений, без учета ограничений, равно в данном случае $m!/a_0!\,a_1!\ldots a_n!$, где a_i выражают количества пакетов, вмещающих по i объектов. Называя «композицией» распределение обеъктов с учетом их порядка (размещение), автор вводит и анализирует последовательно функции $\Phi_n^{\rho,\alpha}$ — число композиций из n объектов по ρ положительным группировкам, при условии $\rho \leqslant \alpha$, и функцию $\Psi_{m,n}^{\rho,\alpha}$ — число композиций, ограничиваемых условием «допустимости» (допустима та композиция, части которой могут быть разбиты на m групп по n объектов в каждой, например, при $\rho = \alpha = n = 5$, $m = 2$, $mn = 10 = 1, 2, 2; 2, 3$). Дается доказательство основного вывода, что искомая функция имеет вид $G_n = \Sigma_{m=1}^{n} \Psi_{m,n}^{n,n}$ — это выражение, в принципе позволяющее вычислить ее. Ввиду трудоемкости принятия в расчет условия допустимости, автор дает: 1) огрубленную верхнюю границу в виде $G_n < \frac{1}{2} n^{n-1}$; 2) таблицу рассчитанных им значений G_n для n от 1 до 9.

Н. А. Бернштейн

9645. Анализ коммутационных схем. Ли (Analysis of switching networks. Lee C. Y.), Techn. J., 1955, № 6, XXXIV, 1287—1315 (англ.)

Приводится анализ коммутационных схем с помощью упрощенной математической модели коммутационной схемы. Даются методы отыскания некоторых характеристик схемы, таких как вероятность блокировки, функция распределения времени ожидания, функция распределения времени соединения. Рассматривается вопрос о минимизации числа точек соединения.

Основным понятием, которое используется автором для получения модели коммутационной схемы, является вероятностный линейный граф. Вероятностным линейным графом G автор называет конечный ориентированный связный граф, имеющий по крайней мере две вершины (начальную и конечную), каждому звену которого приписана случайная переменная xi_t. Случайные переменные $x^i{}_t$ взаимно независимы и имеют стационарные распределения вероятностей.

$f^{(i)}_{i_1, i_2, \ldots, i_n}(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n) = P[x^{(j)}_{i_j} = \delta_j, j = 1, 2, \ldots, n]$, где $\delta_j = 0$ или 1; $j = 1, 2, \ldots, n$.

Пусть линейный вероятный граф G имеет B прямых путей между начальной и конечной вершинами и пусть каждый прямой путь $\beta_i \in B$ содержит некоторое число звеньев с соответствующими случайными переменными $x_t^{(i_1)}, x_t^{(i_2)}, \ldots$ Каждому $\beta_i \in B$ припишем новую случайную переменную $y_t^{(j)}$, являющуюся функцией $x_t^{(i_1)}, x_t^{(i_2)}, \ldots$ так чтобы $y_t^{(j)} = 1$ тогда и только тогда, когда, $x_t^{(j_k)} = 1$, $k = 1, 2, \ldots$, а в противном случае $y_t^{(j)} = 0$. Функцией соединения назовем φ_τ, если $\varphi_\tau = 0$ тогда и только тогда, когда $y_t^{(j_k)} = 0$, $k = 1, 2, \ldots$ В противном случае $\varphi_\tau = 1$. Автор называет $P[\varphi_\tau = 1]$ вероятностью соединения, $P[\varphi_\tau = 0]$ — вероятностью блокировки, условную вероятность $P[\varphi_{\tau+t} = 0 / \varphi_\tau = 0]$ — функцией распределения времени ожидания, а совместную вероятность $\Phi = P[\varphi_t = 1 \text{ и } \psi \leqslant t]$, где ψ — время установления соединения, — функцией распределения времени соединения.

Приводятся примеры вычисления указанных выше характеристик для случаев последовательного графа, параллельного графа, параллельно-последовательного графа и графа класса H (непараллельно-последовательного). Вычисления осуществляются обычными методами теории вероятностей. Отождествляя коммутационную схему с ее математической моделью — вероятностным линейным графом, автор подсчитывает характеристики коммутационных схем с тремя и четырьмя ступенями соединения.

Подчеркивается приближенный характер предлагаемого метода вычисления характеристик коммутационных схем, и эта мысль иллюстрируется на примере трехступенной полнодоступной коммутационной схемы, предложенной Клосом (Clos Ch., Bell System Techn. J., 1953, 32, 406—424).

Автор указывает на желательность совместного рассмотрения коммутационных схем и их управляющих устройств и отмечает, что в настоящее время такая постановка задачи встречает большие трудности. Библ. 10 назв.

А. Д. Харкевич

9646. О распределении времен завершения для случайной связи в работонаправленной группе со специальным строением. Хатори (On the distribution of completion times for random communication in the task-oriented group with a special structure. Hatori Hirohisa), Kodai Math. Semin. Repts, 1957, 9, № 1, 23—33 (англ.)

Работонаправленной группой названо множество индивидуумов, снабженных сетью связи. Первоначально каждый индивидуум имеет единицу информации, которая должна быть передана всем другим для завершения работы. Каждый период передачи инди-

видуум посылает всю приобретенную им информацию другому индивидууму, выбранному случайно в рамках возможностей, представляемых сетью связи. Подсчитывается распределение времен завершения работы для одной частной группы. Библ. 4 назв.

Г. Н. Поваров

9647. Кратчайшая соединительная сеть и некоторые обобщения. Прим (Shortest connection networks and some generalizations. Prim R. C.), Bell System Techn. J., 1957, 36, № 6, 1389—1401 (англ.)

Основная рассматриваемая задача — задача соединения заданного множества полюсов кратчайшей возможной сетью прямых линий. Даются простые и практичные методы для решения этой задачи как графически, так и расчетно. Показано, что эти методы дают также решение для гораздо более широкого класса задач, содержащих другие примеры, представляющие практический интерес. Резюме автора

9648. Формальные методы для соединения полюсов проводами с минимальной общей длиной. Лоберман, Уэйнбергер (Formal procedures for connecting terminals with a minimum total wire length. Loberman H., Weinberger A.), J. Assoc. Comput. Machinery, 1957, 4, № 4, 428—437 (англ.)

9649. Разбиение, тензоры и топологические модели. Крон (Tearing, tensors and topological models. Kron Gabriel), Amer. Scientist, 1957, 45, № 5, 401—413 (англ.)

Имеется много важных, но весьма громоздких задач, непосредственное решение которых не может обеспечить даже современная электронная вычислительная техника. Кроме того, многие задачи (например в экономике, организации производства и т. п.) пока не могут быть даже сформулированы математически. Автор излагает метод, дающий возможность анализировать и иногда — решать подобные задачи. Его подход состоит в совместном использовании тензорного анализа, топологических моделей в виде электрических цепей и физического или функционального разбиения таких цепей на меньшие части. Метод не требует реализации электрических цепей; используются лишь их схемы. Физическое разбиение ведет к облегчению или ускорению вычислений, тогда как функциональное разбиение ориентируется на более правильное и наглядное физическое толкование.

Рассмотрены два ограничения метода разбиения. Во-первых, заданную систему уравнений нельзя непосредственно подвергать разбиению. Необходимо сначала построить топологическую модель системы, описываемой данными уравнениями; разбиению подвергается именно эта модель. Во-вторых, важно, чтобы число разрываемых связей было значительно меньше, чем число независимых переменных. Поэтому задачи о системах с большим числом связей (например, задача об n тяготеющих телах) не могут быть решены методом разбиения.

Подробно описаны стадии метода разбиения. Сначала производится разбиение схемы на части. На следующем этапе части рассматриваются как изолированные: силы взаимодействия между полученными частями отбрасываются. Уравнения, описывающие поведение каждой части, могут быть решены (в частности, с помощью вычислительной техники). Затем, не возвращаясь к исходной схеме, строят компактную эквивалентную схему разорванных связей. Часто оказывается возможным решить уравнение, описывающее полученную таким образом систему. Отмечаются возможности дальнейшего развития метода разбиения и его трудности. Приводятся примеры (в виде ссылок на другие работы автора) практического применения метода для решения некоторых задач (например, нахождение собственных значений; задача о трехмерном реакторе; решение системы нелинейных уравнений и др). Библ. 13 назв. Ф. П. Тарасенко

См. также: 9763, 10007, 10018, 10031, 10343. 10344

ТОПОЛОГИЯ

Редакторы *П. С. Александров, А. С. Шварц*

9650. Пространства Пеано, которые являются или строго циклическими, или двуциклическими. Строл (Peano spaces which are either strongly cyclic or two-cyclic. Strohl G. Ralph, Jr), Trans. Amer. Math. Soc., 1957, 86, № 2, 297—308 (англ.)

Пусть M — локально связный континуум (пространство Пеано, в терминологии автора). Пространство M называется строго линейно связным (строго циклическим) в точке $p \in M$, если для бесконечной последовательности различных точек $p_n \in M$, сходящейся к p, в M существует простая дуга (простая замкнутая линия), содержащая бесконечно много точек последовательности p_n. Пространство M называется двуциклическим в точке p, если для каждой бесконечной последовательности различных точек $p_n \in M$, сходящейся к p, можно найти две такие простые дуги Γ_1, $\Gamma_2 \subset M$, что каждая из них содержит бесконечно много точек последовательности p_n и $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = p$.

Автор устанавливает связи между понятиями строгой линейной связности, строгой цикличности и двуцикличности, приводит признаки строгой цикличности и двуцикличности. Одна из основных теорем работы:

Теорема II. Для того чтобы циклическое пространство Пеано M было строго циклическим в каждой точке $p \in M$, необходимо и достаточно, чтобы для каждой бесконечной совокупности открытых подмножеств пространства M существовала простая замкнутая линия, пересекающая бесконечно много этих подмножеств.

Следствие. Если пространство Пеано M не разбивается никакими двумя его точками, то M строго циклично в любой точке $p \in M$. А. С. Пархоменко

9651. Аппроксимации монотонных отображений некомпактных двумерных многообразий. Хокинг (Approximations to monotone mappings on noncompact two dimensional manifolds. Hocking J. G.), Duke Math. J., 1954, 21, № 4, 639-651 (англ.)

В первой части статьи автор доказывает несколько простых лемм относительно вложения бесконечных комплексов в евклидово пространство и другие вспомогательные теоремы. Вторая часть посвящена изучению отображений двумерных многообразий (многообразия предполагаются вложенными в евклидово пространство E^5). Отображение φ называется r-монотонным, если прообраз каждой точки ацикличен в размерностях $\leqslant r$.

Изучаются отображения двумерных многообразий, которые можно аппроксимировать гомеоморфизмами. Следующие теоремы являются типичными:

1. Пусть M — равномерно локально связное в размерностях $\leqslant 1$ двумерное многообразие, f — равно-

мерно непрерывное (в метрике пространства E^5) отображение многообразия M в себя. Отображение f может быть равномерно аппроксимировано гомеоморфизмами многообразия M тогда и только тогда, когда f — компактное 1-монотонное отображение.

2. Пусть M — двумерное многообразие, одномерное число Бетти которого конечно. Тогда всякое компактное монотонное отображение многообразия M на себя 1-монотонно.

Кроме того, доказывается ряд теорем относительно аппроксимации компактных отображений двумерных многообразий, при которых прообраз каждой точки ацикличен в размерности 1, рыхлыми отображениями (т. е. отображениями, при которых прообраз каждой точки вполне несвязен). С. С. Рышков

9652. Об униформизации непрерывных функций. Липинский (Sur l'uniformisation des fonctions continues. Lipiński J. S.), Bull. Acad. polon. sci., 1957, Cl. 3, 5, № 11, 1019—1021, LXXXV (франц.; рез. русск.)

Доказывается теорема. Пусть непрерывные функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ определены и принимают значения в отрезке $[0; 1]$, удовлетворяют условиям $f_1(0) = f_2(0) = 0$, $f_1(1) = f_2(1) = 1$ и не постоянны ни на каком интервале. Тогда каждая компонента плоского множества A, состоящего из точек (x, y), для которых $f_1(x) = f_2(y)$, локально связна.

Из этого утверждения вытекает следующее предложение, полученное японским математиком Хомма (Homma T., Kodai Math. Sem. Repts, 1952, 1, 13—16): Если функции f_1 и f_2 удовлетворяют наложенным выше условиям, то существуют такие функции φ_1 и φ_2, определенные на отрезке $[0 : 1]$, что $f_1(\varphi_1(t)) = f_2(\varphi_2(t))$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$. А. С. Пархоменко

9653. Включение метрических пространств. Ковальский (Einbettung metrischer Räume. Kowalsky Hans-Joachim), Arch. Math., 1957, 8, № 5, 336—339 (нем.)

Звездным пространством называется метрическое пространство, полученное из произвольного множества отрезков $[0,1]$, склеенных в точке 0, причем расстояние между двумя точками одного отрезка определяется обычным образом, а расстояние между двумя точками разных отрезков определяется как сумма их расстояний до точки 0. Доказана следующая теорема, являющаяся обобщением на пространства любого веса известной теоремы Урысона о том, что пространство со счетной базой тогда и только тогда метризуемо, когда оно гомеоморфно подмножеству гильбертова фундаментального параллелепипеда:

Топологическое пространство R тогда и только тогда метризуемо, когда оно может быть топологически включено в произведение счетного числа звездных пространств.

При доказательстве того, что всякое метрическое пространство обладает указанным свойством, используется и доказывается существование базы пространства, распадающейся на счетное число систем, в каждой из которых множества попарно не пересекаются. Это условие является более слабым, чем существование σ-дискретной базы, определенной в работе Бинга (Bing R. H., Canadian J. Math., 1951, 3, 175—186). Поэтому метризационная теорема Бинга вытекает из теоремы Ковальского. И. В. Проскуряков

9654. О функционально-замкнутых пространствах. Кубенский А. А., Докл. АН СССР, 1957, 117, № 5, 748—750

Расширение p (вполне регулярного) пространства P автор называет правильным, если на него можно непрерывно продолжить всякую непрерывную (действительную) функцию, определенную на P. Пространство P автор называет функционально-замкнутым, если у него нет отличных от себя правильных расширений. Класс функционально-замкнутых пространств совпадает с классом Q-пространств Хьюитта. Нуль-множеством пространства P называется каждое множество, являющееся полным прообразом точки при некотором (непрерывном) отображении в прямую.

Теорема 1. Если расширение $\widetilde{P}$ пространства P правильно, то для любой счетной системы нуль-множеств Φ_i пространства P имеем: $\widetilde{P}[\bigcap_i \Phi_i] = \bigcap_i \widetilde{P}[\Phi_i]$; если для любой счетной системы нуль-множеств пространства P с пустым пересечением также и $\bigcap_i \widetilde{P}[\Phi_i] = \varnothing$, то расширение $\widetilde{P}$ правильно. Автор с помощью максимальных счетно-центрированных систем нуль-множеств строит максимальное правильное расширение — оно автоматически оказывается функционально-замкнутым — и доказывает его единственность. В конце выясняется связь между понятиями функциональной замкнутости и топологической полноты в смысле Дьедонне. Для нормальных пространств достаточно широкого класса мощностей (достижимых в слабом смысле по Тарскому) эти понятия эквивалентны. Н. В. Смирнов

9655. Некоторые свойства Q-пространств. Мрувка (Some properties of Q-spaces. Mrówka S.), Bull. Acad. polon. sci., 1957, Cl. 3, 5, № 10, 947—950, LXXX (англ.; рез. русск.)

Множество $A \subset X$ называется Q-замкнутым в X, если для каждой точки $p \in X \setminus A$ найдется множество $G \subset X$ типа G_δ, такое что $p \in G$ и $A \cap G = \varnothing$.

Доказаны теоремы:

1) Пространство X является Q-пространством тогда и только тогда, когда для каждой точки $p_0 \in \beta X \setminus X$ найдется непрерывная вещественная функция f, определенная на βX, такая, что $f(p_0) = 0$ и $f(p) > 0$ для всех $p \in X$.

2) Если X — нормальное пространство и $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, где каждое A_n замкнуто в X, и A_n являются Q-пространствами в их относительной топологии, то X также является Q-пространством. Приводится пример, показывающий, что требование нормальности пространства X здесь существенно.

3) Пусть X — Q-пространство. Если $A \subset X$ и Q замкнуто в X, то A есть Q-пространство. А. А. Кубенский

9656. Об обобщенных пространствах близости. Рудкин Н. Г., Матем. сб., 1957, 43, № 3, 397—400

Автор вводит обобщенные δ'- и δ_3-пространства близости, заменяя аксиому отделимости В. А. Ефремовича одной из следующих аксиом: δ') если $x, y \in P$ и $x \neq y$, то существует такое открытое множество Γ, что $x \delta \Gamma \delta y$; δ_3) если $x \in P$, $A \subseteq P$ и $X \overline{\delta} A$, то существуют непересекающиеся замкнутые δ-окрестности Ox и OA. Для δ'-пространств методом А. Д. Александрова доказывается, что они обладают абсолютно замкнутыми δ'-расширениями. Для δ_3-пространств — что во всякий бикомпакт можно ввести одну и только одну совместимую с его топологией близость, удовлетворяющую аксиоме δ_3.

Примечание референта. Для второго результата вместо аксиомы δ_3 можно взять более слабую аксиому δ_2) если $x, y \in P$ и $x \neq y$, то существуют далекие δ-окрестности Ox и Oy. Ю. М. Смирнов

9657. О методе категории в аналитических многообразиях. Бальцежик, Мыцельский (On the method of category in analytic manifolds. Balcerzyk S., Mycielski Jan), Fundam. math., 1957, 44, № 3, 295—299 (англ.)

Пусть M — связное действительное аналитическое многообразие. Множество $S \subset M$ называется аналитической поверхностью в многообразии M, если сущест-

вуют связное открытое множество $C \subset M$, $C \supset S$, аналитическое многообразие A и аналитические отображения f_1, f_2: $C \to A$, не совпадающие тождественно на C, но совпадающие на $S \subset C$.

Теорема 1. Объединение семейства аналитических поверхностей многообразия M нигде не плотно в M, если мощность семейства меньше мощности континуума.

Теорема 2. Объединение семейства выпуклых поверхностей евклидова пространства E^n нигде не плотно в E^n, если мощность семейства меньше мощности континуума. Очевидно, что обе теоремы следуют из справедливости континуум-гипотезы.

А. Д. Тайманов

9658. **О теореме вложения для несепарабельных метрических пространств.** Нагата (On imbedding theorem for nonseparable metric spaces. Nagata Jun-iti), J. Inst. Polytechn. Osaka City Univ., 1957, A8, № 1, 9—14 (англ.)

Обобщаются теорема Небелинга — Понтрягина о вложении пространств со счетной базой размерности $\leqslant n$ в $(2n+1)$-мерный куб Q^{2n+1} и теорема Шпильрайна о связи между размерностью и n-мерой.

Назовем N-базой всякую базу пространства R, распадающуюся в сумму счетного числа звездно-конечных покрытий (покрытие называется звездно-конечным, если каждый его элемент пересекается лишь с конечным числом других его элементов). Обобщенное бэровское пространство $B^{\mathfrak{m}}$ строится из последовательностей элементов абстрактного множества B мощности $\mathfrak{m}$ таким же способом, как обычное бэровское пространство из последовательностей натуральных чисел. Размерность понимается в смысле покрытий.

Теорема 1. Всякое регулярное пространство с N-базой размерности $\leqslant n$ гомеоморфно вкладывается в тихоновское произведение $B^{\mathfrak{m}} \times Q^{2n+1}$ пространства $B^{\mathfrak{m}}$ на $(2n+1)$-мерный куб.

Теорема 2. Метрическое пространство с N-базой имеет размерность $\leqslant n$ и вес $\geqslant \mathfrak{m}$ тогда и только тогда, когда оно гомеоморфно вкладывается в тихоновское произведение $B^{\mathfrak{m}} M^n_{2n+1}$ пространства $B^{\mathfrak{m}}$ на множество M^n_{2n+1}, состоящее из всех точек куба Q^{2n+1}, у которых не более чем n координат рациональны.

Теорема 3. Каждое метрическое пространство с N-базой размерности $\leqslant n$ гомеоморфно некоторому подмножеству произведения $B^{\mathfrak{m}} \times Q^{2n+1}$, обладающему $(n+1)$-мерной плотностью нуль.

Теорема 4. Всякое метрическое пространство $(n+1)$-мерной плотности нуль имеет размерность $\leqslant n$.

Понятие множества, обладающего в данном метрическом пространстве n-мерной плотностью нуль, является обобщением аналогичного понятия, принадлежащего Шпильрайну (Szpilrajn, Fundam. math., 1937, 28).

Ю. М. Смирнов

9659. **Продолжение отображений в n-мерный куб.** Форт (Extensions of mappings into n-cubes. Fort M. K., Jr), Proc. Amer. Math. Soc., 1956, 7, № 3, 539—542 (англ.)

Пусть X — метрическое сепарабельное пространство. Отображение f, заданное на подмножестве B пространства X, называется отображением типа k на $A \subset B$, если $\dim (A \cap f^{-1}(y)) \leqslant k$ для любой точки y образа A.

Пусть $\dim X = m > n$ и f — непрерывное отображение в замкнутый n-мерный куб I^n, заданное на замкнутом подмножестве $A \subset X$ типа $m - n$ на A. Доказано, что f можно распространить в отображение всего пространства X в I^n так, что продолженное отображение имеет тип $m - n$ на X.

Р. Л. Фрум-Кетков

9660. **О некоторых топологических инвариантах в евклидовом пространстве.** Куратовский (Sur quelques invariants topologiques dans l'espace euclidien. Kuratowski K.), J. math. pures et appl., 1957, 36, № 2, 191—200 (франц.)

Пусть A и B — замкнутые собственные подмножества n-мерной сферы S^n. Через Int A обозначаем множество внутренних точек A, Fr A — границу A, p^r — r-мерное число Бетти по полю рациональных чисел; f везде обозначает непрерывное отображение A на B. В заметке рассмотрен вопрос о связи чисел Бетти множеств $S^n \setminus A$ и $S^n \setminus B$.

Теорема 1. Если A содержит множество F, которое посредством f отображается топологически на Fr B, то $p^r(S^n \setminus B) \leqslant p^r(S^n \setminus A)$, $0 \leqslant r \leqslant n-1$.

Теорема 2. Пусть $p^0(S^n \setminus \mathrm{Fr}\, A) < \infty$. Тогда существует такое $\varepsilon > 0$, зависящее от множества A, что если выполнены условия: 1) $(\mathrm{In}\, t\, A) \cap f(\mathrm{Fr}\, A) = \emptyset$; 2) f на Fr A является ε-отображением, то $p^0(S^n \setminus A) \leqslant p^0(S^n \setminus B)$.

Автор распространяет определение затухающего отображения в смысле К. А. Ситникова на отображение замкнутых множеств и доказывает, что если f — затухающее отображение замкнутого множества A на B, то $p^r(S^n / A) = p^r(S^n \setminus B)$.

В формулировке определения затухающего отображения в смысле К. А. Ситникова допущена опечатка: вместо $< \delta$ стоит $> \delta$.

Р. Л. Фрум-Кетков

9661. **Непрерывные отображения подмножеств n-мерной сферы.** Майкл (Continuous mapping of subsets of the euclidean n-sphere. Michael J. H.), Bull. Acad. polon. sci., 1957, Cl. 3, 5, № 2, 133—137, XII (англ.; рез. русск.)

Обозначения см. реф. 9660. Доказано, что если f — непрерывное отображение A на B, удовлетворяющее условиям: 1) $f(\mathrm{Int}A) \cap f(\mathrm{Fr}A) = \phi$, 2) f на FrA является топологическим отображением, — то $f(\mathrm{Fr}A) = \mathrm{Fr}B$ и, значит, $f(\mathrm{Int}A) = \mathrm{Int}\, B$.

Для случая когда Int$A$ состоит из одной компоненты, эта теорема была доказана К. Куратовским.

На стр. 134 опечатка: вместо $d(f,U,y) \neq 0$ напечатано $d(f,U,y) = 0$.

Р. Л. Фрум-Кетков

9662. **Непрерывные отображения в неодносвязные пространства.** Дугунджи (Continuous mappings into nonsimple spaces. Dugundji J.), Trans Amer. Math. Soc., 1957, 86, № 1, 256—268 (англ.)

Дается классификация отображений n-мерного полиэдра в неодносвязное пространство, асферичное в размерностях меньших n (фактически в работе решается несколько более общая задача, которая также относится к сформулированной, как задача, решенная Эйленбергом (Ann. Math., 1940, 41, 231—251) относится к задаче Хопфа — Уитни). Решение основывается на переходе к покрывающим пространствам и осуществляется тем же методом, которым Гордон (Изв. АН СССР. Сер. матем., 1952, 16, вып. 2) решил аналогичную задачу для отображений в проективные пространства. Какие-либо ссылки на работу Гордона отсутствуют.

М. М. Постников

9663. **Препятствия к вложению полиэдра в евклидово пространство. I. Первое препятствие.** Шапиро (Obstructions to the imbedding of a complex in a Euclidean space. 1. The first obstruction. Shapiro Arnold), Ann. Math., 1957, 66, № 2, 256—269 (англ.)

Развивается теория первого препятствия к вложению n-мерного разбиения K в r-мерное евклидово пространство E^r. Очевидно, что достаточно рассматривать лишь

такие отображения $f: K \to E^r$, что $f(\sigma) \cap f(\tau) = \emptyset$ для любых непересекающихся симплексов σ, $\tau \in K$, сумма размерностей которых меньше r. Тогда для любых непересекающихся симплексов σ, $\tau \in K$, сумма размерностей которых равна r, определен индекс пересечения $m_f(\sigma, \tau)$ особых симплексов $f(\sigma)$ и $f(\tau)$. Функцию $m_f(\sigma, \tau)$ можно рассматривать как коцепь разбиения K^*, получающегося из произведения $K \times K$ удалением всех произведений $\sigma \times \tau$ симплексов σ и τ, имеющих общие вершины. Эта коцепь симметрична (т. е. $m_f \times \times(\sigma, \tau) = m_f(\tau, \sigma)$), если r четно, и антисимметрична, если r нечетно. Кроме того, она является коциклом. Оказывается, что его класс когомологий m^r (соответственно, по симметрическим или антисимметрическим коцепям) не зависит от f, т. е. является инвариантом разбиения K. Этот инвариант называется первым препятствием к вложению разбиения K в пространство E^r. Равенство его нулю необходимо для вложения разбиения K в пространство E^r и при $n \leqslant r-3$ достаточно для существования такого отображения $f: K \to E^r$, что $f(\sigma) \cap f(\tau) = \emptyset$ для любых непересекающихся симплексов σ, $\tau \in K$, сумма размерностей которых не превосходит r. Этот основной результат доказывается с помощью довольно сложных геометрических конструкций, восходящих к Уитни. Из него, в частности, непосредственно вытекает, что при $n \geqslant 3$ разбиение K тогда и только тогда можно вложить в E^{2n}, когда $m^{2n} = 0$. Этот результат был впервые доказан (с незначительными лакунами) ван-Кампеном (конечно, в иных терминах).

В работе установлена также интересная связь между инвариантами m^r для различных r. Именно, оказывается, что $m^r = (m^1)^r$. Имеются опечатки. Например, в формуле на стр. 267, строка 12 снизу, вместо $b(\sigma, \tau)$ должно быть $\delta b(\sigma, \tau)$. М. М. Постников

9664. Двойственность в теории гомотопий. Спанье р, Уайтхед (Duality in homotopy theory. Spanier E. H., Whitehead J. H. C.), Mathematika, 1955, 2, № 1, 56—80 (англ.)

Показывается, что некоторые соотношения двойственности, уже замеченные в теории гомотопий (например, двойственность между гомотопическими и когомотопическими группами) наиболее четко проявляется в S-теории (реф. 9663).

Подпространство A пространства X называется S-деформационным ретрактом, если S — отображение вложения $A \to X$ является S-эквивалентностью, т. е. если для него существует S-обратное S-отображение $X \to A$ (деформационная S-ретракция). Полиэдр $Y \subset S^n$ называется n-двойственным к полиэдру $X \subset S^n$, если $Y \subset S^n \setminus X$ и является S-деформационным ретрактом пространства $S^n \setminus X$. В этом случае Y обозначается через $D_n X$. Оказывается, что $X = D_n D_n X$, $D_{n+1} SX = = D_n X$ и, следовательно, $D_{n+1} X = S D_n X$.

Пусть X и Y — произвольные полиэдры, лежащие в сфере S^n. Оказывается, что если $X \cap Y = \emptyset$, то цилиндр любого непрерывного отображения $f: X \to Y$ можно реализовать в виде некоторого полиэдра P, лежащего в сфере S^q, где $q \geqslant n$, причем существуют такие полиэдры $D_q X$, $D_q Y$ и $D_q P$, что $D_q P \subset D_q X \cap D_q Y$ и $S^{q-n} D_n X \subset D_q X$, $S^{q-n} D_n Y \subset D_q X$, где $D_n X$ и $D_n Y$ — фиксированные полиэдры n-двойственные к полиэдрам X и Y соответственно. Полиэдры $S^{q-n} D_n X$, $S^{q-n} D_n Y$ и $D_q P$ являются, очевидно, S-деформационными ретрактами полиэдров $D_q X$, $D_q Y$ и $D_q Y$ соответственно. Следовательно, определено составное S-отображение

$$S^{q-n} D_n Y \to D_q Y \to D_q P \to D_q X \to S^{q-n} D_n X. \qquad (1)$$

С другой стороны, отображение S^{q-n}_* является изоморфным отображением группы S-отображений $D_n Y \to D_n X$ на группу S-отображений $S^{q-n} D_n Y \to S^{q-n} D_n X$. Следовательно, S-отображению (1) соответствует некоторое S-отображение $D_n Y \to D_n X$. Оказывается, что это S-отображение не зависит от произвола построения и определяется исключительно гомотопическим классом отображения f. Оно обозначается через $\Delta_n[f]$.

Пусть теперь $X \cap Y \neq \emptyset$. Очевидно, что для достаточно большого $q \geqslant n$ в множестве $S^q \setminus (X \cup Y)$ можно найти полиэдр X_1, гомеоморфный полиэдру X. Пусть $h_1: X \to X_1$ — соответствующий гомеоморфизм. Тогда определены S-отображения $\Delta_q[h_1]: D_q X_1 \to S^{q-n} D_n X$ и $\Delta_q[f h_1^{-1}]: S^{q-n} D_n Y \to D_q X_1$, где $D_q X_1$ — произвольный полиэдр, q-двойственный к полиэдру X_1. Оказывается, что S-отображение $D_n Y \to D_n X$, соответствующее (в силу изоморфизма S^{q-n}_*) S-отображению $\Delta_q[h_1] \circ \Delta_q \times \times [f h_1^{-1}]$, не зависит от произвола построения и определяется исключительно гомотопическим классом отображения f. Оно также обозначается через $\Delta_n[f]$.

Пусть, наконец, $\alpha: X \to Y$ — произвольное S-отображение и $g: S^m X \to S^m Y$ — некоторый его представитель. Оказывается, что S-отображение $D_n \alpha: D_n Y \to D_n X$, соответствующее S-отображению $\Delta_{m+n}[g]: S^m D_n Y \to S^m D_n X$, не зависит от выбора g и определяется исключительно S-отображением α. Построенное отображение

$$D_n: \{X, Y\} \to \{D_n Y, D_n X\}$$

(через $\{X, Y\}$ авторы обозначают группу S-отображений $X \to Y$) обладает следующими свойствами:

1) если $\iota: X \subset Y$, то $D_n \iota: D_n Y \subset D_n X$;

2) $D_n(\beta\alpha) = D_n(\alpha) D_n(\beta)$, для любых S-отображений $\alpha \in \{X, Y\}$ и $\beta \in \{Y, Z\}$;

3) $D_{n+1} = S_* D_n$, $D_{n+1} S_* = D_n$.

4) свойства 1) — 3) однозначно характеризуют отображения D_n;

5) отображение D_n изоморфно и $D_n^{-1} = D_n$;

6) отображение D_n не зависит (в понятном смысле) от выбора полиэдров $D_n X$ и $D_n Y$.

Пусть теперь $\Sigma_p(X) = \{S^p, X\}$ и $\Sigma^p(X) = \{X, S^p\}$. Так как за n-двойственный к сфере S^p полиэдр можно принять сферу S^{n-p-1}, то изоморфизм D_n определяет некоторый изоморфизм $\Sigma_p(X) \to \Sigma^{n-p-1}(D_n X)$. Оказывается, что естественные гомоморфизмы $\Sigma_p(X) \to H_p(X)$, $\Sigma^{n-p-1}(D_n X) \to H^{n-p-1}(D_n X)$ переводят этот изоморфизм в изоморфизм двойственности Александера. Так как в случае, когда полиэдр Y k — 1-связен и $\dim X \leqslant \leqslant k-2$, множество $\{X, Y\}$ можно отождествить с множеством гомотопических классов отображений $X \to Y$, то для любого $p \leqslant 2k-2$ изоморфизм $\Sigma_p(X) \to \Sigma^{n-p-1}(D_n X)$ определяет изоморфизм

$$\pi_p(Y) \approx \pi^{n-p-1}(D_n Y),$$

если только $\dim D_n Y \leqslant 2(n-p-2)$ (в частности, если $n \geqslant 2p+4$).

Авторы дуализируют также известную конструкцию приклеивания клеток клеточным разбиениям и рассматривают некоторые примеры. М. М. Постников

9665. О гомотопических группах $(k+1)$ = ад. Окамото (On $(k+1)$ = ad homotopy groups. Okamoto Einosuke), J. Inst. Polytechn. Osaka Univ., 1955, **A6**, № 2, 93—99 (англ.)

Автор вводит понятие $(k+1)$-ады (РЖМат, 1957, 8514), обобщая принадлежащее Блейкерсу и Масси понятие триады (РЖМат, 1954, 5089). Определяются гомотопические группы $(k+1)$-ады, строится точная гомотопическая последовательность $(k+1)$-ады. Указываются некоторые приложения. С. С. Рышков

9666. Некоторые подгруппы гомотопических групп. Кертис, Форт (Certain subgroups of the homotopy groups. Curtis M. L., Fort M. K., Jr), Michigan Math. J., 1957, **4**, № 2, 167—173 (англ.)

Пусть E^{n+1} — евклидово пространство; θ, y_0, y_1, y_2 — точки с координатами $(0, \ldots, 0)$, $(1, 0, \ldots, 0)$, $(0, \ldots, 0, 1)$, $(0, \ldots, 0, -1)$ соответственно; S^n, S_1^n, S_2^n — единичные сферы в E^{n+1} с центрами θ, y_1, y_2 соответственно; W — сумма множеств S_1^n и S_2^n; $t: S^n \to W$ — центральное проектирование с центром θ (если y есть точка сферы S^n с последней координатой 0, то по определению $t(y) = \theta$); $\rho_1: S_1^n \to S^n$ и $\rho_2: S_2^n \to S^n$ — аффинные преобразования, сохраняющие ориентацию и удовлетворяющие условию $\rho_1(\theta) = y_0$, $\rho_2(\theta) = y_0$. Пусть далее X — линейно связное сепарабельное метрическое пространство, x_0 — точка в X и $F_n(X, x_0)$ — множество всех непрерывных отображений $f: S^n \to X$, удовлетворяющих условию $f(y_0) = x_0$. Если $f \in F_n(X, x_0)$ и $g \in F_n(X, x_0)$, то формула

$$fg(y) = \begin{cases} f\rho_1 t(y) & \text{при } y \in t^{-1}(S_1^n), \\ g\rho_2 t(y) & \text{при } y \in t^{-1}(S_2^n) \end{cases}$$

определяет «произведение» $fg \in F_n(X, x_0)$. Известно, что это определение индуцирует в совокупности относительных гомотопических классов отображений $f \in F_n(X, x_0)$ операцию умножения, превращающую эту совокупность в гомотопическую группу $\pi_n(X, x_0)$.

Пусть $\psi: F_n(X, x_0) \to \pi_n(X, x_0)$ — отображение, относящее каждому отображению $f \in F_n(X, x_0)$ его относительный гомотопический класс. Множество $S \subset F_n \times (X, x_0)$ называется g-классом, если $\psi(S)$ есть подгруппа группы $\pi_n(X, x_0)$. В качестве примеров G-классов рассматриваются множество тех $f \in F_n(X, x_0)$, у которых $\dim f^{-1}(x) \leqslant k$ для всех, кроме конечного числа, $x \in X$, и множество тех $f \ni F_n(X, x_0)$, у которых гомологическая группа $H_k(f^{-1}(x))$ обладает конечной системой образующих для всех $x \in X$ (в основу положена группа коэффициентов с конечной системой образующих). Соответствующие подгруппы группы $\pi_n(X, x_0)$ обозначаются через $D_n^k(X, x_0)$ и $M_n^k(X, x_0)$. Они не являются гомотопическими инвариантами пространства X и первая из них зависит, вообще говоря, от выбора точки x_0. Доказывается, что $D_1^0(X, x_0) = \pi_1(X, x_0)$, что $D_n^m(X, x_0) = 0$ при $n > m + k$ и что если X есть k-мерное многообразие, то $D_n^m(X, x_0) = \pi_n(X, x_0)$ при $n \leqslant m + k$. Если X есть конечный полиэдр, то $M_n^k(X, x_0) = \pi_n(X, x_0)$ при любом k. В. А. Рохлин

9667. Приведенное соединение и умножение Уайтхеда. Тода (Reduced join and Whitehead product. Toda Hirosi), J. Inst. Polytechn. Osaka City Univ., 1957, **A8**, № 1, 15—30 (англ.)

Пусть $\alpha \in \pi_{p+1}(S^{m+1})$, $\beta \in \pi_{q+1}(S^{n+1})$. Доказано, что если $p \leqslant \min(n, m-1) + 2m - 1$ и $q \leqslant \min(m, n-1) + 2n - 1$, то

$$E^n\alpha_0 E^p\beta - (-1)^{(p+m)(q+n)} E^m\beta_0 E^q\alpha = [\iota_{m+n+1}, \iota_{m+n+1}] \circ E^{2n}H\alpha \circ E^pH\beta$$

При этом

$$2[\iota_{m+n+1}, \iota_{m+n+1}] \circ E^{2n}H\alpha \circ E^pH\beta = 0.$$

В следующей работе автора (РЖМат, 1958, 1092) этот результат существенно используется при доказательстве несуществования отображений $S^{31} \to S^{16}$ с хопфовским инвариантом единица. М. М. Постников

9668. Произведения в гомотопических и гомологических группах. Дугунджи (Products in homotopy and homology groups. Dugundji J.), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1957, **43**, № 11, 987—988 (англ.)

Пусть Y — хаусдорфово пространство и y_0 — некоторая его точка. Рефлектантом R пространства Y относительно точки y_0 автор называет пространство, получающееся из произведения $Y \times Y$ отождествлением каждой точки вида (y, y_0) с точкой (y_0, y). Если Y является связным абсолютным окрестностным ретрактом, то гомотопический тип рефлектанта R не зависит от выбора точки y_0. Пространство Y естественно вкладывается в пространство R, так что определены группы $\pi_i(R, Y)$. Эти группы равны нулю, т. е. Y является деформационным ретрактом пространства R тогда и только тогда, когда Y является H-пространством с единицей y_0. Прямое умножение отображений индуцирует, очевидно, некоторое (так называемое главное) спаривание $\pi_p(y) \otimes \pi_q(y) \to \pi_{p+q}(R, Y)$. Граничный гомоморфизм $\pi_n(R, Y) \to \pi_{n-1}(Y)$ переводит это спаривание в умножение Уайтхеда. Автор подчеркивает, что эта форма определения умножения Уайтхеда позволяет наиболее просто вывести его свойства, связанные с теорией H-пространств. Например, из сказанного выше непосредственно следует, что сфера S^n тогда и только тогда является H-пространством, когда $[\iota, \iota] = 0$, где ι — образующая группы $\pi_n(S^n)$. Наряду с главным спариванием, автор вводит также спаривание $\pi_p(Y) \otimes \pi_q(Y) \to \pi_{p+q}(R)$, получающееся из главного компонированием его с гомоморфизмом $\pi_n(R, Y) \to \pi_n(R)$, оценивающим отличие тождественного отображения $R \to R$ от отображения $R \to R$, индуцированного перестановкой множителей произведения $Y \times Y$. Если Y является H-пространством, то композиция этого спаривания с отображением $\pi_n(R) \to \pi_n(Y)$, индуцированным ретрагирующим отображением, определяет спаривание $\pi_p(Y) \otimes \pi_q(Y) \to \pi_{p+q}(Y)$, совпадающее с известным умножением Понтрягина.

Аналогичные спаривания, очевидным образом, определяются и для групп гомологий. М. М. Постников

9669. Об инварианте Эйленберга—Маклейна. Андо (A note on Eilenberg—MacLane invariant. Ando Hideo), Tohoku Math. J., 1957, **9**, № 1, 96—104 (англ.)

Известно следующее обобщение классической теоремы Эйленберга и Маклейна о связи между группами когомологий и гомотопическими группами (Blakers, Ann. Math., 1948, **49**, 428—461): Пусть $\mathfrak{S}$ — система последовательно вложенных связных подпространств X_i связ-

ного пространства X, начинающаяся с одноточечного подпространства $X_0 = \{x_0\}$. Рассмотрим подкомплекс $S(\mathfrak{S})$ полного сингулярного комплекса пространства X, состоящий из всех сингулярных симплексов, i-мерные грани которых являются симплексами подпространства X_i. Тогда, если для всех $i < q$ естественные отображения $\pi_i(X_{i-1}) \to \pi_i(X_i)$ равны нулю, то группы $H^i(S(\mathfrak{S}); G)$ определяются группами $\pi_i(X_i, X_{i-1})$ и естественными отображениями $\Delta_i : \pi_i(X_i, X_{i-1}) \to \pi_i(X_{i-1}, X_{i-2})$. Более точно, по группам $\pi_i(X_i, X_{i-1})$ и отображениям Δ_i можно построить такой абстрактный комплекс $K(\pi(\mathfrak{S}))$ (конструкция этого комплекса является непосредственным обобщением конструкции комплекса $K(\pi, n)$, что $H^i(S(\mathfrak{S}); G) \approx H^i(K(\pi(\mathfrak{S})); G)$ для всех $i < q$. Автор обобщает на рассматриваемый случай построение инварианта Эйленберга — Маклейна и доказывает, что соответствующее этому инварианту расширение K^* комплекса $K(\pi(\mathfrak{S}))$ обладает тем свойством, что при указанных выше условиях $H^q(S(\mathfrak{S}) : G) \approx H^q(K^*; G)$.

Примечание референта. На случай семейств $\mathfrak{S}$ без труда переносится вся теория натуральных систем (гомотопических резольвент), начальным этапом которой является теория Эйленберга — Маклейна. С другой стороны, как результаты Блейкерса, так и результаты автора можно непосредственно получить (в по существу эквивалентной форме), рассматривая спектральную последовательность (или, что то же самое, точную пару), соответствующую фильтрации групп когомологий определяемой семейством $\mathfrak{S}$. М. М. Постников

9670. Соотношения между гомотопическими группами и группами гомологий и некоторые их приложения. Чжоу Сюе-гуан, Шусюэ сюэбао, Acta math. sinica, 1957, 7, № 3, 346—369 (кит.; рез. англ.)

Доказывается теорема: Для любого $(n-1)$-связного пространства X естественное отображение $\pi_m(X) \to H_m(X)$ при $m \leqslant 2n-2$ является C_m-изоморфизмом, а при $m \leqslant 2n-1$ является C_{m-1}-эпиморфизмом, где C_k (обозначение референта) — класс периодических абелевых групп, порядок каждого элемента которых делится лишь на простые числа, не превышающие числа $(k-n+3)/2$. Доказываются также обобщения этой теоремы на случай пар пространств и на случай, когда $(n-1)$-связность пространства (или пары) понимается с точностью до класса периодических групп, порядок каждого элемента которых делится лишь на данные простые числа. С помощью этих общих результатов естественные гомоморфизмы гомотопических групп в группы гомологий изучены, в частности, для случая пары вида $(X \times Y)$, $X \vee Y)$ и для случая произвольной триады (X, A, B), обладающей свойством «вырезания». Кроме того, для любого $(n-1)$-связного $(n \geqslant 3)$ пространства X в явном виде определено ядро естественного отображения $\pi_{n+1}(X) \to H_{n+1}(X)$ (оно совпадает с образом гомоморфизма Понтрягина $\pi_n(X) \to \pi_{n+1}(X)$). Соответствующий результат доказан и для $(n-1)$-связных пар. М. М. Постников

9671. О двукратной надстройке E^2. Тода (On the double suspension E^2. Toda Hirosi), J. Inst. Polytechn. Osaka City Univ., 1956, A7, № 1—2, 103—145 (англ.)

Пусть S^n_k — остов размерности nk приведенной степени n-мерной сферы $S^n = S^n_1$. Пространство S^n_k естественным образом вложено в пространство петель $\Omega(S^{n+1})$, так что определены группы $\pi_i(\Omega(S^{n+1}), S^n_k)$. Как известно (Ann. Math. 1955, 62, № 1, 170—197), эти группы при $k=1$ изоморфны группам $\pi_{i+1}(S^{2n+1})$, если n нечетно, и C_2 — изоморфны им, если n четно (через C_p, где p — простое число, обозначается класс абелевых групп, не имеющих p-кручения). Автор доказывает следующее обобщение этого результата: для любого простого p и любого четного n группы $\pi_i(\Omega(S^{n+1}), S^n_{p-1})$ и $\pi_i(\Omega(S^n_{k-1}), S^{n-1})$, где $2 \leqslant k \leqslant p$, а $i > 1$, C_p — изоморфны группам $\pi_{i+1}(S^{pn+1})$ и $\pi_{i+1}(S^{kn-1})$ соответственно. Автор строит также некоторые точные последовательности, связывающие примарные по нечетному p компоненты групп $\pi_i(S^{pn\pm1})$, $\pi_i(\Omega(\Omega(S^{n+1}))), S^{n-1})$ $\pi_i(\Omega(\Omega(S^{pn+1}))), S^{pn-1})$ с группой $\pi_i(S^{pn-1}_{f_p}, S^{pn-1})$, где $S^{pn-1}_{f_p}$ — цилиндр отображения $f_p : S^{pn-1} \to S^{pn-1}$, имеющего степень p. Из этих точных последовательностей, в частности, вытекает, что для любого нечетного n и любого i порядки всех элементов примарной по нечетному p компоненты группы $\pi_i(S^n)$ делят p^{n-1}, а любой элемент этой компоненты, делящийся на p^2, является двукратной надстройкой некоторого p-элемента группы $\pi_{i-2}(S^{n-2})$.

В дополнение к работе автор без доказательства приводит значения p-компонент групп $\pi_i(S^{2n+1})$ для всех $i < 2n + 2(p+2)(p-1) - 3$. Как сообщил референту Стинрод, некоторые из этих p-компонент указаны неправильно. М. М. Постников

9672. Стабильные гомотопические группы классических групп. Ботт (The stable homotopy of the classical groups. Bott Raoul), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1957, 43, № 10, 933—935 (англ.)

Как известно, группы $\pi_k(U(n))$, $\pi_k(O(n))$ и $\pi_k(Sp(n))$ не зависят от n соответственно при $k < 2n$, $k < n$, $k < 4n$. Указанные гомотопические группы называются стабильными гомотопическими группами классических групп Ли и обозначаются соответственно $\pi_k(U)$, $\pi_k(O)$ и $\pi_k(SP)$. Автор доказывает, что $\pi_k(U) = \pi_{k+2}(U)$, $\pi_k(O) = \pi_{k+4}(SP)$ и $\pi_k(SP) = \pi_{k+4}(O)$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$. В соединении с известными фактами: $\pi_0(U) = 0$, $\pi_1(U) = Z$, $\pi_0(O) = Z_2$, $\pi_1(O) = Z_2$, $\pi_2(O) = 0$, $\pi_3(O) = Z$, $\pi_0(SP) = \pi_1(SP) = \pi_2(SP) = 0$, $\pi_3(SP) = Z$, это утверждение дает полное описание стабильных гомотопических групп классических групп Ли. Теорема автора показывает ошибочность некоторых вычислений Тода (РЖМат, 1958, 1925). Доказательство приведенных выше результатов опирается на следующее предложение. Пусть K — компактная группа Ли и s — отрезок геодезической в K, соединяющий единицу группы e с элементом центра w. Обозначим через $\Omega_s(K)$ содержащую s компоненту пространства путей, соединяющих e и w, через K_s — централизатор s и через K^s множество левых смежных классов K/K_s.

Формула $x \to xsx^{-1}$, $x \in K$, очевидно, определяет отображение $f_s : K^s \to \Omega_s(K)$. Если внутри s не содержится точек, сопряженных точке e, то гомоморфизм $f_s^* : H^i(\Omega_s(K), Z) \to H^i(K^s, Z)$ является эпиморфизмом. А. С. Шварц

9673. Продолжения дифференцируемого расслоенного пространства. Эресман (Les prolongements d'un espace fibré differentiable. Ehresmann Charles), C. r. Acad. sci., 1955, 240, № 18, 1755—1757 (франц.)

Пусть Φ — группоид операторов на пространстве E, удовлетворяющий следующим условиям: 1) если $z \in E$, $\theta \in \Phi$, $\theta' \in \Phi$, то элементы $\theta'(\theta z)$ и $(\theta'\theta)z$ определены тогда и только тогда, когда определены $\theta'\theta$ и θz, и при этом $\theta'(\theta z) = (\theta'\theta)z$; 2) если $e \in \Phi$ — единица группоида Φ и ez определено, то $ez = z$; 3) для всякой точки $z \in E$ существует такой $\theta \in \Phi$ и для всякого $\theta \in \Phi$ существует такая точка $z \in E$, что θz определено. Если при этом выполнены естественные условия непрерывности или дифференцируемости, то автор говорит, что задано обобщенное расслоение пространства E с группоидом Φ. Для каждой точки $z \in E$ существует единственная единица $p(z)$, для которой $p(z)z$ определено. Пространство B всех единиц группоида Φ называется базой расслоения, а $p: E \to B$ — проекцией. Рассматриваются также отображение $a: \Phi \to B$, относящее каждому элементу его правую единицу, и отображение $b: \Phi \to B$, относящее левую единицу. Указываются условия, при которых обобщенное расслоение является обычным косым произведением.

Пользуясь обозначениями ранней работы (РЖМат, 1956, 4858), автор рассматривает отображение, сопоставляющее каждой паре (X,z), где $z \in E$, а $X \in \widetilde{J}^r(B, \Phi)$ — струя, начинающаяся в точке $p(z)$, элемент группоида $\widetilde{\Pi}^r(E)$; оно получается из композиции $(\theta, z) \to \theta z$ путем неголономного продолжения. Образ $\widetilde{\psi}$ при этом отображении является подгруппоидом. Пусть E' — продолжение многообразия E относительно $\widetilde{\psi}$. Рассматривается группоид $\widetilde{\Phi}^r$, состоящий из всех струй $X \in \widetilde{J}^r(B, \Phi)$, таких что aX — струя тождественного отображения и что струя BX обратима. Он действует на пространстве E' и определяет обобщенное расслоение с базой B. Аналогичные факты имеют место для полуголономных продолжений.

А. Л. Онищик

9674. Неабелевы когомологии и расслоенные пространства. Френкель (Cohomologie non abélienne et espaces fibrés. Frenkel Jean), Bull. Soc. math. France, 1957, 85, № 2, 135—220 (франц.)

Первая глава работы посвящена понятиям когомологий с коэффициентами в пучке неабелевых групп и точной последовательности когомологий. Во второй главе эти понятия применяются к вопросам классификации расслоенных пространств, а также сокращения и расширения структурной группы расслоенного пространства. В начале третьей главы результаты главы 2 переносятся на случай комплексно-аналитических расслоенных пространств. В частности, доказывается, что если X — компактное аналитическое многообразие, G — классическая комплексная группа, то два расслоенных пространства с базой X и группой G, эквивалентных в полной линейной группе, эквивалентны и в группе G. Затем изучаются расслоенные пространства, структурная группа которых является связной разрешимой комплексной группой Ли G. Рассматриваются условия, при которых справедливы следующие утверждения: А) Два топологически изоморфных аналитических расслоенных пространства с базой X и структурной группой G аналитически изоморфны; Б) Всякое топологически тривиальное аналитическое расслоение с базой X и группой G аналитически тривиально; В) Во всяком главном расслоенном пространстве с базой X и группой G можно ввести аналитическую структуру, превращающую его в аналитическое расслоение. Основной результат автора состоит в том, что если комплексное аналитическое многообразие X таково, что $H^1(X,F) = 0$ для пучка F ростков аналитических сечений любого расслоения на комплексные прямые с базой X, то верно А), а если $H^2(X,F) = 0$, то верно В). Если только $H^1(X,O) = 0$, где O — пучок ростков голоморфных функций, то верно Б), а если при этом группа G нильпотентна, то верно и А). Если $H^2(X,O) = 0$ и G нильпотентна, то верно В).

Далее изучаются некоторые классы многообразий X, удовлетворяющих этим условиям. В частности, получается, что если X — многообразие Штейна, то верны А) и В) (этот результат обобщен Грауэртом (РЖМат, 1958, 8760) на случай произвольной связной комплексной группы Ли G). Аналогичная теорема доказывается для вещественно-аналитических расслоенных пространств, базой которых является вещественное многообразие Штейна, а структурная группа разрешима. Пусть D — область регулярности в аффинном пространстве C^{n+1} комплексных координат $z_0, \ldots, z_n$ и пусть $K_i (i = 0, \ldots, n)$ — такой компакт в плоскости z_i, содержащийся в D, что если $(z_1, \ldots, z_i, \ldots, z_n) \ni D$, то $(z_0, \ldots, z_i, \ldots, z_n) \in D$ для всех $t_i \in K_i$. Положим $K = K_0 \times \ldots \times K_n$. Доказывается, что $H^p(D/K) = 0$ для $0 < p < n$. Отсюда выводится, что если K — компакт вышеуказанного типа в C^{n+1}, то всякое аналитическое расслоенное пространство с базой C^{n+1}/K $(n \geqslant 3)$ и разрешимой группой аналитически тривиально. Затем доказывается, что если F — пучок описанного выше типа на комплексном проективном пространстве P_n, то $H^p(P_n, F) = 0$ для $0 < p < n$, и вычисляются размерности остальных двух групп когомологий. Наконец, изучается случай, когда X есть прямое произведение многообразий перечисленных выше классов. В заключение производится полная классификация аналитических расслоенных пространств, базой которых является произведение комплексных проективных пространств, а группой — группа S подобных преобразований плоскости. В частности, оказывается, что на сфере Римана существуют аналитические расслоения с группой S, которые топологически изоморфны, но аналитически не изоморфны.

А. Л. Онищик

9675. Алгебраическое строение множества классов расслоенных пространств. Дедеккер (La structure algébrique de l'ensemble des classes d'espaces fibrés. Dedecker Paul), Bull. cl. sci. Acad. roy. Belgique, 1956, 42, № 3, 270—290 (франц.)

Пусть B — топологическое пространство, G — топологическая группа, E — расслоение на группы (связка групп) с базой B и слоем G, $\mathcal{E}$ — пучок ростков непрерывных сечений расслоения E. Тогда элементы множества когомологий $H^1(B, \mathcal{E})$ находятся во взаимнооднозначном соответствии с классами расслоенных пространств с базой B и слоем G структурного типа E в смысле Гротендика (РЖМат, 1$_6$58, 4605 К); эти расслоенные пространства называются главными относительно E. Пользуясь тем, что расслоение действует на самом себе при помощи внутренних автоморфизмов группы, каждому расслоению $h \in H^1(B, \mathcal{E})$ можно сопоставить ассоциированное с ним расслоение на группы с базой B и слоем G. Пусть теперь g — некоторое главное (в обычном смысле, т. е. относительно $E = B \times G$) расслоенное пространство, g' — ассоциированное с ним расслоение на группы, $\mathcal{E}_g$ — пучок ростков непрерывных сечений расслоения g'. Тогда $\mathcal{E}_g$ зависит только от класса расслоения g. Рассматривается множество $\mathcal{H}^1(B, G) = \bigcup H^1(B, \mathcal{E}_g)$, где сумма берется по всем классам главных расслоений g. Если $h \in \mathcal{H}^1(B, G)$, то мы пишем $h: g' \to h'$, если $h \in H^1(B, \mathcal{E}_g)$ и g' (соответственно h') — расслоение на группы, ассоциированное с g (соответственно с h). Допустим, что $h_1: e_1 \to e_2$, $h_2: e_2 \to e_3$. Тогда расслоение e_2 естест-

венным образом действует на e_1, что позволяет рассмотреть расслоение h_3, ассоциированное с h_2. В h_3 вводится структура расслоения, главного относительно e_1, причем $h_3 : e_1 \to e_3$. Доказывается, что операция $(h_1, h_2) \to h_3$ превращает $\mathscr{H}^1(B, G)$ в группоид, единицами которого являются единичные элементы множеств $H^1(B, \mathscr{E}_g)$. Рассматривается также множество $\mathscr{H}^0(B,G) = \bigcup H^0(B, \mathscr{E}_g)$. Пусть $e \to G_1 \to G_2 \to G_3 \to e$ — точная последовательность топологических групп. Тогда ей соответствует точная последовательность группоидов и гомоморфизмов $e \to \mathscr{H}^0(B,G_1) \to \mathscr{H}^0(B,G_2) \to \mathscr{H}^0(B,G_3) \to \to \mathscr{H}^1(B, G_1) \to \mathscr{H}^1(B, G_2) \to \mathscr{H}^1(B, G_3)$, где множества $\mathscr{H}^0(B, G_i)$ определены вышеуказанным образом, причем при $i = 1, 2$ строение группоида в $\mathscr{H}^0(B, G_i)$ определяется тем, что это множество является суммой групп, а в $\mathscr{H}^0(BG_3)$ умножение вводится более сложным образом. А. Л. Онищик

9676. Локальные струи, пучки, ростки подпространств. Дедеккер (Jets locaux, faisceaux, germes de sous-espaces. Dedecker Paul), Bull. Soc. math. Belgique, 1953 (1954), 6, 97—125 (франц.)

Пусть E_s — пространство, снабженное локальной структурой s типа $(\mathfrak{S})$ (Dedecker P., Bull. Sol. math. Belgique, 1952, 26—43), $\mathfrak{F}$ — некоторый класс множеств. Пусть каждому E_s и каждому $F \to \mathfrak{F}$ сопоставлено множество $\Lambda(E_s, F)$ отображений $E_s \to F$ так, что выполнены условия: 1) если φ — изоморфизм E_s в $E'_{s'}$ и $f \in \Lambda(E'_{s'}, F)$, то $f\varphi \in \Lambda(E_s, F)$; 2) если $E_s = \bigcup A_i$, где A_i — открытые множества (в смысле ассоциированной с s топологии), и если ограничение отображения $f : E_s \to E$ на множество A_i принадлежит $\Lambda(A_i, F)$ для всех i, то $f \in \Lambda(E_s, F)$. Тогда говорят, что задан локальный тип Λ отображений пространств типа $(\mathfrak{S})$ в множества из $\mathfrak{F}$. Строится пространство $J^\Lambda(E_s, F)$ струй типа Λ из E_s в F, снабженное локальной структурой типа $(\mathfrak{S})$ и однозначно характеризуемое следующими свойствами: существуют локальный изоморфизм p пространства $J^\Lambda(E_s(E_s, F)$ на E_s и отображение $q \in \Lambda(J^\Lambda(E_s,F), F)$ такие, что каждое отображение $f \in \Lambda(A, F)$, где A — открытое множество в E_s, однозначно представляется в виде $f = qu$, где u — такое непрерывное отображение A в $J^\Lambda(E_s, F)$, что $pu = 1$. В случае, когда $(\mathfrak{S})$ — тип топологических строений, $\mathfrak{F}$ — класс топологических пространств, а Λ — тип непрерывных отображений, $J^\Lambda(E_s, F)$ есть множество струй непрерывных отображений в смысле Эресмана.

Если на множестве F заданы алгебраические операции, то они индуцируют операции над отображениями $E_s \to F$. Если каждое множество $\Lambda(E_s, F)$ замкнуто относительно этих операций, то $J^\Lambda(E_s, F)$ является пучком алгебраических систем над E_s. Доказывается, что если E — топологическое пространство, F — топологическая группа, то классы главных расслоенных пространств с базой E и группой F находятся во взаимно однозначном соответствии с элементами множества когомологий $H^1(E, J^\Lambda(E, F))$, где Λ — тип непрерывных отображений.

Далее рассматривается случай, когда $\mathfrak{F}$ — класс пространства типа $(\mathfrak{T})$. Накладывается на множества $\Lambda(E_s, F_t)$ ($F_t \in \mathfrak{F}$) естественные ограничения, автор вводит понятия билокального типа отображений и билокального типа вложений пространств типа $(\mathfrak{S})$ в пространстве типа $(\mathfrak{T})$. Если пространства типа $(\mathfrak{S})$ локально компактны и Λ — билокальный тип вложений, то строится пространство $G^\Lambda(F_t)$ типа $(\mathfrak{S})$, однозначно характеризуемое тем, что существует отображение $\pi \in \Lambda \times (G^\Lambda(F_t), F_t)$ которое обладает следующими свойствами: 1) если φ — локальный изоморфизм E_s в $G^\Lambda(E_t)$, то $\pi\varphi \in \Lambda(E_s, F_t)$; 2) всякое $f \in \Lambda(E_s, E_t)$ однозначно представляется в виде $f = \pi\varphi$, где $\varphi : E_s \to G^\Lambda(F_t)$ — локальный изоморфизм. Точки пространства $G^\Lambda(F_t)$ называются ростками подпространств типа Λ в F_t, а открытые множества — подпространствами типа Λ. А. Л. Онищик

9677. Когомологии алгебраических многообразий. Фари (Cohomologie des variétés algébriques. Fary Istvá n), Ann. Math., 1957, 65, № 1, 21—73 (франц.)

Пусть f — такая голоморфная функция, определенная на n-мерном (в комплексном смысле) аналитическом многообразии X, что: 1) значения функции f заполняют всю расширенную комплексную плоскость C; 2) функция f обладает лишь конечным числом $c_1, \ldots, c_\mu$ критических точек (т. е. точек, в которых все ее производные равны нулю); 3) все критические значения $\gamma_i = f(c_i)$ функции f различны; 4) для любой точки $\xi \in C$ существует такой компакт $E \subset F_\xi$ (где F_ξ — «поверхность уровня» $[f = \xi]$) и такое открытое множество $U \supset F_\xi \setminus E$, что отображение $f|U$ осуществляет расслоение множества U в прямое произведение $DX(F_\xi \cap U)$, где $D \subset C$. Из результатов предыдущей работы автора (РЖМат, 1957, 2150) непосредственно следует, что такой функции можно инвариантно отнести спектральную последовательность $\{E_r^{p,q}\}_{p,q}$, обладающую следующими свойствами: 1) все модули $F_2^{p,q}$ равны нулю, за исключением следующих: $E_2^{p-1} = \sum_{\gamma \in \Gamma} H(F_\gamma)$, $E_2^{p,1} = H^1(C \setminus \Gamma; F_0^{p-1})$, $E_2^{p,2} = H^2(C \setminus \Gamma; F_0^{p-2})$, где $\Gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_\mu)$, а F_0^t — локально постоянный пучок, определенный на множестве $C \setminus \Gamma$ формулой $F_0^t(\xi) = H^t(F_\xi)$; 2) алгебра $E_4 = F_\infty$ является алгеброй, присоединенной к алгебре $H(X)$ относительно некоторой фильтрации, для которой $[H(X)]_i = H(X)$, если $i \leqslant -1$, $[H(X)]_0 = [H(X)]_1$ и $[H(X)]_i = 0$, если $i \geqslant 3$. Реферируемая работа в основном посвящена вычислению члена E_3 этой спектральной последовательности.

Для любой точки $\gamma \in \Gamma$ и любого достаточно близкого к γ некритического значения ξ автор рассматривает композицию σ_γ естественных отображений $H(F_\xi) \approx H(U)$ и $H(U) \to H(F_\gamma)$, где U — некоторая достаточно малая замкнутая окрестность точки γ, и полагает $N(\gamma) = \operatorname{Ker} \sigma_\gamma$, $Q(\gamma) = \operatorname{coker}\ \sigma_\gamma$, $N = \sum_{\gamma \in \Gamma} N(\gamma)$, $Q = \sum_{\gamma \in \Gamma} Q(\gamma)$. Оказывается, что $\operatorname{Ker} d_2 = N + E_2^{p,1} + E_2^{p,2}$, а $\operatorname{coker} d_2$ естественным образом отождествляется с некоторым явно описываемым подмодулем Q_0 модуля Q. Далее автор рассматривает наименьший подмодуль L_ξ модуля $H(F_\xi)$, инвариантный относительно группы $\pi_1(C \setminus \Gamma; \xi)$ (естественным образом действующей в этом модуле) и обладающий тем свойством, что в фактор-модуле $H(F_\xi)/L_\xi$ группа $\pi_1(C \setminus \Gamma; \xi)$ действует тривиально. Модуль $H(F_\xi)/L_\xi$ с точностью до естественного изоморфизма не зависит от ξ и обозначается через $H(F)/L$. Основной результат: $E_3^{p,q} = 0$, если $q \neq -1, 1, 2$, а

$E_3^{p_i-1} = N^{p+1}$, $E_3^{p_i+1} = Q_0^p$, $E_3^{p,2} = H^p(F)/L^p$. Кроме того, дифференциал d_3 может быть отличен от нуля только на модуле N и отображает этот модуль в модуль $H(F)/L$. Следовательно, $E_\infty = N_0 + Q_0 + (H \times (F)/L)/d_3 N$, где $N_0 = \ker(d_3 N)$. При этом следует иметь в виду, что $N^p = 0$, если $0 \leqslant p \leqslant n-1$, и $L^p = Q^p = 0$, если $0 \leqslant p \leqslant n+2$. При соответствующем выборе локальных координат $z_1, \ldots, z_n$ функцию f в окрестности критической точки c_i можно задать формулой $f(z_1, \ldots, z_n) = \gamma_i + a_i(z_1, \ldots, z_n)$, где $a_i(z_1, \ldots, z_n)$ — однородный многочлен степени $m_i \geqslant 2$. Пусть $V_\zeta(\gamma_i)$ — многообразие пространства C^n, определенное уравнением $a_i(z_1, \ldots, z_n) = \zeta$. Оказывается, что если $N(\gamma) = 0$, то модуль $Q(\gamma)$ двойственен модулю $H(V_\zeta \times (\gamma))$, где $\zeta \neq 0$, а если $Q(\gamma) = 0$, то $N(\gamma) \simeq H(V_0(\gamma))$.

В частном случае, когда $m_i = 2$ для всех критических точек γ_i и квадратичная форма $a_i(z_1, \ldots, z_n)$ невырождена, $N^p = 0$, если $p \neq n$, $L^p = Q^p = 0$, если $p \neq n-1$; кроме того, ранг модуля L не превосходит μ. Если же за область коэффициентов принято кольцо Z целых чисел, то либо $Q^{n-1}(\gamma) = Z$, а $N^n(\gamma) = Z_{m_\gamma}$, где $m_\gamma \geqslant 1$, либо n четно, $Q^{n-1}(\gamma) = 0$ и $N^n(\gamma) = Z$. Когда же областью коэффициентов является некоторое поле A, один из модулей $Q^{n-1}(\gamma)$, $N^n(\gamma)$ равен нулю, а размерность другого равна единице; при этом, если n нечетно и характеристика поля A отлична от двух, то $N(\gamma) = 0$. Кроме того, $\dim N + \dim Q = \dim N + \dim Q_0 + \dim L = \mu$, $\dim H^l(X) = \dim H^{l-2}(F)$, если $l \neq n$, $n+1$ и $\dim H^{n+1}(X) - \dim H^n(X) + \mu = \dim H^{n-1}(F) - \dim H^{n-2}(F)$.

Эти результаты автор применяет к задаче вычисления групп когомологий алгебраических многообразий W^n, являющихся полными пересечениями, т. е. многообразий, для которых существует такая последовательность неприводимых алгебраических многообразий без особенностей

$$W^n \subset W^{n+1} \subset \ldots \subset W^{l-1} \subset P^l,$$

где P^l — объемлющее проективное пространство, что каждое многообразие W^{n+i} принадлежит линейной системе $\{W_\xi^{n+i}\}$ подмногообразий многообразия W^{n+i+1}, обладающей следующими свойствами: а) ее база принадлежит пересечению многообразия W^{n+i+1} с фиксированной гиперплоскостью P_∞^{l-1}; б) многообразия W_ξ^{n+1} либо вообще не имеют особенностей, либо обладают лишь одной невырожденной квадратичной двойной точкой (в окрестности которой многообразие W^{n+i} может быть задано уравнениями: $z_0^2 + \ldots + z_{n-i}^2 = 1$, $z_{n-i+2} = \ldots = z_l = 0$); в) многообразия W_ξ^{n+i} обладают особенностью лишь для конечного числа значений параметра ξ. Вычисление ведется по индукции и основывается на том, что для соответствующих аффинных многообразий $V^{n+i} = W^{n+i} \setminus P_\infty^{l-1}$ существуют такие функции $f_i : V^{n+1} \to C$, удовлетворяющие перечисленным выше условиям, что $V^{n+i-1} = f^{-1}(\xi)$ для некоторого $\xi \in C$. Оказывается, что многообразие V^n не имеет кручения, а его числа Бетти все равны нулю, за исключением n-мерного (и, конечно, $2n$-мерного), которое равно $\mu_1 - \mu_2 + \ldots \pm \pm \mu_{l-n}$, где μ_i — число критических точек функции f_i. В частности, если $l = n+1$, то это число равно $(m-1)^{n+1}$, где m — степень гиперповерхности V^n. Для проективного многообразия W^n отсюда следует, что оно также не имеет кручения, а его числа Бетти равны единице или нулю (в зависимости от четности или нечетности соответствующей размерности), за исключением n-мерного, которое определяется следующей рекуррентной формулой: $\dim H^n(W^n) = \dim H^n(V^n) - \dim H^{n-1}(W^{n-1}) + 1$, где $W^{n-1} = W^n \cap P_\infty^{l-1}$ (предполагается, что гиперплоскость P_∞^{l-1} не касается многообразия W^n). В частности, если $l = n+1$, то это число равно $\sum_{j=1}^{n+1}(-1)^{n+j+1}(m-1)^j + \varepsilon$, где m — степень гиперповерхности W^n, а $\varepsilon = 0$, если n нечетно, и $\varepsilon = 1$, если n четно. Кроме групп $H^p(W^n)$, вычислены также их подгруппы, состоящие из алгебраических классов когомологий (высекаемых на W^n классами когомологий пространства P^l) и конечных классов когомологий (имеющих представителей, принадлежащих многообразию V^n). В частности, показано, что группа $H^n(W^n)$ является прямой суммой подгруппы алгебраических и подгруппы конечных классов когомологий. Результаты этой работы, относящиеся к гиперповерхностям, впервые были доказаны И. Г. Петровским. Имеется много опечаток, иногда весьма затрудняющих чтение статьи.

М. М. Постников

9678. Модификации действительных и комплексных многообразий. Эпли (Modifikation von reellen und komplexen Mannigfaltigkeiten. Aeppli A.), Comment. math. helv., 1957, **31**, № 4, 241—301 (нем.)

Пусть V и W — два многообразия одной и той же размерности n и $S \subset V$, $A \subset W$ — их подмногообразия (вообще говоря, различных размерностей). Говорят, что многообразие W является модификацией многообразия V, если существует такой гомеоморфизм $\varphi : V \setminus S \to W \setminus A$, что для любой последовательности точек $P_k \in V \setminus S$, сходящейся к некоторой точке многообразия S, последовательность $\varphi(P_k)$ сходится к некоторой точке многообразия A. Предполагается, что многообразия V, W, S и A компактны и связны и что $n - 1 \geqslant \max \times (\dim A, \dim S)$. Если многообразия V, W, S и A являются гладкими (или аналитическими) многообразиями, а отображения $S \subset V$, $A \subset W$ и φ — гладкими (соответственно аналитическими) гомеоморфизмами, то модификация называется гладкой (соответственно аналитической) модификацией. Если отображение φ индуцируется некоторым отображением $\bar{\varphi} : V \to W$, то говорят, что модификация порождена отображением. Важный способ построения модификаций получается на основе следующих соображений: пусть W — произвольное многообразие, A — его подмногообразие, $\tilde{A}$ — достаточно малая окрестность подмногообразия A в многообразии W и N — ее граница. Если N допускает некоторое расслоение (N, F, S) (отличное от естественного), после стягивания в точку каждого слоя которого из дополнения $W \setminus \tilde{A}$ получается многообразие, то W является модификацией этого многообразия. Оказывается, что любую гладкую модификацию можно осуществить этим способом, причем слой F оказывается сферой (соответствующей размерности). В связи с этой конструкцией естественно возникает следующий вопрос: Пусть M — многообразие со связным краем N, допускающим некоторое расслоение на слои F. При каком условии из многообразия M получается после стягивания каждого слоя в точку замкнутое многообразие? Оказывается, что для этого необходимо, чтобы слой F имел гомотопический тип сферы, и достаточно, чтобы F был сферой. Таким образом, для фиксированной пары (W, A) гладкие моди-

фикации $(V, S) \to (W, A)$ находятся во взаимно однозначном соответствии с гладкими расслоениями на сферы границы N достаточно малой окрестности подмногообразия A. В связи с этими результатами автор доказывает ряд фактов о многообразиях, расслоенных на сферы, как, например, известную теорему Тома, утверждающую, что любое такое многообразие внутренне гомологично нулю. Доказано также, что любое гладкое расслоение многообразия на сферы можно реализовать как нормальное косое произведение некоторого подмногообразия в соответствующим образом подобранном многообразии. Если это расслоение ориентируемо и имеет слоями четномерные сферы, а многообразие нечетномерно, то сумма его чисел Бетти делится на 4. Расслоение границы N окрестности подмногообразия A можно, например, получить, исходя из ее естественного расслоения, рассматривая некоторое расслоение каждого его слоя. В гладком случае класс соответствующих модификаций совпадает с классом модификаций, порожденных отображениями. Автор разбирает несколько примеров таких модификаций, обращая особое внимание на случай комплексных многообразий.

Изложенным выше вопросам посвящена первая глава реферируемой работы. В остальных трех главах рассматривается связь между понятием модификации и теорией когомологий. Например, доказано, что если модификация $(V,S) \to (W, A)$, где $\dim S \geqslant \dim A$, порождена отображением, то числа Бетти b_k многообразий V, S, W и A связаны соотношением $b^k(V) - b^k(S) = b^k(W) - b^k(A)$. Основным результатом в этом направлении является следующее утверждение: если модификация $(V, S) \to (W, A)$ порождена отображением, а $\dim V$ и $\dim S - \dim A$ делятся на $r = \dim V - \dim S$, то группы когомологий многообразия S совпадают с группами когомологий произведения $A \times P$, где P — пространство, алгебра когомологий которого является алгеброй срезанных многочленов от одной переменной степени r. На примере показано, что для алгебр когомологий соответствующее утверждение неверно. В заключительной главе некоторые из результатов предыдущих двух глав уточняются для случая келеровых многообразий. Например, показано, что для рангов пространств гармонических форм любого данного типа имеет место соотношение, аналогичное указанному выше соответствию для чисел Бетти.

М. М. Постников

9679 К. **Общая топология. Серпинский** (General topology: 2nd ed. Sierpiński Waclaw. Trans. from the Polish. Toronto, Univ. Press; London, Oxford Univ. Press, 1956, XII, 290 pp., 60 sh.), Brit. Nat. Bibliogr., 1958, № 423, 9 (англ.)

См. также: 9579, 9632, 10012

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Редакторы *С. М. Никольский, П. С. Новиков*

9680. **К обоснованию теории вещественных чисел. Колмогоров А. Н.,** Матем. просвещение, вып. 2, 1957, 169—171

Заметка уже была опубликована (Успехи матем. наук, 1946, **1**, № 1, 217—219). Она по существу представляет собой современное формализованное изложение евклидовой теории отношений. Положительные вещественные числа вводятся в ней непосредственно вслед за (неотрицательными) целыми. В основе формальных построений автора лежит тот факт, что каждое положительное вещественное число φ можно охарактеризовать последовательностью одних числителей m_n $(n = 1,2,\ldots)$ приближенных значений m_n/n числа φ с недостатком с точностью до $1/n$.

Г. М. Фихтенгольц

9681. **Основы теории меры. Дионизиу** (Fundamentos da teoria da medida. Dionísio J. J.), Rev. Fac. ciênc. Univ. Coimbra, 1956, 25, 101—173 (порт.; рез. англ.)

Своеобразное и в достаточной степени обобщенное изложение основных понятий и результатов теории меры. Обобщение в основном происходит в том направлении, что вместо мер, определенных на кольцах, исследуются меры, определенные на полукольцах; при этом данное в статье понятие полукольца является более общим, чем понятие полукольца, определенное, например, на стр. 27 книги Халмоша (РЖМат, 1954, 3653 К). Именно, полукольцом называется класс $\mathscr{S}$ множеств, удовлетворяющих условию: если $E, F \in \mathscr{S}$, то $E \cap F \in \mathscr{S}$, и разность $E - F$ представима в виде суммы конечного числа множеств, принадлежащих $\mathscr{S}$.

Функция множества μ, определенная на любом классе $\mathfrak{A}$ множеств, называется мерой, если: (γ_1) $\mu(E) < \infty$ для некоторого $E \in \mathfrak{A}$; (γ_2) из соотношений E, $F \in \mathfrak{A}$ и $E \subset F$ следует, что $\mu(E) \leqslant \mu(F)$; (γ_3) μ является счетноаддитивной. Оказывается, если $\mathfrak{A}$—полукольцо, то аксиому (γ_2) можно заменить требованием (γ_2'): μ неотрицательна.

Применяется следующий общий метод конструирования мер.

Обозначим через $\mathscr{E}$ любой класс множеств заданного пространства X, содержащий пустое множество и удовлетворяющий условию: X представимо в виде суммы счетного числа множеств, принадлежащих $\mathscr{E}$; через $\sigma(\mathscr{E})$ обозначим σ-алгебру, порожденную классом $\mathscr{E}$. Далее обозначим через μ' любую неотрицательную функцию множества, определенную на $\mathscr{E}$ и удовлетворяющую условию $\mu'(0) = 0$. Под внешней мерой μ^* понимается функция множества определенная для всех множеств пространства X с помощью формулы

$$\mu^*(E) = \inf \sum_{i=1}^{\infty} \mu'(C_i),$$

где C_i $(i = 1, 2, \ldots)$ — любые множества из $\mathscr{E}$, удовлетворяющие условию $E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$. Это определение эквивалентно следующему аксиоматическому определению. Функцию множества μ^*, определенную на классе всех множеств пространства X, назовем внешней мерой, если (β_1) $\mu^*(0) = 0$; (β_2) из соотношения $E \subset F$ следует, что $\mu^*(E) \leqslant \mu^*(F)$; (β_3) μ^* является счетнополуаддитивной, т. е.

$$\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(E_i).$$

Обозначим через $\mathfrak{M}$ класс множеств, измеримых по отношению к внешней мере μ^* (Сакс С., Теория интеграла, М., 1949, 71), а через μ — функцию множества на $\mathfrak{M}$, совпадающую с μ^*.

Доказывается: 1) $\mathfrak{M}$ является σ-алгеброй, а μ — мерой на нем; 2) теоремы о предельных переходах; 3) для мер, определенных на полукольце $\mathscr{S}$, аксиома (γ_3) эквивалентна совокупности следующих двух

аксиом: (γ_3') если $E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$; $E, E_i \in \mathscr{S}$, то $\mu(E) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$;

(γ_3'') если $E \supset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$; E_i, $E \in \mathscr{S}$ и $E_i \cap E_j = 0$ $(i \neq j)$, то $\mu(E) \geqslant \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$; 4) теоремы о достаточных условиях для каждого из соотношений $\mathscr{E} \subset \mathfrak{M}$ и $\mu(C) = \mu'(C)$; 5) теоремы о необходимых и достаточных условиях измеримости множеств; 6) теоремы о представлениях измеримых множеств в виде суммы двух слагаемых, где одно является борелевским множеством, порожденным $\mathscr{E}$ низшего класса, а второй — подмножеством такого же множества меры нуль; 8) теоремы о произведениях мер.

В последней части работы исследуются меры в полном упорядоченном пространстве R_1 в случае, когда $\mathscr{E}$ является классом всех открытых справа полуинтервалов, а μ' — функцией множества на $\mathscr{E}$, определенной с помощью формулы $\mu'([a, b]) = g(b) - g(a)$, где $g(x)$ — любая действительная функция на R_1, непрерывная слева. Это дает возможность изучить меры Бореля, Лебега и Стилтьеса в обобщенном виде сначала в пространстве R_1, а потом с помощью понятия произведений мер в пространстве $R_n = ((R_1 \times R_1) \times \times R_2) \times \ldots \times R_1$.

Примечание референта. 1) В §4 сформулирована следующая лемма: Если множества E_i $(i = 1, 2, \ldots)$ и E принадлежат полукольцу $\mathscr{S}$ и $E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$, то найдутся множества S_i $(i = 1, 2, \ldots)$ и F_i $(i = 1, 2, \ldots)$ такие, что

$$E = \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i, \quad S_i = E \cap F_i, \quad F_i \in \mathscr{S}, \quad F_i \subset E_i$$

$$\text{и } F_i \cap F_j = 0 \quad (i \neq j).$$

В начале доказательства этой леммы устанавливается, что

$$E_i - \bigcup_{j=1}^{i-1} E_j = \bigcup_{k=1}^{m_i} F_{ik} \quad (i = 1, 2, \ldots),$$

где множества F_{ik} $(i = 1, 2, \ldots; \ k = 1, 2, \ldots, m_i)$ попарно не пересекаются и принадлежат полукольцу $\mathscr{S}$. После этого автор отмечает, что если упорядочим совокупность множеств F_{ik} в простую последовательность $\{F_i\}$, то множества $\{F_i\}$ и $S_i = F_i \cap E$ $(i = 1, 2, \ldots)$ удовлетворяют требованиям леммы. Неверность последнего заключения следует из рассмотрения следующего примера: $\mathscr{S}$ — полукольцо открытых справа полуинтервалов евклидова пространства R^1, $E_1 = [1, 2)$, $E = E_2 = [0,3)$, $0 = E_3 = E_4 = \ldots$.

Референту не ясна справедливость леммы, но очевидна справедливость следующего более слабого утверждения (обозначаем пересечение $E \cap F_{ik}$ опять через F_{ik}): В условиях леммы найдутся попарно непересекающиеся множества F_{ik} $(i = 1,2, \ldots; \ k = 1,2, \ldots \ldots, m_i)$, удовлетворяющие условиям:

$$E = \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{m_i} F_{ik}, \ F_i \supset F_{ik} \in \mathscr{S} \ (i = 1,2, \ldots; \ k = 1,2, \ldots, m_i). \tag{1}$$

С помощью этого утверждения можно доказать те теоремы, в доказательствах которых применяется упомянутая лемма. Например, в доказательстве утверждения 3) (т. е. теоремы 5 §4) следует переставить доказательства соотношений (γ_1), (γ_2), (γ_3) → (γ_3') и (γ_1), (γ_2), (γ_3) → (γ_3''), чтобы для доказательства первого из них применить второе вместо указанного выше утверждения.

2) Автор с целью доказать полную аддитивность функции множества μ', фигурирующей в формулировке теоремы 1 (§15), рассуждает следующим образом: «Пусть $I = [a, b)$ и $I_j = [a_j, b_j)$ — полуинтервалы из R_1, удовлетворяющие условиям

$$I = \sum_{j=1}^{\infty} I_j, \quad I_i \cap I_l = 0 \quad \text{при } i \neq l. \tag{2}$$

Обозначим через $[a_1', b_1')$ единственный полуинтервал из последовательности $\{I_j\}$, содержащий a. Очевидно, $a_1' = a$. Если $b_1' \neq b$, то обозначим через $[a_2', b_2')$ единственный полуинтервал из последовательности $\{I_j\}$, содержащий b_1', и т. д. Очевидно, $a = a_1' < b_1' = a_2' < b_2' = \ldots$». Далее, автор неправильно считает, что конечная или счетная простая последовательность $\{[a_j', b_j')\}$ содержит все непустые полуинтервалы из $\{I_j\}$ и, следовательно, либо b является последним членом последовательности $\{b_j'\}$, либо $\lim_j b_j' = b$. Вместо этого, с помощью трансфинитной индукции, можно доказать следующее утверждение: (а) Пусть $I = [a, b)$ и I_j $[a_j, b_j)$ $(j = 1,2, \ldots)$ — полуинтервалы из R_1, удовлетворяющие условиям (2). Тогда найдутся однозначно определяемые порядковое число $\alpha < \omega_1$ и α-последовательность непустых полуинтервалов $\{[a_\sigma', b_\sigma')\}_{0 \leqslant \sigma < \alpha}$, удовлетворяющие условиям: (i_1) $a_0' = a$ и, кроме того, либо $b_{\alpha-1}' = b$, либо $\lim_{\sigma \to \alpha} b_\sigma' = b$; ($i_2$) для любого отличного от нуля порядкового числа $\sigma < \alpha$, либо $a_\sigma' = b_{\sigma-1}'$, либо $a_\sigma' = \lim_{\xi \to \sigma} b_\xi'$.

Опираясь на утверждение (а), можно доказать полную аддитивность функции μ' с помощью трансфинитной индукции, например, по следующей схеме: обозначим через (K_σ) $(1 < \sigma < \omega_1)$ утверждение: «если $I = [a, b)$ и $I_j = [a_j, b_j)$ $(j = 1,2, \ldots)$ — полуинтервалы из R_1, удовлетворяющие условиям (2), и соответствующее в силу утверждения (а) порядковое число $\alpha < \sigma$, то $\mu'(I) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu'(I_j)$», — и из утверждения ($K_\beta$) при $1 < \beta < \omega_1$ вывести утверждение ($K_{\beta+1}$).

Ш. С. Пхакадзе

9682. Об аналитических множествах евклидова пространства S_r. Ломбарди (Sugli insiemi analitici dell'S_r euclideo. Lombardi Federico), Boll. Unione mat. ital., 1956, 11, № 4, 578—581 (итал.)

Пусть $\alpha(T)$ — аддитивная функция сегмента в евклидовом пространстве R^n с ограниченной вариацией, а $V_\alpha(T)$ — полная вариация функции $\alpha(T)$. Далее, пусть J_i — неограниченное с обеих сторон множество на оси Ox_i без точек сгущения и такое, что расстояния между соседними его точками ограничены сверху $(i = 1,2, \ldots, n)$. Если $x_i \in J_i$, то через $x_i + \Delta x_i$ обозначим непосредственно следующую за точкой x_i точку множества J_i в направлении оси Ox $(i = 1,2, \ldots \ldots, n)$. Совокупность сегментов вида

$$[x_1, x_1 + \Delta x_1; \ x_2, x_2 + \Delta x_2; \ \ldots, x_n, x_n + \Delta x_n],$$

где $x_i \in J_i$ $(i = 1,2, \ldots, n)$, является сетью замкнутых сегментов в R^n специального вида (Сакс С., Теория интеграла, М., 1949, гл. III, §2). Класс таких сетей обозначим через D. По определению «$D_1 \in \mathbf{D}$ является

следующей относительно $D_2 \in \mathbf{D}$» означает, что каждый сегмент из D_1 является частью некоторого сегмента из D_2. Благодаря этому $\mathbf{D}$ становится частично упорядоченным множеством.

Пусть E — заданное ограниченное замкнутое множество из R^n, $D \in \mathbf{D}$ и $\sigma = \sum_{k=1}^{m} V_\alpha(T_k)$, где $T_1, T_2 \ldots, \ldots, T_m$ — последовательность всех различных между собой сегментов из D, пересекающихся с множеством E. Предел суммы σ, когда D пробегает частично упорядоченное множество $\mathbf{D}$, называется абсолютной мерой множества E относительно $\alpha(T)$. Под абсолютной мерой $m_\alpha A$ любого множества $A \subset R^n$ относительно $\alpha(T)$ понимается верхняя грань абсолютных мер замкнутых ограниченных множеств, принадлежащих A. Наконец, множество $L \subset R^n$ называется множеством Лебега относительно $\alpha(T)$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует замкнутое множество $F_\varepsilon \subset L$ и открытое множество $G_\varepsilon \supset L$ такие, что $m_\alpha(G_\varepsilon - F_\varepsilon) < \varepsilon$.

Доказывается, что любое A-множество является множеством Лебега относительно $\alpha(T)$. Ш. С. Пхакадзе

9683. Сферические дробные интегралы. Плесси (Spherical fractional integrals. Plessis Nicolaas du), Trans. Amer. Math. Soc., 1957, 84, № 1, 262—272 (англ.)

Пусть в точках $P = P(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m, \zeta)$ единичной сферы S: $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots + \xi_m^2 + \zeta^2 = 1$ задана суммируемая функция $f(P)$. Через $f(\rho, P)$ обозначим ее интеграл Пуассона:

$$f(\rho, P) = \int_S f(Q) K(\rho, Q - P)\, dQ,$$

где $K(\rho, Q-P) = \frac{1}{2}\pi^{-(m+1)/2}\Gamma\left[\frac{1}{2}(m+1)\times\right.$

$$\left.\times(1-\rho^2)(1-2\rho\cos|P-Q|+\rho^2\right]^{-(m+1)/2},$$

$$\cos|P-Q| = \xi_1\eta_1 + \ldots + \xi_m\eta_m + \zeta\tau.$$

Положим еще $f_\alpha(\rho, P) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\rho (\rho - r)^{\alpha-1} f(r, P)\, dr$ и назовем α-м интегралом от $f(P)$ предел $f_\alpha(P) = \lim_{\rho\to 1} f_\alpha(\rho, P)$.

1. Если $0 < \alpha < \alpha + \beta < 1$ и $f \in \mathrm{Lip}\,\alpha$, то $f_\beta \in \mathrm{lip}(\alpha\ \beta)$.

2. Если $q > 1$, $1 + m/q > \alpha > m/q$ и $f \in L^q$, то $f_\alpha \in \mathrm{lip}(\alpha - m/q)$.

3. Если $0 < \alpha < m/q$ и $f \in L^q$, то $f_\alpha \in L^r$, где $\alpha = m(1/q - 1/r)$.

4. Если $f \in L^q$, то: а) при $0 < \alpha < m$, $2 < q < \infty$ $f_{\alpha/q}$ конечна всюду, за исключением, быть может, множества β-емкости нуль для всех $\beta > m - \alpha$ (см. РЖМат, 1956, 7267); б) при $0 < \alpha < m$, $1 \leqslant q \leqslant 2$ $f_{\alpha/q}$ конечна всюду, за исключением, быть может, множества $(m - \alpha)$-емкости нуль.

Утверждения а) и б) улучшить нельзя.

В. К. Дзядык

9684. О теореме вложения. Дин-Ся-ши (Ding S'hia-shi), Sci. Rec., 1957, 1, № 5, 315—318

Пусть функция $\Phi(u)$ непрерывна, выпукла и монотонно возрастает при $0 < u < +\infty$, $\Phi(u)/u \to 0$, когда $u \to 0$; $\Phi(u)/u \to \infty$, когда $u \to \infty$. По определению $f(x_1, \ldots, x_n)$ принадлежит L_Φ ($f \in L_\Phi$), если $\int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int \Phi(k|f|)\, d\Omega < \infty$, где $0 < k < 1$ (k зависит от f); при этом $\|f\|_{L_\Phi} = \inf m$, где $\int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int \Phi(m^{-1}|f|)\, d\Omega \leqslant 1$. Если $f(x_1, \ldots, x_n) \in L_\Phi$, $r^l f \in L_\Phi$, где $r = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$, то говорят, что $f \in D_\Phi^l$.

Определяют:

$$\|f\|_{D_\Phi^l} = \|f\|_{L_\Phi} + \|r^l f\|_{L_\Phi}.$$

Тогда D_Φ^l — линейное метрическое пространство. Пусть функция X обладает теми же свойствами, что и функция Φ, причем $X(u) \leqslant c\,\Phi(u)$ при всех $u > u_0$, и $\Phi(u_1 u_2) \leqslant \Phi(u_1)\,\Phi(u_2)$, $X(u_1 u_2) \geqslant X(u_1)\,X(u_2)$. При этих предположениях доказывается следующая теорема:

Если $f \in D_\Phi^l$,

$$q = \int_0^1 \widetilde{\Phi X^{-1}} \frac{(1-r)^{-(n+1)}}{X\left((1-l)^{-l}\right) X\Phi^{-1}\left((1-r)^{-(n+1)}\right)}\, dr < \infty,$$

то $f \in L_X$ и имеем: $\|f\|_{L_X} \leqslant K\|f\|_{D_\Phi^l}$, где $\widetilde{\Phi X^{-1}}$ и ΦX^{-1} — взаимно дополнительные в смысле Юнга функции.

Рассматривается частный случай этой теоремы: $\Phi(u) = u^p$ $(p \geqslant 1)$, $X(u) = u^q$ $(1 \leqslant q \leqslant p)$.

Для этого частного случая получаем следствия:

1) Если $f \in D_\Phi^l$, то $f \in L_q$, где $q > np/(n + lp)$, и $\|f\|_{L_q} \leqslant K\|f\|_{D_\Phi^l}$ (приводится пример, показывающий, что нельзя считать $q = np/(n + lp)$).

2) Если $2n/(n + 2l) \leqslant p' = p/(p-1) \leqslant 2$, то получаем теорему С. Л. Соболева. Если $\varphi \in W_p^l$, $n < lp'$, то φ — ограниченная и непрерывная функция и $\max|\varphi| \leqslant K_1\|\varphi\|_{W_p^l}^{(0)}$. Если $n \geqslant lp'$, то $\varphi \in L_q$, где $p' \leqslant q < np'/(n - lp')$, и $\|\varphi\|_{L_q} \leqslant K_2\|\varphi\|_{W_{p'}^l}^{(0)}$.

Также из доказанной автором теоремы может быть получена теорема В. И. Кондрашова (Соболев С. Л., Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Л., 1950). В работе имеются опечатки; кроме того, следствие 2 теоремы, совершенно не очевидное, дается без доказательства.

Е. П. Калугина

9685. Интеграл Данжуа и интегрирование посредством рангированных пространств. III. Наканиси (L'intégrale de Denjoy et l'intégration au moyen des espaces rangés. III. Nakanishi Shizu), Proc. Japan Acad., 1957, 33, № 5, 265—270 (франц.)

Пользуясь терминологией и обозначениями частей I и II (РЖМат, 1957, 7789; 1958, 2816), автор устанавливает, что для всякой $f(x)$, интегрируемой по Данжуа, существует единственное максимальное семейство $f^*(P')$ из $G(P')$ такое, что $J[f^*(P')] = f(x)$ (соответствие взаимно однозначное). Для всех $f^*(P')$ из $G(P')$ $I[f^*(P')] = (D)\int_a^b J[f^*(P')]\, dx$. П. И. Романовский

9686. Об интегрировании методом рангированных пространств. Икэгами (A note on the integration by the method of ranked spaces. Ikegami Teruo), Proc. Japan Acad., 1958, 34, № 1, 16—21 (англ.)

Построение интеграла, данное Кунуги для функций, заданных на отрезке (РЖМат, 1957, 2975), с помощью

введенного им же понятия рангированного (rangé, ranked) пространства (РЖМат, 1956, 2034) обобщается на случай функций, заданных на локально компактной группе. При этом конструкция Кунуги повторяется без изменения. Б. З. Вулих

9687. К взаимоотношению между узким и широким интегралами Данжуа. Натансон И. П., Натансон Г. И., Успехи матем. наук, 1957, 12, № 6, 161—168

Детализируя определения «узкого» и «широкого» интегралов Данжуа (от функции одного действительного переменного) D_* и D^* (интегралом называется функционал, удовлетворяющий надлежащим требованиям), авторы строят две расширяющиеся трансфинитные последовательности интегралов D_ξ и D^ξ ($\xi < \Omega$). Первая определяется так: $D_0 = L$ (интеграл Лебега); $D_{\xi+1} = (D_\xi)_*$; $D_\xi = \sum_{\eta<\xi} D_\eta$ (для ξ 2-го рода); T_* обозначает надлежаще определенное расширение T. Вторая определяется аналогично с использованием надлежаще определенного T^* вместо T_* ($T \subset T_* \subset T^*$). Тогда $D_* = \sum_{\xi<\Omega} D_\xi$; $D^* = \sum_{\xi<\Omega} D^\xi$. Исследуются различные взаимосвязи между интегралами D_ξ и D^ξ. П. И. Романовский

9688. Об интегрировании произведения двух функций. Джваршейшвили А. Г., Тр. Тбилисск. матем. ин-та АН ГрузССР, 1957, 24, 35—51

Используя определения работы В. Г. Челидзе о двойных интегралах Данжуа (Тр. Тбилисск. матем. ин-та АН ГрузССР, 1947, 15, 156—242), определение Г. П. Толстова повторной интегрируемости (Тр. Матем. ин-та АН СССР, 1950, 35, 1—100) и приводимые в работе определение и свойства A-функций двух переменных, автор устанавливает ряд теорем об интегрируемости произведений функций. П. И. Романовский

9689. Об интегрируемости в смысле Стилтьеса-Римана относительно функции с бесконечным изменением. Фойаш (Asupra integrabilităţii Stieltjes—Riemann în raport cu o funcţie care nu este cu o variaţie mărginită. Foiaş Ciprian), Comun. Acad. RPR, 1957, 7, № 10, 835—837 (рум.; рез. русск., франц.)

Доказывается, что множество непрерывных функций, интегрируемых в смысле Стилтьеса — Римана относительно функции с бесконечным изменением, является множеством первой категории в пространстве непрерывных функций. По резюме автора

9690. Свойства интеграла Стилтьеса второго порядка. Го Да-цзюнь (Kuo Da-chun), Сычуань дасюэ сюэбао (цзыжанькэсюэбань), 1955, № 1, 21—32 (кит.; рез. англ.)

Рассматриваются свойства функций ограниченной вариации второго порядка:

$$\bigvee_a^b f = \sup \sum_{i=1}^{n-1} \left| \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} - \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} \right| < +\infty$$

при различных разбиениях $[a, b]$ на части: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$.

Доказывается, что сумма, произведение и частное двух функций ограниченной вариации второго порядка при некоторых условиях есть функция ограниченной вариации второго порядка. Изучается также интеграл Стилтьеса второго порядка (РЖМат, 1953, 644). Излагаются теоремы о среднем значении и о предельном переходе под знаком интеграла.

Примечание референта. Результаты, изложенные автором, содержатся в нижеследующих работах: 1) Winternitz A., Leipzig. Ber., 69, 249; 2) Hopf E., Über die Zusammenhängen zwischen gewissen höheren Differenzquotienten. Dissertation. Berlin, 1926; 3) статьи, упоминаемые в РЖМат, 1953, 644; 4) Столяров Н. А., РЖМат, 1957, 275. Н. А. Столяров

9691. Функции ограниченной вариации третьего порядка. Линь Цзин-жун, (Lin Jiingrong), Шусюэ цаньчжань, 1957, 3, № 4, 628—641 (кит.; рез. англ.)

Пусть действительная функция $f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$. Разложим $[a, b]$ на части точками (Δ) $x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$, $n \geqslant 2$, и составим сумму

$$S^3_\Delta(f) = \sum_{i=1}^{n-1} \left| \frac{f(x_{i+1}) + f(x_i) - 2f\left(\frac{x_{i+1} + x_i}{2}\right)}{\left(\frac{x_{i+1} - x_i}{2}\right)^2} - \frac{f(x_i) + f(x_{i-1}) - 2f\left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}\right)}{\left(\frac{x_i - x_{i-1}}{2}\right)^2} \right|.$$

Автор называет функцию $f(x)$ функцией ограниченной вариации 3-го порядка на $[a, b]$, если

$$\sup_\Delta S^3_\Delta(f) = \bigvee_a^b{}^3(f) < +\infty.$$

В статье изучаются свойства функций ограниченной вариации 3-го порядка.

Доказана теорема: для того чтобы функция $f(x)$ была ограниченной вариации 3-го порядка на $[a, b]$, необходимо и достаточно, чтобы

$$f(x) = \int_a^x dt \int_a^t \varphi(z)\, dz + Dx + C,$$

где $\varphi(t)$ — функция ограниченной вариации на $[a, b]$, а D и C — произвольные постоянные. Н. А. Столяров

9692. Некоторые замечания к одной работе Птака. Часар (Quelques remarques sur un ouvrage de M. V. Pták. Császár Ákos), Publs math., 1957, 5, № 1-2, 154—161 (франц.)

Указываются дополнительные возможности метода Птака (Pták V., Časop. pěstov. mat., 1951, 76, 217—224), позволяющие упростить доказательства теорем Уорда о производных числах аддитивных функций m-мерного интервала, обобщающих теоремы Данжуа о производных числах функции одного переменного. П. И. Романовский

9693. Возрастающая непрерывная функция, не дифференцируемая в любом интервале. Тамбс-Люке (En monotont voksende, kontinuerlig funksjon som ikke er deriverbar i noe intervall. Tambs Lyche R.), Nord. mat. tidskr., 1957, 5, № 3, 139—142 (норв.; рез. англ.)

Функция с указанными свойствами берется в виде

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} |x - a_n|, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

где $\{a_n\}$ — последовательность рациональных чисел от 0 до 1, расположенных, например, в порядке неубывания знаменателей: $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_3 = 1/2$, $a_4 = 1/3$, $a_5 = 2/3$,... Показывается, что $f(x)$ дифференцируема

при иррациональных x, в то время как для рациональных значений аргумента $f'_+(a_k) - f'_-(a_k) = 2^{-k+1}$.

Резюме автора

9694. О всюду непрерывных, нигде не дифференцируемых функциях. Миколаш (Mindenütt folytonos, sehol sem differenciálható függvényekről. Mikolás Miklós), Magyar tud. akad. mat. és fiz. tud. oszt. közl., 1956, 6, № 3-4, 353—367 (венг.)

Работа публиковалась с незначительным изменением на французском языке (РЖМат, 1958, 2829).

9695. Заметка об обобщении Островского теоремы Осгуда. Гангули (A note on Ostrowski's generalization of a theorem of Osgood. Ganguli P. L.), Bull. Calcutta Math. Soc., 1957, 49, № 2, 75—78 (англ.)

Островский доказал теорему (Ostrowski A. M., Proc. Amer. Math. Soc., 1950, 1, 648): Если $f(t, x)$ — непрерывная функция точки (t, x) для $a < x < b$, $t \geqslant T$ и $\lim_{t\to\infty} f(t, x) = f(x)$, причем функция $f(x)$ непрерывна в (a, b), то для каждого $\varepsilon > 0$ существуют подинтервал J интервала (a, b) и положительное число T_0 такие, что $|f(t, x) - f(x)| < \varepsilon$ для $x \in J$ и $t \geqslant T_0$.

Автор показывает, что приведенная теорема верна, если $f(t, x)$ для каждого значения t есть непрерывная функция только от x.

М. И. Алхимов

9696. К вопросу о двумерном анализе. Добрескy (Contribuţii la o analiză infinitezimală bidimensională. Dobrescu Eugen V.), Studii şi cercetări mat. Acad. RPR, 1957, 8, № 1-2, 103—130 (рум.; рез. русск., франц.)

Изучается ряд вопросов, относящихся к полунепрерывным функциям на плоскости (в смысле Бэра и автора) и к последовательностям таких функций. В качестве вспомогательного аппарата рассматриваются двойные числовые ряды и изучается введенное автором определение их сходимости.

П. И. Романовский

9697. Построение полной системы функций по заданной мере. Максудов Ф. Г., Азэрб. ССР Элмлэр Акад. аспирантларынын 5 элми конфрансынын, эсэрлэри, Тр. 5-й Научн. конференции аспирантов АН АзербССР, Баку, АН АзербССР, 1957, 171—177

На основе идей работы И. М. Гельфанда и Б. М. Левитана (Изв. АН СССР. Сер. матем., 1951, 15, 309 — 360) дается построение полных систем функций по заданной мере $\rho(\lambda)$, т. е. таких систем $\varphi(x, \lambda)$, что для всякой $f(x) \in L_2(0, \infty)$ справедливо соотношение

$$\int_{-\infty}^{\infty} E^2(\lambda)\, d\rho(\lambda) = \int_0^{\infty} f^2(x)\, dx,$$

где $E(\lambda)$ определяется соотношением

$$\int_{-\infty}^{\infty} [E(\lambda) - \int_0^n f(x)\varphi(x, \lambda)\, dx]^2\, d\lambda \to 0$$

при $n \to \infty$. При построении предполагается известной полная система функций $\psi(x, \lambda)$ для некоторого веса $\delta(\lambda)$, а $\rho(\lambda)$—не убывающая при $-\infty < \lambda < \infty$ функция с бесконечным числом точек роста, для которой интеграл

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_0^x \psi(t, \lambda)\, dt\right)\left(\int_0^y \psi(t, \lambda)\, dt\right) d\sigma(\lambda)$$
$$(\sigma(\lambda) = \rho(\lambda) - \delta(\lambda))$$

допускает непрерывную производную $\partial^2 F(x, y)/\partial x \partial y = f(x, y)$.

Функции $\varphi(x, \lambda)$ равны

$$\psi(x, \lambda) + \int_0^x K(x, t)\, \psi(t, \lambda)\, dt,$$

где $K(x, y)$ определяется из интегрального уравнения $f(x, y) + \int_0^x f(y, s) K(x, s)\, ds + K(x, y) = 0$, для которого при каждом фиксированном x доказывается существование единственного решения $K(x, y)$.

В работе имеется большое число опечаток. В частности, Б. М. Левитан всюду именуется Б. Т. Левитаном.

Б. М. Гагаев

9698. Замечание об ортогональных системах. Хершман (A note on orthogonal systems. Hirschman I. I., Jr), Pacif. J. Math., 1956, 6, № 1, 47—56 (англ.)

Пусть $\{\omega_n(x)\}$ — ограниченная ортонормальная последовательность функций на $[0,1]$. Тогда, если $\{a_n\} \in l$, $g(x) \in L(0,1)$, $f(x) = \sum_1^\infty a_n \omega_n(x)$ и $b_n = \int_0^1 g(x)\, \overline{\omega_n}(x) dx$, то при $0 \leqslant \alpha < 1/2$

$$\left\{\int_0^1 |f(x)|^2 x^{-2\alpha}\, dx\right\}^{1/2} \leqslant A(\alpha)\left\{\sum_1^\infty |a_n|^2 n^{2\alpha}\right\}^{1/2}, \qquad (1)$$

$$\left\{\sum_1^\infty |b_n|^2 n^{-2\alpha}\right\}^{1/2} \leqslant A(\alpha)\left\{\int_0^1 |g(x)|^2 x^{2\alpha}\, dx\right\}^{1/2}, \qquad (2)$$

где $A(\alpha)$ — постоянная. При помощи (1) и (2) дается простое доказательство неравенств Ф. Рисса:

$$\|f\|_q \leqslant B(p)\, \|\{a_n\}\|_p, \quad \|\{b_n\}\|_q \leqslant B(p)\, \|g\|_p,$$
$$1/p + 1/q = 1, \quad 1 \leqslant p \leqslant 2.$$

Обобщая (1) и (2), автор доказывает неравенства

$$\int_0^1 |f(x)|^p x^{-p\gamma} dx \leqslant A(p, \gamma) \sum_1^\infty |a_n|^p n^{p-2+p\gamma}$$
$$(2 \leqslant p < \infty, 0 < \gamma < 1/p)$$

и др., которые служат обобщением неравенств Пейли (Paley R. E. A. C., Studia math., 1931, 3, 226 — 239) и Питта (Pitt H. R., Duke Math. J., 1937, 3, 747 — 755).

В. К. Дзядык

9699. Об абсолютной сходимости некоторых ортогональных разложений. Алексич (Sur la convergence absolue de certains développements orthogonaux. Alexits Georges), Acta math. Acad. sci. hung., 1957, 8, № 3-4, 303—310 (франц.)

Как известно (Sidon S., Math. Ann., 1927, 97, 675—676), лакунарный тригонометрический ряд сходится абсолютно, если он является рядом Фурье ограниченной функции. При тех же условиях на функцию, это справедливо для разложений по функциям Радемахера (Kaczmarz S., Steinhaus H., Studia math., 1930, 2, 231 — 237). Автор показывает, что оба эти результата являются частными случаями гораздо более общего предложения; для этого вводится понятие «мультипликативной ортогональности». Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ — некоторая система функций на отрезке $[a, b]$; обозначим через $\Pi\{\varphi_n(x)\}$ следующую систему функций: если $n = 2^{\nu_1} + 2^{\nu_2} + \ldots + 2^{\nu_m}$

$(0 \leqslant \nu_1 < \nu_2 < \ldots < \nu_m)$ — двоичное разложение числа $n \geqslant 1$, то n-я функция $\psi_n(x)$ из $\Pi\{\varphi_n(x)\}$ есть

$$\psi_n(x) = \varphi_{\nu_1+1}(x)\varphi_{\nu_2+1}(x)\ldots\varphi_{\nu_m+1}(x).$$

Добавим к этой системе из произведений функцию $\psi_0(x) \equiv 1$, поместив ее перед всеми $\psi_n(x)$, и получим $\Pi\{\varphi_n(x)\}$. Ясно, что $\{\varphi_n(x)\}$ содержится в $\Pi\{\varphi_n(x)\}$, но $\Pi\{\varphi_n(x)\}$, вообще говоря, не ортогональная и не полная система. Система $\{\varphi_n(x)\}$ называется «мультипликативно ортогональной», если все $\psi_n(x)$ при $n \geqslant 1$ ортогональны к $\psi_0(x)$. Под П-разложением суммируемой функции $f(x)$ понимается ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n\psi_n(x)$, где $c_n = \int_a^b f(x)\psi_n(x)\,dx$.

Основная теорема работы: Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ — мультипликативно ортогональная система, нормированная и такая, что $|\varphi_n(x)| \leqslant K$ $(n = 1,2,\ldots,)$ почти всюду, где K постоянно. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n\varphi_n(x)$ есть П-разложение суммируемой функции, односторонне ограниченной, то $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n| < \infty$.

Из этой теоремы автор выводит ряд следствий и, в частности, значительно обобщает упомянутую выше теорему Качмажа и Штейнхауса. Н. К. Бари

9700 К. Теория функций вещественной переменной. Изд. 2-е, переработ. Натансон И. П., М., Гостехиздат, 1957, 552 стр., 11 р. 80 к.

Во второе издание этого руководства по теории функций действительного переменного внесен ряд добавлений. Наименование глав: I. Бесконечные множества. II. Точечные множества. III. Измеримые множества. IV. Измеримые функции. V. Интеграл Лебега от ограниченной функции. VI. Суммируемые функции. VII. Функции, суммируемые с квадратом. VIII. Функции с конечным изменением. Интеграл Стилтьеса. IX. Абсолютно непрерывные функции. Неопределенный интеграл Лебега. X. Сингулярные интегралы. Тригонометрические ряды. Выпуклые функции. XI. Точечные множества в двумерном пространстве. XII. Измеримые функции нескольких переменных и их интегрирование. XIII. Функции множества и их применение в теории интегрирования. XIV. Трансфинитные числа. XV. Классификация Бэра. XVI. Некоторые обобщения интеграла Лебега. XVII. Функции с неограниченными областями задания. XVIII. Некоторые сведения из функционального анализа.

Добавления: I. Длина дуги кривой. II. Пример Штейнгауза. III. Некоторые дополнительные сведения о выпуклых функциях. Большинство глав сопровождается упражнениями. П. И. Романовский

ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ

9701. Обобщенная континуум-гипотеза и аксиома выбора. Шпеккер (Verallgemeinerte Kontinuumshypothese und Auswahlaxiom. Specker E.), Arch. Math., 1954, 5, № 4-6, 332—337 (нем.)

Доказывается, что из обобщенной континуум-гипотезы следует аксиома выбора. При этом под обобщенной континуум-гипотезой понимается утверждение, что каково бы ни было бесконечное множество m, между мощностью m и 2^m не существует промежуточной мощности (при каждом m соответствующее утверждение обозначается $H(m)$). Аксиома выбора рассматривается как утверждение, что всякая бесконечная мощность есть некоторый алеф. Доказательство проводится в системе Бернайса без аксиомы фундирования и аксиомы выбора.

Важную роль в доказательстве играет следующая теорема: Если множество m содержит 5 различных элементов, то невозможно неравенство $m^2 \geqslant 2^m$.

Через $\aleph(m)$ обозначается наименьшая из мощностей алефов, не равная мощности какого-либо подмножества m. Доказывается неравенство $2^{\aleph(m)} \leqslant 2^{2^{m^2}}$. Основной результат: из $H(m)$ и $H(2^m)$ следует $2^m = \aleph(m)$.

Как отмечает автор, Линденбаум и Тарский (Lindenbaum, Tarski, Compt. rend. Soc. sci. et lettres Varsovie, 1926, **19**, 299 — 330) привели без доказательства следующие теоремы: Если $H(m)$, $H(2^m)$ и $H(2^{2^m})$, то 2^{2^m} есть алеф (а значит, также 2^m и m суть алефы); если $H(m^2)$ и $H(2^{m^2})$, то 2^{m^2} есть алеф. Серпинский (Sierpiński W., Fundam. math., 1945, **33**, 137 — 168) доказал: если $H(m)$, $H(2^m)$ и $H(2^{2^m})$, то m есть алеф. Из этих результатов Линденбаума и Тарского, а также Серпинского тоже вытекает связь между обобщенной континуум гипотезой и аксиомой выбора, указанная в начале этого реферата. Однако результат автора сильнее. А. С. Есенин-Вольпин

9702. Условная независимость аксиомы $V=L$ и связанных с ней аксиом в системе Гёделя. Леви (Indépendance conditionnelle de $V=L$ et d'axiomes qui se rattachent au système de M. Gödel. Lévy Azriel), C. r. Acad. sci., 1957, 245, № 19, 1582—1583 (франц.)

Работа относится к гёделевской системе аксиом Σ (Успехи матем. наук, 1948, **3**, № 1, 96 — 149. Обозначения см. там же). H_α означает (β) $(\beta \geqslant \alpha \supset 2^{\aleph\beta} = \aleph_{\beta+1})$, H — обобщенная континуум-гипотеза: (α) $(2^{\aleph\alpha} = \aleph_{\alpha+1})$.

Пусть K — произвольный класс. Тогда L_K — класс K-конструктивных множеств — определяется также, как класс L в указанной выше работе Гёделя, но с добавлением новой фундаментальной операции, состоящей в пересечении с классом K. Свойства класса L_K сходны со свойствами класса L; в частности, можно определить функцию Od_K, соответствующую гёделевской функции Od. Некоторые особые свойства $\mathbf{L}_K(X)$ определяются аналогично $\mathbf{L}(X)$: 1) $x \varepsilon L_K \supset xK\varepsilon L_K$; 2) $\mathbf{L}_K(K \cdot L_K)$; 3) $L \subset L_K$; $\mathbf{L}(X) . \supset . \mathbf{L}_K(X)$; 4) $\mathbf{L}(K) \supset :. L_K = L : \mathbf{L}_K(X) . \equiv \equiv . \mathbf{L}(X)$; 5) $\sim \mathbf{L}(K \cdot L_K) . \supset L \supset L_K$.

Основные результаты:

Теорема 1. В системе Σ аксиома $\exists k\ (V = L_K)$ эквивалентна аксиоме выбора E.

Теорема 2. $V = L_k \supset H_\beta$, где $\aleph_\beta = \bar{\bar{\gamma}} + \aleph_0$, $\gamma = Od_k'' k$. Таким образом, $(\exists k)(V = L_k) \supset (\exists_\alpha) H_\alpha$.

Теорема 3. Если аксиома $V = L$ не доказуема в Σ, то она не доказуема и в системе, получающейся присоединением к Σ аксиомы $\exists k\ (V = L_k)$.

Теорема 4. Если H не доказуема в Σ^*, то H не доказуема и в системе, получающейся присоединением к Σ аксиомы $\exists k\ (V = L_k)$.

(Напоминаем, что Σ^* получается из Σ присоединением аксиомы выбора E).

Теорема 5. Если H не доказуема в Σ^*, то в системе, получающейся присоединением к Σ аксиомы $\exists k\ (V = L_k)$, не доказуемо утверждение $(\alpha)(\beta)$ $[\alpha < \beta \supset \supset 2^{\aleph\alpha} < 2^{\aleph\beta}]$. А. С. Есенин-Вольпин

9703. Характеристика порядкового типа* $\omega+\omega$ множества целых чисел при помощи функции «следования за». Девидэ (Eine Charakterisierung des Ordnungstypus* $\omega+\omega$ der Menge der ganzen Zahlen mittels der Nachfolger-Funktion. Devidé Vladimir), Glasnik mat.-fiz.i astron., 1956, 11, № 1, 11—15 (нем.; рез. сербо-хорв.)

Порядковый тип* $\omega+\omega$ множества Z целых чисел автор характеризует следующими свойствами:

D1. Z бесконечно;

D2. Существует однозначное отображение $x \to x^+$ $(x \in Z)$ множества Z на Z (т. е. $Z^+ = Z$);

D3. Если $0 \subset X \subset Z$ (включения строгие), то $X^+ \neq X$. Это значит, что если множество Z обладает свойствами D1 – D3, то его можно естественным образом упорядочить и получить множество, подобное упорядоченному множеству всех целых чисел. Свойства D1 — D3 независимы между собой; они аналогичны соответствующим свойствам для типа ω положительных чисел (РЖМат, 1958, 5438).

Г. Курепа

9704. Бесконечность натурального ряда чисел. Финслер (Die Unendlichkeit der Zahlenreihe. Finsler P.), Elem. Math., 1954, 9, № 2, 29—35 (нем.)

Отношение, согласно которому, например, число 4 следует за числом 3, называется основным отношением и обозначается буквой β : $4\beta 3$.

Нуль и натуральные числа определяются как идеальные вещи, связанные друг с другом основным отношением, при котором выполняются следующие требования: 1) отношение $0\beta x$ не имеет места, т. е. нуль не имеет предшественников.

Пусть $Z(n)$ означает, что n — натуральное число. Тогда 2) $Z(n)$, если $n\,\beta 0$ или $n\,\beta\,m$, где $Z(m)$; но $n\,\beta\,a$ и $n\,\beta\,b$ при $a \neq b$ не имеет места, т. е. n есть натуральное число, если оно имеет определенного предшественника: 0 или натуральное число, причем оно не имеет двух разных предшественников. 3) $Z(n)$ имеет место только тогда, когда из 1) и 2) следует, что оно есть натуральное число.

Система натуральных чисел не пуста, однозначно определена, удовлетворяет принципу полной индукции. Определение свободно от противоречий.

Множества определяются как идеальные вещи, связанные друг с другом отношением β, при этом выполняются следующие требования: а) каждое множество определяет свои элементы, т. е. множества, с которыми оно связано отношением β; б) множества M и N равны только тогда, когда предположение, что $M = N$ не ведет к противоречию; в) M будет множеством всегда, когда это возможно. Система всех множеств не пуста, установлена однозначно и свободна от противоречия. В силу требования в) не существует множества, которое содержит в себе те и только те множества N, для которых $N\,\beta\,N$ не имеет места. В то же время существуют множества, определяемые при помощи порочного круга (требование существования множества с любыми данными элементами): таково множество всех множеств.

Различие между множествами, образованными при помощи порочного круга и без него, устанавливается определением:

I. Множество есть множество, свободное от круга, если его элементы свободны от круга и само оно не зависит от понятия «свободы от круга» (т. е. когда оно в силу своего определения не изменяется от того, какие из множеств обозначить через множества, «свободные от круга»).

II. Множество есть только тогда множество, «свободное от круга», когда это необходимо.

На основании требования II множество, свободное от круга, не может содержать само себя; каждое множество, содержащее само себя, есть множество «несвободное от круга».

Принципом индукции доказывается, что натуральные числа суть множества, свободные от круга. Из требований 2) и 3) следует, что каждое натуральное число отличается от своих предшественников.

Доказывается, что каждому множеству M, свободному от круга, ставится в соответствие множество N, содержащее M в качестве единственного элемента: $N = \{M\}$; следовательно, каждому натуральному числу m ставится в соответствие следующее натуральное число $n = \{m\}$, т. е. натуральный ряд бесконечен.

З. И. Козлова

9705. Об операциях над множествами, допускающих трансфинитные индексы. Лянунов А. А., Тр. Моск. матем. о-ва, 1957, 6, 195—230

R-множества (РЖМат, 1954, 1598) занимают существенное место в естественной классификации множеств. Начальным классом является класс замкнутых множеств или нулевой класс открыто-замкнутых множеств пространства Бэра. Далее идут классы B-множеств, получаемые последовательным применением операций Σ и Π и взятием дополнений или операцией lim. Классы A- и CA-множеств получаются из замкнутых множеств или множеств класса нуль однократным применением A- или Γ-операций. Каждый из них содержит в себе все B-множества. Повторное применение A- и Γ-операций ведет к трансфинитным классам C-множеств.

Однократное применение R^1-операции ведет к классу R_1-множеств, который содержит в себе все C-множества. Повторное применение R^α-операции $(\alpha < \Omega)$ и дополнительной к ней $R^{\alpha C}$-операции приводит к трансфинитной системе расширяющихся классов, однократное применение $R^{\alpha+1}$-операции приводит к классу множеств, содержащему в себе все эти классы. A-операция является по существу R^0-операцией. Так определяется система последовательно усиливающихся R^α-операций для всех $\alpha < \Omega$. Множества, полученные с помощью этих операций из замкнутых множеств или из множеств класса нуль, получили название R-множеств.

Все R-множества содержатся в классе проективных множеств B_2. Однако строение R-множеств существенно проще, чем строение B_2-множеств. R-множества измеримы и обладают свойством Бэра; в то же время, как это показал П. С. Новиков (Тр. Матем. ин-та АН СССР, 1951, 38, 279—316), непротиворечиво существование B_2-множеств, неизмеримых и лишенных свойства Бэра.

Однако аналитическая форма R-операций, лежавшая в основе изучения свойств R-множеств, была громоздкой. В реферируемой статье автору удалось избавиться от необходимости прибегать к этому аналитическому аппарату, указав новое изложение свойств R-множеств и тех операций, с помощью которых они могут быть образованы.

Пусть дана последовательность баз δs-операций $\{N_i\}$, $i = 0, 1, 2, \ldots$ Конъюнктивным расширением δs-операций с этими базами называется δs-операция, база N которой устроена так: 1) если $\eta \in N$, то существует такая цепь $\eta_0 \in N_0$, что $\eta_0 \subset \eta$; 2) если $\eta \in N$ и $n \in \eta$, то существует такая цепь $\eta_n \in N_n$, что $\eta_n \subset \eta$; 3) база N состоит из всех цепей, удовлетворяющих условиям 1) и 2).

Конъюнктивное расширение может быть представлено в виде T-операции. Рассмотрим произвольную систему множеств $\{E_n\}$. Пусть $E_n^1 = E_n$. Положим $E_n^{\alpha+1} = E_n^\alpha \Phi_{N_n} \{E_m^\alpha\}$ и $E_n^\gamma = \Pi_{\alpha<\gamma} E_n^\alpha$ для чисел γ второго рода.

Тогда

$$T_{\{N_n\}}\{E_m\} = \prod_{\alpha<\Omega} E_0^\alpha \equiv E_0^\Omega.$$

Дизъюнктивным расширением δs-операций с базами $\{M_n\}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ называется δs-операция, база M которой определяется так: 1) $M_0 \subset M$; 2) если $\eta \in M$ и $n \in \eta$, то какова бы ни была цепь $\eta_n \in M_n$, $\eta' = \eta - (n) + \eta_n \in M_n$ (через (n) обозначается множество, состоящее из единственного элемента n); 3) база M состоит из всех цепей, обладающих свойствами 1) и 2).

Дизъюнктивное расширение может быть представлено в виде T^C-операции. Пусть $\widetilde{E}^1_m = E_m$, $\widetilde{E}^{\alpha+1}_m = \widetilde{E}^{\alpha}_m + \Phi_{M_m}\{\widetilde{E}^{\alpha}_n\}$ и $\widetilde{E}^{\gamma}_m = \Sigma_{\alpha<\gamma}\widetilde{E}^{\alpha}_m$ для чисел γ второго рода. Тогда

$$T^C_{\{M_n\}}\{E_m\} = \sum_{\alpha<\Omega}\widetilde{E}^{\alpha}_0 \equiv \widetilde{E}^{\Omega}_0.$$

Конъюнктивное и дизъюнктивное расширения двух последовательностей взаимно дополнительных операций взаимно дополнительны.

Если все составляющие операции сохраняют измеримость и свойство Бэра, то это имеет место и для конъюнктивных расширений.

Для конъюнктивных и дизъюнктивных расширений определяются трансфинитные индексы, вполне аналогичные индексам A-операции или решета. Для этих индексов имеет место принцип сравнения, аналогичный тому, который установлен П. С. Новиковым для индексов A-операции.

Автор показывает, что конъюнктивное расширение последовательности δs-операций с полными базами можно рассматривать как двустепенную δs-операцию. Первая δs-операция с постоянной базой представима через Σ- и Π-операции и совершается над исходными базами и интервалами Бэра, вторая — с полученной базой над данными множествами.

Последовательность баз $\{N_i\}$ лишена зацеплений, если можно указать последовательность попарно непересекающихся цепей $\eta^0, \eta^1, \ldots, \eta^n, \ldots$ таких, что каково бы ни было n, непременно $0 \notin \eta^n, n \notin \eta^k$ при $k \geqslant n$, и если $\eta_n \in N_n$, то $\eta_n \subset \eta^n$.

Пусть функция $m = f(n)$ осуществляет взаимно однозначное отображение натурального ряда на цепь η и пусть N — некоторая база. Тогда база $N^* = f(N)$ называется полученной из базы N путем сдвига $f(n)$.

Если базы последовательности $\{N_i\}$ лишены зацеплений и получены путем сдвигов базы N, то эта последовательность называется $R_{\{N\}}$-последовательностью, а тип $T_{\{N_i\}}$-операции называется R_N-типом. Тип операции $\Phi_M\left\{\Phi_N\{E_{nm}\}\right\}$, если $\Phi_M\{E_m\} = E_1E_2$, называется (N, d)-типом.

Исходя из операций Φ_N и Φ_{N^C}, путем итерации конъюнктивных и дизъюнктивных расширений над последовательностями δs-операций с базами, лишенными зацеплений, полученных путем сдвигов сначала исходных баз, а затем полученных путем расширений, при условии, что R_N-тип не слабее, чем N^C-тип, Σ- и Π-тип, (N, d)-тип не сильнее, чем N-тип, и (N^C, d)-тип не сильнее, чем N^C-тип, получается трансфинитная последовательность усиливающихся R^{α}_N- и $R^{\alpha C}_N$-операций для всех $\alpha < \Omega$. В случае, когда исходные операции есть соответственно Σ и Π, $R^{\alpha}_{N^*}$- и $R^{\alpha C}_N$-операции совпадают соответственно с R^{α}- и $R^{\alpha C}$-операциями. Исходя из интервалов, с помощью этих операций получаются все R-множества. Операция R^0_{Σ} эквивалентна при этом A-операции.

Для T- и T^C-операций имеют место соотношения кратной отделимости и неотделимости, подобно тому, как это имеет место и для A-операции, а также вытекающие из них соотношения вырождения и накрытия.

В работе допущены опечатки: 1) стр. 198, строка 16 сверху: вместо $\{E_N\}$ следует читать $\{E_n\}$; 2) стр. 206, строка 3 сверху: вместо $\Phi_{N^i_n}$ следует читать $\Phi_{N^n_i}$; 3) стр. 208, строка 18 сверху: должно быть $V^0 \subset V^1 \subset \ldots \ldots \subset V^{\alpha}$; 4) стр. 210, строка 7 сверху: в правой части равенства внутри скобок вместо α должно быть β; 5) стр. 210, строка 16 сверху: опустить написанное между первым и вторым знаками равенства; 6) стр. 210, строка 22 сверху: вместо C^{β}_m и $\mathcal{E}^{\gamma}_m$ должно быть соответственно $C\mathcal{E}^{\beta}_m$ и $\mathcal{E}^{\alpha}_m$; 7) стр. 221, строка 12 снизу: вместо Φ_{N_i} следует читать $\Phi_{N(i)}$; 8) стр. 222, строка 16 снизу: вместо «баз зацеплений» должно быть «баз без зацеплений»; 9) стр. 222, строка 15 снизу: вместо N^{nm}_i следует читать $\Phi_{N^{nm}_i}$; 10) стр. 223, строка 19 сверху: вместо $x \in \eta$ следует читать: $n \in \eta$; 11) стр. 227, строка 6 снизу: вместо Φ_m следует читать Φ_M; 12) стр. 228, строка 11 снизу: вместо $= 0$ должно быть $\neq 0$.

З. И. Козлова

9706. О расширении теоретико-множественных операций. Ляпунов А. А., Успехи матем. наук, 1956, **11**, № 5, 237—238

В 1922 г. А. Н. Колмогоровым было дано определение δs-операции, рассмотрены ее основные свойства и построена R-операция — простейший вид усиления теоретико-множественной операции.

Ранее автор показал (реф. 9705), что вместо R-расширения можно пользоваться процессом T-расширения теоретико-множественных операций, определенным в виде трансфинитной программы переработки множеств с помощью ряда отдельных актов, каждый из которых осуществляется исходными δs-операциями.

В реферируемом резюме доклада автор сообщает о новых процессах расширения теоретико-множественных операций, представляющихся в виде трансфинитных программ, более сильных, чем R-расширения. К ним относятся T^2-расширения, обладающие рядом аналитических свойств, родственных аналитическим свойствам T-расширений. Можно определить последовательность все более сильных расширений T^k, где $k = 1,2,\ldots$ Детальное исследование этих расширений продолжается.

З. И. Козлова

9707. Об универсальном непрерывном отображении бэровского пространства в себя. Мацкина Р. Ю., Уч. зап. Глазовск. пед. ин-та, 1956, вып. 3, 100—107

Продолжение предыдущей работы автора (Уч. зап. Моск. обл. пед. ин-та, 1950, **15**, вып. 1). Бэровское пространство гомеоморфно пространству иррациональных точек отрезка (0,1), являясь однородным нульмерным G_{δ} не F_{σ}. Структура бэровского пространства позволяет построить на нем универсальное непрерывное отображение в себя. При этом непрерывное отображение $y = f(x)$ бэровского пространства I_x в бэровское пространство I_y называется универсальным, если каково бы ни было отображение $y = \varphi(\xi)$ любого нульмерного абсолютного G_{δ} (в частности, полного нульмерного метрического пространства) M в пространство I_y, найдется такое замкнутое подмножество F пространства I_x, гомеоморфное M, что во всех точках x и ξ имеет место соотношение $f(x) = \varphi(\xi)$.

В работе имеется много опечаток. Например, 1) стр. 104, строка 16 сверху, вместо δ^{m_1} должно быть σ_{m_1}; 2) стр. 105, строка 16 снизу, вместо $(m_1, m_2, \ldots, m_k)$ должно быть $(m_1, m_2, \ldots, m_k, \ldots)$ и вместо $y \in \sigma_m$ следует читать $y \in \sigma_{m_1}$; 3) стр. 106, строка 10 снизу, вместо $\psi(\xi)$ должно быть $\varphi(\xi)$. З. И. Козлова

9708. Об эффективной конструкции функций любого класса. Мошан (Sur la construction effective de fonctions de classe quelconque. Motchane Léon), Bull. sci. math., 1955, 79, nov.-dec., 180—190 (франц.)

Работа посвящена указанию простого способа построения функции классификации Бэра класса $\alpha+1$, отправляясь от последовательности функций класса α. Однако указанный здесь процесс не приводит к цели, так как работа ошибочна.

Данное на стр. 181 определение «существенной системы» сформулировано неясно. Если понимать его дословно, т. е. считать, что $S(n) \subset r(n)$, но, вообще говоря, $S(n) \neq r(n)$, то данное автором определение 5 (стр. 182) функции класса α неверно, так как удовлетворяющая сформулированным условиям функция может быть неизмеримой по Лебегу. Если же считать, что $S(n) \equiv r(n)$, то определение 5 совпадает с классическим определением 4 функции класса α. Однако все теоремы — A, B, C неверны (автор не дает подробных доказательств, а заявляет, что они следуют из его статьи в C. r. Acad. sci., 1951, **233**, 1569—1571).

Теоремы A, B, C представляют собой необходимые и достаточные условия неповышения класса предела сходящейся последовательности функций класса α.

Легко показать, что для двух последовательностей функций 1-го класса, определенных на отрезке [0,1]:

1) $f_n(r_n) = 1$, $f_n(x) = 0$ для $x \neq r_n$;

2) $\varphi_n(r_i) = 1$, $i \leqslant n$; $\varphi_n(x) = 0$, $x \neq r_i$, $i \leqslant n$,

где r_n — всевозможные рациональные точки отрезка [0,1], все три критерия A, B, C дают совпадающий результат, тогда как последовательность 1) сходится к нулю, а последовательность 2) — к функции 2-го класса. При этом критерии A и B дают повышение класса для 1) и 2), а критерий C — неповышение. Таким образом, все три теоремы A, B и C неверны. Следовательно, и рекомендуемый автором «легкий» способ построения функций класса $\alpha+1$ не проходит. Он и не может пройти без употребления тонкого аппарата—нестделимости множеств. Л. В. Келдыш

9709. К проблеме Лузина о разложении линейного континуума. Капуано (Sur un problème de Lusin concernant la décomposition du continu linéaire. Kapuano Isaac), C. r. Acad. sci., 1956, 242, № 8, 978—981 (франц.)

Статья посвящена доказательству утверждений: Всякое линейное множество, обладающее свойством Бэра, есть сумма одного множества первой категории на всяком совершенном множестве и не более $\aleph_1$ попарно непересекающихся B-множеств классов $\leqslant 3$. Доказательство основано на вспомогательных предложениях 1—6. Однако предложение 1 неверно. Построенное в другой заметке (РЖМат, 1957, 7746) автором множество E, содержащееся в неразложимом континууме K, таково, что E и $K \setminus E$ — множества «не (D)» всюду на K (множество E, содержащееся в континууме K, называется множеством Данжуа (D), если оно первой категории на каждом континууме $K_0 \subset K$ и покрывается счетной суммой простых дуг; множество E будет «не (D)» всюду на K, если для всякого $K_0 \subset K$ множество $E \cap K_0$ есть «не (D)»). Множество E не (D) всюду, так как никакое $E \cap K_0$ не покрывается счетной суммой простых дуг; а $K_0 \setminus E$ не (D), так как оно 2-й категории на K_0. Тем не менее $E \cap (K \setminus E) = \Lambda$, вопреки утверждению 1. Неверны также предложения 2, 3 и 4, утверждающие стационарность некоторых трансфинитных последовательностей (т. е. $\mathcal{E}_\alpha = \mathcal{E}_{\alpha+1} = \ldots$ для некоторого $\alpha < \Omega$). Утверждению 4, например, противоречит последовательность, которую можно построить, опираясь на континуум-гипотезу: $\mathcal{E}_0, \ldots, \mathcal{E}_x, \ldots | \Omega$, где $\mathcal{E}_0 \equiv E$, $\mathcal{E}_\alpha \setminus \mathcal{E}_{x+1}$ — одна точка и $\bigcap_{x<\Omega} \mathcal{E}_x = \Lambda$. Эта последовательность «$\mathfrak{L}$-регулярна» и, очевидно, не стационарна, вопреки утверждению 4.

Все дальнейшие доказательства опираются на 1—4, поэтому основное утверждение автора не доказано.

Кроме того, во всех доказательствах логический ход рассуждения совершенно неясен. Л. В. Келдыш

9710. Вопросы, касающиеся проблемы континуума. Капуано (Questions apparentées au problème du continu. Kapuano Isaac), C. r. Acad. sci., 242, № 15, 1833—1836 (франц.)

Основная часть статьи посвящена доказательству утверждения I: Всякое несчетное множество, являющееся суммой $\aleph_1$ B-множеств, есть сумма $\aleph_1$ непересекающихся B-множеств 3-класса.

Доказательство основано на леммах 1 и 2. Но лемма 1 неверна уже для канонических элементов 3-го класса. Пусть $E = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} P_{kn}$, $P_{kn} \cap P_{km} = \Lambda$ — канонический элемент 3-го класса, всюду плотный на отрезке, и для всякого $\varepsilon > 0$ среди P_{kn} есть только конечное число диаметра $> \varepsilon$. В каждом $P_{1n} \cap E$ выберем совершенное множество p_n и положим $G = C(\bigcup_{n=1}^{\infty} P_{1n}) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} p_n$. Легко видеть, что G есть множество типа G_δ, для любого интервала v множество $v \cap G \cap E$ несчетно и $G \cap E = \bigcup_{n=1}^{\infty} p_n$ не есть канонический элемент 3-го класса, вопреки утверждению леммы 1.

Дальнейшее доказательство теоремы I и лемм 2, 3 основано на лемме 1 и утверждении, которому посвящена предыдущая статья (реф. 9709) и которое не доказано автором (так как доказательство ошибочно). Поэтому I и II не являются доказанными.

Вторая часть статьи посвящена утверждению III: Существует плоское CA-множество 1-й категории на всяком континууме, не содержащееся в счетной сумме простых дуг (не (D)-множество). Это утверждение верно и следует из существования построенного автором ранее (РЖМат, 1957, 7746) множества E. Лемма 4 для него не нужна. Эта лемма, возможно, верна, но доказательство изложено неполно и разобрать его не удается. Л. В. Келдыш

9711. Два новых утверждения, эквивалентных континуум-гипотезе. Капуано (Deux propositions nouvelles équivalentes à l'hypothèse du continu. Kapuano Isaac), C. r. Acad. sci., 1956, 242, № 22, 2614—2617 (франц.)

Автор формулирует два утверждения A и B, относительно которых он стремится доказать, что они эквивалентны континуум-гипотезе. Доказательство опирается на утверждения I, II, III. Доказательство утверждения I: Если M есть сумма $\aleph_1$ линейных непересекающихся B-множеств, то M есть сумма $\aleph_1$ непересекающихся множеств типа G_δ, — опирается на неверную лемму 1 из предыдущей заметки (реф. 9710) и основное утверждение другой заметки (реф. 9709), до-

казательство которого ошибочно. Поэтому и доказательство I ошибочно. Доказательство III опирается на I, поэтому III не доказано. Утверждение II сформулировано очень неясно. Если заменить $\aleph_2$ на $\aleph_c$, где $\aleph_c$ — мощность континуума (здесь, по-видимому, в статье опечатка), то II утверждает, что всякое B-множество не типа F_σ имеет мощность континуума, так как точка — замкнутое множество. Если же заменить в формулировке II слово «замкнутые» на «совершенные», то II является простым следствием из того, что каждое линейное B-множество нигде не типа F_σ есть непрерывный и взаимно однозначный образ плоского множества типа G_δ, являющегося топологическим произведением линейного множества типа G_δ на совершенное множество. Приведенные автором леммы здесь не нужны. Ход рассуждений автора во всех доказательствах совершенно неясен. Правильность утверждения 3 сомнительна.

Так как доказательство сформулированных автором редукций A и B опирается на I, то оно ошибочно; следовательно, редукции A и B не доказаны.

Л. В. Келдыш

9712. Свойства множеств всегда первой категории. **Капуано** (Propriétés des ensembles toujours de première catégorie. Kapuano Isaac), C. r. Acad. sci., 1957, 244, № 1, 31—34 (франц.)

Основной целью настоящей статьи является доказательство предложений III: Всякое линейное несчетное множество, обладающее свойством Бэра (в узком смысле), есть сумма $\aleph_1$ непустых непересекающихся множеств типа F_σ, — и IV: Всякое множество первой категории на всяком совершенном множестве имеет мощность $\leqslant \aleph_1$.

Доказательство опирается на I и II, утверждающие, что пересечение некоторых трансфинитных убывающих последовательностей множеств есть множество первой категории. Однако утверждения I и II неверны. Пусть дана какая-то убывающая трансфинитная последовательность множеств типа F_σ, $\varphi_\alpha = \bigcup_n l_{\alpha n}$ ($l_{\alpha n}$ замкнуты), всюду плотных на отрезке и удовлетворяющих условиям предложения I. Взяв совершенное множество $p \subset C\varphi_1$ и положив $\varphi^*_\alpha = p \cup \varphi_\alpha$, можно перестроить сумму φ_α так, что $l^*_{\alpha 1} = p \cup \bigcup l_{\alpha n_k}$ — замкнутое множество, на котором p нигде не плотно, а для $n \neq n_k$ будет $l^*_{\alpha n} = l_{\alpha n}$. Тогда условия предложения I выполнены для последовательности $\{\varphi^*_\alpha\}$ и $p \subset \bigcap_{\alpha < \Omega} \varphi^*_\alpha$. Ошибка допущена в доказательстве утверждения 3, так как из теоремы Бэра следует стационарность убывающей последовательности замкнутых множеств

$$f_\mu : f_{\mu_{\nu_0}} = f_{\mu_{\nu_0+1}} = \ldots = f_{\mu_{\nu_0+\alpha}} = \ldots,$$

но не следует пустота $f_{\mu_{\nu_0}}$, так что $f_{\mu_{\nu_0}} \subset \bigcap_\alpha \varphi_\alpha$.

В нашем случае $p \subset \bigcap_{\nu \leqslant \mu} l^*_{\alpha 1}$ для любого μ и $p \subset \bigcap_\alpha \varphi^*_\alpha$. Так как доказательства III и IV опираются на I и II, то они ошибочны и III, IV не доказаны.

В конце статьи автор указывает на ошибочность леммы 1 одной из предыдущих заметок (реф. 9710) и предлагает исправление доказательства, данного там. Но это исправление также ошибочно, так как автор ссылается на 1-й случай леммы заметки, а пример, приведенный в реферате на эту заметку (реф. 9710), показывает, что уже заключение для 1-го случая леммы 1 неверно.

Л. В. Келдыш

9713. Множества, обладающие свойством Бэра в узком смысле. **Капуано** (Ensembles jouissant de la propriété de Baire au sens restreint. Kapuano Isaac), C. r. Acad. sci., 1957, 244, № 6, 708—711 (франц.)

Статья посвящена доказательству четырех предложений, касающихся множеств, обладающих свойством Бэра в узком смысле, и эквивалентности некоторых утверждений гипотезе континуума. Однако все доказательства опираются на другую статью автора (реф. 9712), в которой утверждения I и II ошибочны, а III и IV не доказаны. Поэтому все утверждения реферируемой статьи автором не доказаны. Заметим, что ее утверждение II верно и является непосредственным следствием теоремы Хаусдорфа о представлении всякого полного несчетного сепарабельного пространства в виде строго возрастающей последовательности $\aleph_1$ множеств типа G_δ (Hausdorff F., Fundam math., 1936, 26, 241—255).

Л. В. Келдыш

9714. Конфинальность. **Шмидт** (Konfinalität. Schmidt Jürgen), Z. math. Logik und Grundl. Math., 1955, 1, № 4, 271—303 (нем.)

Частично упорядоченное множество E называется ориентированным, если оно направленное и не обладает наибольшим элементом. Подмножество M ориентированного множества E называется терминальным (в E), если оно не ограничено. Подмножество M ориентированного множества называется конфинальным (в E), если для каждого элемента $x \in E$ найдется такой элемент $y \in M$, что $x \leqslant y$. Однозначное отображение φ ориентированного множества A в ориентированное множество B называется передним суппортом однозначного отображения ψ множества B в множество A, а отображение ψ — задним суппортом отображения φ, если для каждых элементов $a \in A$, $b \in B$ из $a \geqslant \psi b$ следует $\varphi a \geqslant b$. Отображение φ тогда и только тогда является передним суппортом, когда образ конфинального множества является конфинальным множеством или когда полный прообраз конфинального множества является конфинальным множеством. Такое отображение φ называется конфинальным. Отображение ψ тогда и только тогда является задним суппортом, когда образ терминального множества является терминальным множеством или когда полный прообраз терминального множества является терминальным множеством. Такое отображение ψ называется терминальным.

По определению ориентированное множество A конфинально меньше ориентированного множества B, а множество B конфинально больше множества A, если существует конфинальное отображение множества A в множество B. В этом случае существует терминальное отображение множества B в множество A, т. е. множество B терминально меньше множества A, а множество A терминально больше множества B. Ориентированные множества называются конфинально подобными, $A \sim B$, если существует ориентированное множество C, конфинальные подмножества которого A^* и B^* изоморфны множествам A и B соответственно. Ориентированные множества A и B тогда и только тогда конфинально подобны, когда существуют такое отображение φ множества A в множество B и такое отображение ψ множества B в множество A, что каждое из них является одновременно и передним и задним суппортом другого, т. е. когда каждое из них конфинально меньше другого. Отношение конфинального подобия является отношением эквивалентности, так что все ориентированные множества разбиваются на конфинальные типы, т. е. классы конфинально подобных ориентированных множеств.

Частично упорядоченное множество E содержит конфинальное подмножество, удовлетворяющее условию

минимальности, в частности упорядоченное множество E содержит вполне упорядоченное конфинальное подмножество. Ориентированное множество E называется неразветвленным, если оно содержит упорядоченное, а следовательно, и вполне упорядоченное конфинальное подмножество; в противном случае оно называется разветвленным. Если ориентированное множество A неразветвленное и конфинально меньше ориентированного множества B, то и множество B неразветвленное, т. е. понятие неразветвленности есть инвариант конфинального типа. В этом случае множества A и B конфинально подобны. Неразветвленные конфинальные типы совпадают с минимальными.

Если A — неразветвленное ориентированное множество и λ — наименьшее ординальное число, принадлежащее конфинальному типу, определенному множеством A, то A содержит вполне упорядоченное конфинальное подмножество порядкового типа λ. Следовательно, неразветвленные ориентированные множества A и B тогда и только тогда конфинально подобны, когда они обладают изоморфными конфинальными подмножествами A и A'.

Мощностью базиса ориентированного множества A называется наименьшая мощность конфинального в A подмножества. Если множество A конфинально меньше множества B, то мощность базиса множества A не менее мощности базиса множества B, в частности конфинально подобные множества обладают одинаковой мощностью базиса.

Степенью ограниченности ориентированного множества A называется наименьшая мощность терминального в A подмножества. Если множество B терминально меньше множества A, то степень ограниченности множества B не менее степени ограниченности множества A, в частности конфинально подобные множества имеют одинаковую степень ограниченности. Степень ограниченности произвольного ориентированного множества является регулярным кардинальным числом.

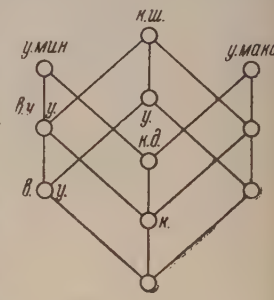
Пусть E — множество мощности $\aleph_\alpha$ и $\aleph_\beta \leqslant \aleph_\alpha$. Рассматривается система всех множеств $M \subseteq E$ мощности меньшей $\aleph_\beta$. Конфинальный тип этого при помощи теоретико-множественного включения ориентированного множества зависит только от α и β и обозначается через $\tau_{\alpha\beta}$. Изучаются конфинальные типы $\tau_{\alpha\beta}$. Доказывается, что ориентированное множество A неразветвленное тогда и только тогда, когда его мощность базиса совпадает со степенью ограниченности. Приводятся условия, при которых мощность множества E является регулярной.

Если ориентированные множества A_i конфинально меньше ориентированных множеств B_i $(i \in I)$, то и прямое произведение $\mathrm{P}A_i$ конфинально меньше $\mathrm{P}B_i$. Прямое произведение $\mathrm{P}A_i$ конфинально меньше своего подпроизведения $\mathrm{P}A_j$, в частности конфинально меньше своих прямых множителей A_i. Прямое произведение $\mathrm{P}A_\nu$ конечного числа прямых множителей A_ν есть конфинально наибольшее ориентированное множество среди множеств, конфинально меньших всех A_ν. Степень ограниченности прямого произведения равна минимуму степеней ограниченности прямых множителей. Мощность базиса прямого произведения с конечным числом прямых множителей равна максимуму мощностей базиса сомножителей. А. Х. Лившиц

9715. Обобщенная полная упорядоченность и условия конечности в теории порядка. Шмидт (Eine verallgemeinerte Wohlordnung und die Endlichkeitsbedingungen der Ordnungstheorie. Schmidt Jürgen), Arch. Math., 1955, 6, № 5, 374—381 (нем.)

Исследуются связи между различными свойствами частично упорядоченных множеств E, изученными ранее автором и другими математиками.

Множество E удовлетворяет условию минимальности (максимальности) (сокращенно у. мин., у. макс.), если каждое $A \subset E$ имеет минимальные (максимальные) элементы. Множество $Z \subset E$ называется концом E, если из $x \in Z$, $y \in Z$, $x \leqslant y$ следует, что $y \in Z$. Пусть $A \subset M$. Множество A порождает M (A ist eine Erzeugende von M), если наименьший конец E, содержащий M, совпадает с наименьшим концом E, содержащим A. Если среди порождающих M множеств A имеется конечное, то M называется финитарным (finitär). Если каждое $M \subset E$ финитарно, E называется вполне частично упорядоченным (сокращенно в. ч. у.). Множество E обладает конечной шириной (к. ш.), если каждое подмножество попарно несравнимых элементов из E конечно. E обладает конечной длиной (к. д.), если каждое подмножество попарно сравнимых элементов из E конечно.



Часть связей между перечисленными свойствами дается схемой, где у. обозначает упорядоченность, к. — конечность, в. у. — полную упорядоченность. Кружки схемы рассматриваются как элементы структуры, в которой порядок определен для пары элементов, соединенных отрезком. Если $x = y \wedge \ldots \wedge z$, где $x, y, \ldots, z$ — элементы структуры, свойство множества E, отвечающее кружку x, есть логическая конъюнкция свойств, соответствующих кружкам $y, \ldots, z$. Например: {E конечно} $\leftrightarrow$ {E обладает к. ш.} & {E обладает к. д.}. Для дизъюнкций и $\bigvee$ это не верно. Из связей, не вошедших в схему, отметим: 1) {в. ч. у. E} $\leftrightarrow$ {у. макс. $\overset{\circ}{E}$}, где $\overset{\circ}{E}$ — множество всех концов E, упорядоченных по включению; 2) если каждый элемент E есть точная верхняя граница конечного числа элементов из некоторого подмножества E, обладающего конечной шириной, то E имеет конечную ширину. А. Н. Балуев

9716. Разложение евклидовых пространств. Секанина (O rozkladech eukleidovských prostorů. Sekanina Milan), Časop. pěstov. mat., 1958, 83, № 1, 70—79 (чешск.; рез. русск., англ.)

Пусть E_n означает n-мерное евклидово пространство; $M_1, M_2 \subset E_n$; $M_1 \doteq M_2$ означает, что существует движение T 1-го рода в E_n такое, что $T(M_1) = M_2$. В работе доказаны следующие теоремы:

Теорема 1. Пусть $n \geqslant 2, 0 < \mathfrak{m} < 2^{\aleph_0}$, $\mathfrak{S}$ — система непустых множеств M_ι из E_n, $\overline{\overline{\mathfrak{S}}} = 2^{\aleph_0}$, $\overline{\overline{M}}_\iota \leqslant \mathfrak{m}$. [$\overline{\overline{\mathfrak{S}}}(\overline{\overline{M}}_\iota)$ означает мощность множества $\mathfrak{S}(M_\iota)$]. Тогда существует система $\mathfrak{S}'$ множеств M^ι, для которой: 1) $M^\iota \doteq M_\iota$, 2) $\mathfrak{S}'$ является разложением пространства E_n.

Теорема 2. Пусть I — множество индексов, $i = 2^{\aleph_0}$. Пусть каждому $\iota \in I$ соответствует $M_\iota \neq \phi$, $M_\iota \subset E_k \subset E_{2k+1}$. Тогда существует система $\mathfrak{S}$ множеств M^ι из E_{2k+1}, для которой: 1) $M^\iota \doteq M_\iota$, 2) $\mathfrak{S}$ является разложением пространства E_{2k+1}.

Теоремы 3 и 4 касаются разложения прямой.

Резюме автора

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ ПОЛИНОМАМИ И ИХ ОБОБЩЕНИЯМИ

9717. **Об интегрируемости некоторых тригонометрических рядов. Станоевич** (О интеграбилности неких тригонометрических редова. Станојевић Часлав В.), Зб. радова. Српска АН, 1957, књ. 55, 53—57 (сербо-хорв.; рез. англ.)

Доказываются две теоремы:

1. Ряд

$$\frac{1}{2}a_0+\sum_{\nu=1}^{\infty}a_\nu\cos\nu x \qquad (1)$$

будет рядом Фурье, если коэффициенты имеют вид $a_\nu=\alpha_\nu\beta_\nu=o(1)$, причем последовательность $\{\alpha_\nu\}$ имеет ограниченное изменение, а последовательность $\{\beta_\nu\}$ ограничена и квазивыпукла и ряд

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}|\beta_\nu\Delta\alpha_\nu|\ln(\nu+1)$$

сходится.

При $\alpha_\nu\equiv 1$ этот результат был получен А. Н. Колмогоровым, а при $\beta_\nu\equiv 1$ — Юнгом.

2. Ряд (1) будет рядом Фурье, если $a_\nu=\alpha_\nu\beta_\nu$, где

$$\frac{1}{2}\alpha_0+\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu\cos\nu x$$

— ряд Фурье для некоторой функции из $L(0,\pi)$, а последовательность $\{\beta_\nu\}$ квазивыпукла и $\beta_\nu=o(1)$.

Теорема 2, прямое доказательство которой дает автор, следует из известных результатов (на это указал референту А. А. Конюшков). Именно, при выполнении условий теоремы 2 ряд

$$\frac{1}{2}\beta_0+\sum_{\nu=1}^{\infty}\beta_\nu\cos\nu x \qquad (2)$$

будет рядом Фурье суммируемой функции (Зигмунд А., Тригонометрические ряды, М.—Л., 1939, § 5.12), и достаточно применить теорему: Для того чтобы множители $\{\beta_\nu\}$ преобразовывали ряд Фурье из L в ряд Фурье из L, необходимо и достаточно, чтобы ряд (2) был рядом Фурье — Стилтьеса (см. указанную выше книгу, § 4. 6).

А. А. Шнейдер

9718. **Об одном классе функций. Конюшков А. А.**, Успехи матем. наук, 1957, 12, № 4, 177—180

Рассматривается банахово пространство S_1 2π-периодических функций, коэффициенты Фурье которых удовлетворяют условию $\sum_{n=1}^{\infty}n(a_n^2+b_n^2)<\infty$, при этом

$$\|f\|_{S_1}=\pi^{1/2}\left[\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}n(a_n^2+b_n^2)\right]^{1/2}.$$

Исследуются с точки зрения категорий различные множества функций в пространствах S_1, $\mathrm{Lip}\left(\frac{1}{2},2\right)$, CS_1 (пространство непрерывных функций, принадлежащих S_1). В качестве примера приведем теорему:

Пусть $\varphi(h)$ — неубывающая функция с $\varphi(h)>0$ при $h>0$ и $\varphi(h)\to 0$, когда $h\to+0$. Положим

$$U(f,h;\varphi)=\left[\int_0^{2\pi}|f(x+h)-f(x)|\,dx\right]\Big/h^{1/2}\varphi(h),\quad h>0.$$

Тогда множество M_φ функций $f\in S_1$, для которых $\overline{\lim}_{h\to+0}U(f,h;\varphi)=+\infty$, есть резидуальное множество в S_1 (т. е. его дополнение в S_1 первой категории), причем в него входят некоторые функции класса $\mathrm{lip}\frac{1}{2}$.

О. В. Бесов

9719. **Об одном признаке сходимости Харди и Литлвуда. Нобл** (On a convergence criterion of Hardy and Littlewood. Noble M. E.), Quart. J. Math., 1958, 9, № 33, 28—39 (англ.)

Обозначим через $s_n(x)$ частные суммы ряда Фурье для периодической функции $f(x)\in L(-\pi,\pi)$. Положим (для фиксированного x) $F(t)=\int_0^t|f(x+u)-f(x)|\,du$.

Через $\varphi(t)$ обозначим какую-нибудь возрастающую непрерывную при $t\geqslant 0$ функцию, для которой $\varphi(0)=0$ и $\varphi(t)=O\{(\log t^{-1})^{-1}\}$ $(t\to 0+)$.

Доказывается следующий признак сходимости (теорема 2): Подпоследовательность $s_{n_k}(x)$ будет сходиться в точке x к $f(x)$, если $F(t)=o\{t\varphi(|t|)\}$ $(t\to 0)$ и существуют $\Lambda_k>0$, для которых

а) $\Lambda_k=o(n_k)$,

б) $\int_{n_k}^{\Lambda_k-1}u^{-1}\varphi(u)\,du=O(1)$,

в) $\overline{\lim_{k\to\infty}}[\min\{s_m(x)-s_n(x)\}]\geqslant 0$,

где номера n, m удовлетворяют неравенствам $|n-n_k|\leqslant\Lambda_k$, $|m-n_k|\leqslant\Lambda_k$, $m>n$.

Показывается (теорема 4), что наложенное в теореме 2 на Λ_k условие б) ослабить нельзя, если рассматривать функцию $\varphi(t)$, для которой при некотором фиксированном $\varkappa$ $(0<\varkappa<1)$

$$\overline{\lim_{t\to 0+}}\frac{\varphi(\varkappa t)}{\varphi(t)}>0$$

(впрочем, автор думает, что это дополнительное условие для функции $\varphi(t)$ здесь излишне).

Наиболее важный частный случай теоремы 2 получается при $\varphi(t)=(\log t^{-1})^{-1}$ и $\Lambda_k=n_k^\delta$ $(\delta>0)$ (теорема 1). Из теоремы 1 вытекают один неопубликованный признак сходимости Боаса (R. P. Boas, Jr) и известный признак Харди и Литлвуда: $s_n(x)\to f(x)$, если $F(t)=o\{t(\log|t^{-1}|)^{-1}\}$ и члены ряда Фурье в точке x удовлетворяют условию

$$a_n\cos nx+b_n\sin nx\geqslant -Kn^{-\delta}\quad(K>0,\ \delta>0).$$

Приводится также следующий результат (теорема 3): $s_{n_k}(x)\to f(x)$, если $F(t)=O\{t(\log|t|^{-1})^{-1}\}$ и для $\Lambda_k=n_k^\delta$ при всяком $\delta<1$ выполняется условие б) теоремы 2.

А. А. Шнейдер

9720. **О насыщении процессов суммирования. Фавар** (Sur la saturation des procédés de sommation. Favard J.), J. math. pures et appl., 1957, 36, № 4, 359—372 (франц.)

Доказываются две теоремы о числовых рядах (эти теоремы легко переносятся на ряды в пространстве Банаха).

Обозначения: $S=\sum_0^\infty u_i$, $\sigma_n(S)=\sum_0^{n-1}\times\left(1-\frac{i}{n}\right)u_i-$

суммы $(C, 1)$, $\sigma_n^2(S) = \sum_0^{n-1}\left(1-\frac{i}{n}\right)\times\left(1-\frac{i}{n+1}\right)u_i$ — суммы $(C, 2)$, $T = \sum_0^{\infty} iu_i$.

Теорема 1. Для того чтобы ряд S был суммируем $(C, 1)$ к сумме s и чтобы $s - \sigma_n(S) = O(n^{-1})$, необходимо и достаточно, чтобы $\sigma_n(T) = O(1)$.

Достаточность условия была доказана Алексичем (Alexits G., Mat. fiz. lapok, 1941, 48). Теорема 2 содержит аналогичный результат для суммируемости $(C, 2)$.

Дается определение насыщенного процесса и класса насыщения для биортогональных рядов в пространстве Банаха и высказывается несколько соображений об их свойствах. Эти теоремы и соображения применяются для доказательства следующей теоремы.

Пусть $\widetilde{x}(t)$ обозначает функцию, сопряженную к периодической функции $x(t)$. Классом насыщения процесса (C, k) (k — натуральное число), примененного к рядам Фурье периодических функций, является: 1) в пространстве C — множество функций $x(t)$, сопряженные к которым $\widetilde{x}(t)$ удовлетворяют условию Липшица порядка 1; 2) в пространстве L^p $(p > 1)$ — множество функций $x(t)$ таких, что $\widetilde{x}(t)$ эквивалентна абсолютно непрерывной функции, имеющей почти всюду производную $\widetilde{x}'(t)$, принадлежащую L^p; 3) в пространстве L — множество функций $x(t)$ таких, что $\widetilde{x}(t)$ имеет ограниченное изменение.

Частные случаи этой теоремы были доказаны Заманским (Zamansky M., Ann. scient. École norm. supèr., 1948, 31; 1949, 32) и Алексичем (Alexits G., Acta math. Acad. scient. hung., 1952, 3).

Высказываются также соображения о классе насыщения для метода суммирования Абеля в рассматриваемых пространствах. А. Х. Турецкий

9721. **Гармоническое суммирование продифференцированного ряда Фурье.** Patx (The harmonic summation of the derivel Fourier series. Rath P. C.), Duke Math. J., 1958, 25, № 1, 125—130 (англ.)

Для функции $f(x) \in L(-\pi, \pi)$, имеющей период 2π, через S_n обозначим частные суммы продифференцированного ряда Фурье в некоторой фиксированной точке x. Положим

$$g(t) = \{f(x+t) - f(x-t)\} / 4\sin\frac{t}{2} - C$$

(C зависит от x). Доказывается теорема: Если $g(t)$ имеет ограниченную вариацию на $(0, \pi)$ и $g(t) \to 0$ при $t \to 0$, то

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{n} S_{n-r} / r \log n = C.$$

А. А. Шнейдер

9722. **О наилучшем приближении классов функций, представимых в форме свертки.** Сунь Юн-шен, Докл. АН СССР, 1958, 118, № 2, 247—250

Обозначаем через H_p $(1 \leqslant p < \infty)$ класс действительных функций $\varphi(t) \in L^p$ периода ω, для которых $\|\varphi\| = \left\{\int_0^{\omega} |\varphi(t)|^p dt\right\}^{1/p} \leqslant 1$, а через H_∞ — класс существенно ограниченных функций $\varphi(t)$ с периодом ω, удовлетворяющих условию $\operatorname{ess\,sup}|\varphi(t)| \leqslant 1$.

Рассматриваются функции $f(x)$, представимые в форме свертки:

$$f(x) = \frac{1}{\omega}\int_0^{\omega} K(t-x)\varphi(t)\,dt, \qquad (1)$$

где $\varphi(t) \in H_p$, а $K(t) \in L^q$ $(1/p + 1/q = 1)$ в случае $1 < p \leqslant \infty$, и $K(t)$ непрерывна при $p = 1$.

Пусть $\{f_k(x)\}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ — заданная система Чебышева непрерывных функций периода ω и

$$E_n(f)_c = \min_{\alpha_k} \max_{0\leqslant x\leqslant\omega} \left| f(x) - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k f_k(x) \right|$$

(α_k — действительные числа) — наилучшее приближение функции $f(x)$, представимой в форме (1), полиномами по системе $\{f_k(x)\}$.

В работе приводятся общие формулы для величины

$$M_n^{(p)} = \sup_{\varphi\in H_p} E_n(f)_c \quad (1 \leqslant p \leqslant \infty);$$

исследуются свойства экстремальных функций $f_0(x)$, для которых $E_n(f_0)_c = M_n^{(p)}$; приводятся условия, при которых экстремальная функция $f_0(x)$ единственна, а также дается зависимость между величиной $M_n^{(p)}$ и наилучшим приближением соответствующего ядра $K(t)$ в метрике L^q.

Приводится вытекающее из этих результатов следствие, что если $f(x)$ — функция периода 2π, имеющая непрерывную r-ю производную $f^{(r)}(x)$, то

$$E_n(f)_c \leqslant \frac{K_r}{n^r} E_n(f^{(r)})_c \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

где K_r — константа Фавара. Дается аналогичное неравенство и для сопряженных функций.

Приведенные в статье результаты являются обобщением результатов Фавара (Favard J., Bull. sci. math., 1937, 61, 209), Н. И. Ахиезера, М. Г. Крейна (Докл. АН СССР, 1937, 15, 107), Надя (Nagy B., Ber. Math.-phys. Kl. Akad. Wiss. Leipzig, 1938, 90, 103) и С. М. Никольского (Изв. АН СССР. Сер. матем., 1946, 10, 207). А. В. Ефимов

9723. **Об одностороннем приближении тригонометрическими полиномами.** Ганелиус (On one-sided approximation by trigonometrical polynomials. Ganelius Tord), Math. scand., 1956, 4, № 2, 247—258 (англ.)

Пусть H_r (r — целое число) — класс $(r-1)$ раз дифференцируемых функций $h(x)$ периода 2π, для которых $h^{(r-1)}$ есть интеграл от функции с конечным изменением V_r. Если $h \in H_r$, то существует такой тригонометрический полином U_n порядка не выше $n-1$, что:

а) $U_n \geqslant h$, б) $\|U_n - h\|_{L(0,2\pi)} \leqslant 2\pi C_r V_r n^{-(r+1)}$,

в) $\operatorname{var}(U_n - h) \leqslant D_r V_r n^{-r}$.

Здесь C_r и D_r — не зависящие от f и n постоянные, причем определено наименьшее значение C_r для каждого r.

Для алгебраических полиномов утверждения а) и б) доказаны референтом (РЖМат, 1956, 8718). G. Freud

9724. **Некоторые проблемы максимума кратных рядов Фурье.** Бонончини (Alcuni problemi di massimo per le serie multiple di Fourier. Bononcini Vittorio E.), Riv. mat. Univ. Parma, 1956, 7, № 3-5, 255—269 (итал.)

Пусть $\sum_{-\infty}^{\infty} c_\nu e^{i\nu x}$ — ряд Фурье интегрируемой по Лебегу функции $f(x)$ периода 2π, удовлетворяющей условию

$$|f(x)| \leqslant 1. \qquad (1)$$

Обозначим $L_m = \sum_{\nu=0}^{m} \mu_\nu c_{\nu+k}$, где $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_m$ — фиксированная система комплексных чисел, k — целое положительное число. Cac (Szász O., Amer. J. Math., 1939, 61, 165—177) исследовал верхние грани L_m, $\operatorname{Re} L_m$, $\operatorname{Im} L_m$ на классе функций, удовлетворяющих условию (1).

Автор решает аналогичные задачи для функций двух переменных. М. Ф. Тиман

9725. Почти периодические функции непрерывного и целочисленного аргумента. Георгиу (Funcţii aproape-periodice de variabilă continuă şi de variabilă întreagă. Gheorghiu N.), An. ştiinţ. Univ. Iaşi, 1956, Sec. 1, 2, № 1-2, 29—31 (рум.; рез. русск., франц.)

Сравниваются два определения почти периодичности: определение Бора (Bohr, Acta math., 1925, 45) и определение Фань Цюя почти периодической функции целочисленного аргумента n (Fan Ky, Math. Z., 1942—1943, 48).

Определение: $\varphi(n)$ называется почти периодической функцией целочисленного аргумента $n (-\infty < n < +\infty)$, если произвольному $\varepsilon > 0$ соответствует такое целое число $N > 0$, что в любом отрезке $[m, m+N]$ целых чисел (m — целое) найдется такое целое p, что $|\varphi(n+p) - \varphi(n)| < \varepsilon$ для любого n.

Доказывается, что полигональная функция $f(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$, определенная по формуле: $f(x) = \varphi(n) + (x - n)[\varphi(n+1) - \varphi(n)]$, если $n \leqslant x < n+1$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, будет почти периодической по Бору, если $\varphi(n)$ — почти периодическая функция целочисленного аргумента n. Доказывается, что необходимое и достаточное условие для того, чтобы функция $f(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$ была почти периодической в смысле Бора, состоит в следующем: 1) $f(x)$ равномерно непрерывна на $(-\infty < x < +\infty)$, 2) как бы мало ни было $\delta > 0$, функция $f(n\delta)$ целочисленного аргумента n является почти периодической. На основе данных свойств устанавливается возможность равномерной аппроксимации любой почти периодической функции Бора последовательностью полигональных почти периодических функций Бора с равноотстоящими узлами. Вершины графика полигональной функции приближения лежат на графике заданной функции. А. С. Кованько

9726. Структура тригонометрических функционалов и ее следствия. Вороновская Е. В., Успехи матем. наук, 1957, 12, № 5, 254—257

На множестве алгебраических полиномов определяются тригонометрические функционалы при условии $F(x^k) = \cos k\varphi$ или $\sin k\varphi$ и изучаются экстремальные полиномы отрезков $F_{\cos} = 1, \cos\varphi, \ldots, \cos n\varphi$; $F_{\sin} = 0, \sin\varphi, \ldots, \sin n\varphi$ и их свойства в направлении предыдущих работ автора (РЖМат, 1956, 2119, 2120; 1957, 317). Доказывается, что $F_{\cos}$ и $F_{\sin}$ обслуживаются либо полиномами Чебышева, либо полиномами Золотарева и никакими другими. С. И. Зуховицкий

9727. Оценка сходимости в среднем тригонометрических интерполяционных многочленов. Золин А. Ф., УзССР Фанлар Акад. докладлари, Докл. АН УзССР, 1958, № 2, 17—22 (рез. узб.)

Доказываются:

Лемма. Фундаментальные полиномы

$$t_i(\Theta) = \sin\frac{2n+1}{2}(\Theta - \Theta_i) \Big/ \left[(2n+1)\sin\frac{\Theta - \Theta_i}{2}\right]$$

интерполяционного тригонометрического полинома

$$T_n(f, \Theta) = \sum_{i=0}^{2n} f(\Theta_i)\, t_i(\Theta) \qquad (1)$$

с равноотстоящими узлами $\Theta_i = 2\pi i/(2n+1)$ $(i = 0, 1, \ldots, 2n)$ ортогональны в промежутке $[0, 2\pi]$, т. е. $\int_0^{2\pi} t_i(\Theta)\, t_k(\Theta)\, d\Theta = 0$ при $i \neq k$.

Теорема. Если $f(\Theta)$ — непрерывная 2π-периодическая функция, $T_n(f, \Theta)$ — полином (1), то $\int_0^{2\pi} [f(\Theta) - T_n(f, \Theta)]^2 d\Theta \leqslant 8\pi E_n^2$, где E_n — наилучшее равномерное приближение функции $f(\Theta)$ тригонометрическими полиномами n-го порядка.

Опечатка: в формуле (2) лишний множитель $\frac{1}{2n+1}$.

А. Х. Турецкий

См. также: 9495, 9496, 9983.

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Редакторы *А. И. Маркушевич, Г. Ц. Тумаркин*

9728. Аналитические функции, определяемые интегралами. Павлючук А. К., Научн. ежегодник за 1954 г. Саратовск. ун-т, 1955, 680—681

Доказывается следующая теорема (теорема 1): Пусть $f(z, s)$ — функция комплексных аргументов z и s, определенная при $z \in L$ и $s \in G$, где L — спрямляемая кривая плоскости z и G — область плоскости s, и обладающая следующими свойствами: 1) $f(z, s)$ ограничена, когда $z \in L$ и $s \in G'$, где G' — замкнутая область, целиком лежащая в G; 2) $f(z, s)$ при фиксированном z есть голоморфная функция от s в G; 3) $f(z, s)$ при фиксированном s интегрируема вдоль L. Тогда

$$F(s) = \int_L f(z, s)\, dz$$

есть голоморфная функция в области G и при любом натуральном n

$$F^{(n)}(s) = \int_L \frac{\partial^n f(z, s)}{\partial s^n}\, dz.$$

Примечание референта. Доказательство теоремы 2 статьи неверно: все неравенства в нем верны лишь, если $f(z, s)$ ограничена на L при каждом $s \in G$ и если длина l кривой L конечна, т. е. когда мы фактически находимся в условиях сформулированной теоремы 1. Но само утверждение теоремы 2, возможно, и верно. Ю. Ю. Трохимчук

9729. Анализ рядов Фурье для несбалансированной машины методом интегрирования по замкнутому контуру. Блейк (Fourier analysis of engine unbalance by contour integration. Bleick W. E.), Amer. Math. Monthly, 1956, 63, № 7, 466—472 (англ.)

Дан анализ рядов Фурье, встречающихся при рассмотрении динамически несбалансированной системы одноцилиндровой поршневой машины, который представляет интерес как пример инженерного применения комплексного переменного. И. К. Волков

9730. Линейная система и причинность. Лафлёр (Système linéaire et causalité. Lafleur Ch.),

Revue H. F., 1957, 3, № 11, 399—404 (франц.)
Реферат см. РЖЭ, 1958, № 15, 26728.

9731. О синтезе линейной системы, исходя из действительной части передаточной функции. Приложение к случаю трансцендентных функций. Лафлёр (Sur la synthèse d'un système linéaire à partir de la partie réelle de sa fonction de transfert. Application au cas des fonctions transcendantes. Lafleur Ch.), Revue H. F., 1957, 3, № 12, 415—419 (франц.)

В предыдущей работе автора (реф. 9730) приводится соотношение между передаточной функцией $T(p)$ линейной постоянной во времени системы и ее действительной частью $R(\omega)$ посредством равенства вида

$$T(p) = \frac{1}{\pi}\int R(\omega)\,\frac{2p}{p^2+\omega^2}\,d\omega, \qquad (1)$$

где интеграл берется вдоль действительной оси (другие аналогичные соотношения см. РЖМат, 1957, 7987).

Рассматривается условие существования интеграла (1). После подстановки $\omega = \operatorname{ctg}\theta/2$ оно переходит в условие разрешимости задачи Дирихле для единичного круга при заданных посредством функции $f(\theta) = R(\operatorname{ctg}\theta/2)$ значениях на окружности. Как известно, это условие обеспечивается суммируемостью функции $f(\theta)$ в промежутке $(-\pi, \pi)$, откуда следует условие

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{R(\omega)}{1+\omega^2}\,d\omega < \infty. \qquad (2)$$

Указывается, что условие физической осуществимости по Палею и Винеру (Paley, Wiener, Amer. Math. Soc., 1934, 19) является частным случаем условия (2).

Приводится прием аппроксимации $R(\omega)$ посредством конечной суммы рациональных дробей. При этом автор не касается вопроса сходимости процесса аппроксимации. Приводится числовой пример. Н. А. Бразма

9732. Об обобщении абсолютной суммируемости и некоторых теоремах типа Литлвуда-Палея. Флетт (On an extension of absolute summability and some theorems of Littlewood and Paley. Flett T. M.), Proc. London Math. Soc., 1957, 7, № 25, 113—141 (англ.)

В первой части работы дается обобщение понятий абсолютной суммируемости ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \qquad (1)$$

методами Абеля и Чезаро. Ряд (1) автор называет суммируемым $|A|_k$-методом ($k \geqslant 1$), если степенной ряд $\psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится для $0 \leqslant x < 1$ и его сумма $\psi(x)$ удовлетворяет условию $\int_0^1 (1-x)^{k-1}|\psi'(x)|^k dx < \infty$, и $|C, \alpha|_k$-методом ($k \geqslant 1$. $\alpha > -1$), если

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}|\tau_n^{\alpha}|^k = \sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1}|\sigma_n^{\alpha} - \sigma_{n-1}^{\alpha}|^k < \infty,$$

где σ_n^{α} — средние Чезаро порядка α для ряда (1), $\tau_n^{\alpha} = n(\sigma_n^{\alpha} - \sigma_{n-1}^{\alpha})$. Методы $|A|_k$ и $|C, \alpha|_k$ при $k = 1$ совпадают с известными методами абсолютной суммируемости соответственно Абеля и Чезаро порядка α. Ниже под (A)- и (C, α)-методами будем понимать обыкновенные методы суммирования соответственно Абеля и Чезаро порядка α.

Доказаны следующие теоремы, в которых числа k и k' связаны условием $\frac{1}{k} + \frac{1}{k'} = 1$, а константа A зависит только от тех параметров, которые указаны:

Теорема 1. Если ряд (1) суммируем $|C, \alpha|_k$-методом, $k > 1$, $\alpha > -1$, то он суммируем и $|C, \beta|_r$-методом для $r \geqslant k$ и $\beta \geqslant \alpha + \frac{1}{k} - \frac{1}{r}$. Кроме того,

$$\left\{\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}|\tau_n^{\beta}|^r\right\}^{1/r} \leqslant A(k, r, \alpha, \beta)\left\{\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}|\tau_n^{\alpha}|^k\right\}^{1/k}.$$

Теорема 2. Если ряд (1) суммируем $|C, \alpha|_k$-методом, $k \geqslant 1$, $\alpha > -1$, то он суммируем $|A|_k$-методом. Кроме того,

$$\int_0^1 (1-x)^{k-1}|\psi'(x)|^k dx \leqslant A(k, \alpha)\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}|\tau_n^{\alpha}|^k.$$

Теорема 3. Если ряд (1) суммируем $|C, \alpha|_k$-методом, $k \geqslant 1$, $\alpha \geqslant 0$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1-k\alpha}|a_n|^k$ сходится и

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1-k\alpha}|a_n|^k \leqslant A(k, \alpha)\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}|\tau_n^{\alpha}|^k.$$

Теорема 4. Если ряд (1) суммируем $|C, \alpha|_k$-методом, $k > 1$, $\alpha > -1/k$, и (A)-методом, то он суммируем (C, β)-методом, $\beta > \alpha - \frac{1}{k'}$.

Теорема 5. Если ряд (1) суммируем (A)-методом и

$$T = \sup_n\left\{n^{-1}\sum_{\nu=1}^{n}|\tau_\nu^{\alpha}|^k\right\}^{1/k}$$

конечно, где $k > 1$, $\alpha > -\frac{1}{k}$, то он суммируем (C, β)-методом $\beta > \alpha - \frac{1}{k'}$. Кроме того,

$$|\sigma_n^{\beta}| \leqslant \sup_{0\leqslant x<1}|\psi(x)| + A(k, \alpha, \beta)\cdot T.$$

Теорема 6. Если ряд (1) суммируем (A)-методом и $\tau = \sup_n|\tau_n^{\alpha}|$ конечно ($\alpha \geqslant 0$), то он суммируем (C, β)-методом, $\beta > \alpha - 1$. Кроме того, если $\alpha > 0$, $\beta \geqslant \alpha - 1$, то для $n \geqslant 1$ справедливо неравенство

$$|\sigma_n^{\beta}| \leqslant \sup_{0\leqslant x<1}|\psi(x)| + A(\alpha, \beta)\cdot\tau.$$

Различные частные случаи этих теорем были доказаны раньше Зигмундом, Харди и Литлвудом и др.

Вторая часть работы посвящена теоремам типа Литлвуда — Палея. Здесь доказываются теоремы 7—16. Приведем, например, теоремы 7, 8, 10.

Пусть $\psi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ — аналитическая функция в круге $|z| < 1$ класса H_λ ($\lambda > 0$), $\psi(e^{i\theta})$ — угловые граничные значения функции $\psi(z)$, $\sigma_n^{\alpha}(\theta)$ — средние Чезаро порядка α ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{ni\theta},\quad \tau_n^{\alpha}(\theta) = n(\sigma_n^{\alpha}(\theta) - \sigma_{n-1}^{\alpha}(\theta)),$$

$$g_k(\theta) = \left\{\int_0^1 (1-\rho)^{k-1}|\psi'(\rho e^{i\theta})|^k d\rho\right\}^{1/k},$$

$$h_{k,\alpha}(\theta)=\left\{\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}|\tau_n^{\alpha}(\theta)|^k\right\}^{1/k},\ k\geqslant 1.$$

Норма функции $f(\theta)\in L^{\lambda}(-\pi;\pi)$ определяется равенством $\|f\|_{\lambda}=\left\{\int_{-\pi}^{\pi}|f(\theta)|^{\lambda}d\theta\right\}^{1/\lambda}$

Теорема 7. Справедливо неравенство $\|g_k\|_{\lambda}\leqslant A(k,\lambda)\|\psi\|_{\lambda}$, где $k\geqslant 2$, $\lambda>0$.

Теорема 8. Справедливо неравенство $\|\psi\|_{\lambda}\leqslant A(k,\lambda)\|g_k\|_{\lambda}$, где $1\leqslant k\leqslant 2$, $\lambda>1$, $\psi(0)=0$.

Теорема 10. Пусть $k\geqslant 2$. Справедливо неравенство $\|h_{k,\alpha}\|_{\lambda}\leqslant A(k,\alpha,\lambda)\|\psi\|_{\lambda}$ для $\lambda\geqslant k'$ и $\alpha>\frac{1}{k'}$, а также для $0<\lambda<k'$ и $\alpha>1/\lambda$. Н. А. Давыдов

9733. Теорема о больших индексах. Флетт (A high-indices theorem. Flett T. M.), Proc. London Math. Soc., 1957, 7, № 25, 142—149 (англ.)

Продолжение (реф. 9732). Доказана теорема 3: Пусть $k\geqslant 1$, $c>1$, $f(s)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n e^{-\lambda_n s}$, $\lambda_1>0$, $\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n}\geqslant c$ $(n=1,2,\ldots)$. Если $\int_0^{\infty}(e^s-1)^{k-1}|f'(s)|^k ds<\infty$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^k$ сходится. Кроме того,

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^k\leqslant A(c,k)\int_0^{\infty}(e^s-1)^{k-1}|f'(s)|^k ds,$$

где $A(c,k)$ — константа, зависящая только от c и k.

Из этой теоремы следует теорема 1: Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, в котором $a_n=0$ для $n\neq n_i$, $\frac{n_{i+1}}{n_i}\geqslant c>1$ $(i=1,2,\ldots)$ суммируется $|A|_k$-методом $(k\geqslant 1)$ (определение $|A|_k$-метода см. реф. 9732), то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^k$ сходится. Кроме того,

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^k\leqslant A(c,k)\int_0^{1}(1-x)^{k-1}|\psi'(x)|^k dx,$$

где $\psi(x)=\sum a_n x^n$, $A(c,k)$ — константа, зависящая только от c и k.

Эта теорема обобщает известную теорему Зигмунда, которая получается из теоремы 1 при $k=1$.

Н. А. Давыдов

9734. О (c)-точках последовательности, суммируемой методом Пуассона-Абеля. Давыдов Н. А., Матем. сб., 1957, 43, № 1, 67—74

Рассматриваются последовательности

$$\{S_n=a_0+a_1+\cdots+a_n\},$$

где a_n — комплексные числа, $\lim\sqrt[n]{|a_n|}=1$, $n\to\infty$. В другой работе автора (РЖМат, 1957, 4935) было введено понятие (c)-точки последовательности $\{S_n\}$ и доказано что множество всех (c)-точек последовательности $\{S_n\}$, суммируемой каким-нибудь методом Чезаро, или пусто, или содержит не более одной точки.

В настоящей заметке доказывается, что множество всех (c)-точек последовательности $\{S_n\}$, суммируемой методом Пуассона — Абеля, может быть любым наперед заданным замкнутым множеством в расширенной комплексной плоскости (доказывается более сильное утверждение).

М. П. Щеглов

9735. Об особенностях функций, определенных интегралами Лапласа. Делаж (Sur les singularités, des fonctions définies par des intégrales de Laplace. Delange Hubert), Rend. Seminar. mat. e fis. Milano, 1954—1955 (1956), 26, 88—102 (франц.; рез. англ., итал.)

Автор приводит некоторые классические теоремы об особенностях рядов Дирихле $\sum_{n=1}^{\infty}a_n e^{-\lambda_n s}$, которые тривиально обобщаются на интеграле Лапласа — Стилтьеса $f(s)=\int_0^{\infty}e^{-st}d\alpha(t)$ с конечной абсциссой сходимости σ_c. Кроме того, автор доказывает следующие утверждения (всюду дальше предполагается, что $\psi(t)$ — действительная функция, непрерывная при $t\geqslant t_0\geqslant 0$, число φ подчинено условию $0\leqslant\varphi<\pi/2$):

1. Если

$$|\arg\int_{t'}^{t''}e^{-i\psi(t)}d\alpha(t)|\leqslant\varphi \qquad (1)$$

и $\psi(t+u)-\psi(t)\to 0$ при $t\to\infty$ и любом $u>0$, то точка σ_c особая для $f(s)$.

2. В частности ($\varphi=0$, $t_0=0$), теорема 1 справедлива, если $\alpha(t)=\int_0^t e^{i\psi(s)}dv(s)$, где функция $v(t)$ действительная, не убывающая при $t\geqslant 0$, а $\psi(t)$ действительна и непрерывна при $t\geqslant 0$, причем $\psi(t+u)-\psi(t)\to 0$, если $t\to\infty$ при любом $u>0$. Этот результат содержит известную теорему Фабри для ряда Тэйлора.

3. Если выполнено условие (1) теоремы (1) и, кроме того, $|\psi(t'')-\psi(t')|\leqslant k(t''-t')$ при $t''>t'\geqslant t_0$, где k — постоянная, то $f(s)$ имеет по крайней мере одну особую точку на сегменте $[\sigma_c-ikC(\varphi),\ \sigma_c+ikC(\varphi)]$, где $C(\varphi)>0$, причем $C(\varphi)$ зависит только от φ и, в частности, $C(0)=1$.

Поэтому справедливо утверждение: Если в условиях теоремы 2 требование $\psi(t+u)-\psi(t)\to 0$ заменено неравенством $|\psi(t'')-\psi(t')|\leqslant k|t''-t'|$, то $f(s)$ имеет по крайней мере одну особую точку на сегменте $[\sigma_c-ik,\ \sigma_c+ik]$. В этом утверждении содержится теорема Пойа, в соответствии с которой ряд Дирихле имеет по крайней мере одну особую точку на всяком отрезке длины $2\pi/l$ прямой, ограничивающей полуплоскость сходимости, если $\lim_{n\to\infty}(\lambda_{n+1}-\lambda_n)=l>0$. Однако более общая теорема Пойа, утверждающая наличие хотя бы одной особой точки на отрезке длины $2\pi D$, где D — максимальная плотность последовательности $\{\lambda_n\}$, в приведенной теореме не содержится.

Автор утверждает, что им доказано следующее предложение: $f(s)$ имеет по крайней мере одну особую точку на сегменте $[\sigma_c-i\mu\theta,\ \sigma_c+i\mu\theta]$, где

$$\theta=\lim_{\lambda\to 1-0}\times\left\{\overline{\lim}_{t\to\infty}\frac{1}{1-\lambda t}\int_{\lambda t}^{t}|d\psi(u)|\right\},$$

а μ — некоторая константа, причем $\mu\leqslant 2{,}7$ (для того, чтобы получить результат Пойа, следовало бы доказать, что $\mu\leqslant 1$). Доказательства утверждения не приводится. Также без доказательства автор утверждает, что если выполнены условия теоремы 3 и $\theta^*\geqslant\overline{\lim}_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t|d\psi(u)|$, то $f(s)$ имеет по крайней мере одну особую точку, расстояние которой от σ_c не превышает величины $\theta^*\left(A\ln\frac{k}{\theta^*}+B\right)$, где A и B — постоянные (можно взять $A=4$, $B=8$).

Г. Л. Лунц

9736. О естественной границе обобщенного ряда Ламберта. Риган, Раст (On natural boundaries of

a generalized Lambert series. Regan Francis, Rust Charles), Math. Mag., 1957, **31**, № 1, 45—50 (англ.)

Авторы рассматривают ряд

$$L(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n z^n}{1-z^n}, \qquad (1)$$

а также

$$F(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n b_n z^n}{1-a_n z^n}, \qquad (2)$$

который ранее изучал Фельд (Feld, Ann. Math., 1932, **33**, 139—143), и получают условия, при которых единичная окружность (а для ряда (2) окружность $|z|=\frac{1}{|a|}$) является естественной границей для суммы ряда, а также теоремы о существовании радиального предельного значения суммы ряда.

Типичные результаты:

Теорема 2. Если последовательность чисел $\{c_n\}$ удовлетворяет условию $0<c<c_n<c<\infty$, тогда единичная окружность является естественной границей функции $L(z)$.

Теорема 6. Пусть радиус сходимости ряда $\Sigma a^n b_n z^n$ $R\geqslant\frac{1}{|a|}$ и b_n — действительные положительные числа, тогда $|z|=\frac{1}{|a|}$ является естественной границей функции (2) с $a_n=a^n$, если выполняется какое-либо из условий: а) $\lim_{n\to\infty} b_n=0$, б) $0<b\leqslant b_n\leqslant B<\infty$, в) $0<b_n\leqslant B<\infty$ и $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{b_{k\nu}}{k\nu}$ расходится для бесконечного множества целых положительных чисел k.

Доказаны теоремы об условиях существования радиальных граничных значений функции

$$\lim_{z\to z_0}\left(1-\frac{z}{z_0}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n b_n z^n}{1-a^n z^n},$$

где z_0 определяется согласно свойству $\{b_n\}$.

Г. В. Бадалян

9737. Заметка о сходимости произведения полиномиальных базисов. Нассиф (Note on convergence of the product of basic sets of polynomials. Nassif M.), Amer. J. Math., 1957, **79**, № 4, 943—948 (англ.)

Дается новое доказательство ранее опубликованной автором теоремы (Amer. J. Math, 1947, 69, 583—591), так как прежнее доказательство опиралось на теорему, несправедливость которой показал Ньюнс (РЖМат, 1953, 683).

Теорема. Пусть $\{p_n^{(1)}(z)\}$ и $\{p_n^{(2)}(z)\}$ — полиномиальные W-базисы, причем $\breve{d}_n^{(2)}=O(n)$, $\breve{d}_n^{(2)}=O(n)$ при $n\to\infty$. Пусть второй базис эффективен в $|z|\leqslant R$ и таков, что существует предел $\lim_{n\to\alpha}\sqrt[n]{M_n^{(2)}(R)}=\rho<\infty$ и для него характеристика Кэннона первого базиса $>\varkappa(1)$ $(\rho+0)<\infty$. При этих условиях произведение первого базиса на второй эффективно в $|z|\leqslant R$ тогда и только тогда, когда первый базис эффективен в $|z|\leqslant\rho$ (Термины и обозначения см. РЖМат, 1958, 2950). Отмечается, что исходя из одной теоремы Ньюнса, условие $d_n^{(2)}=O(n)$ можно отбросить; с другой стороны, на примере показывается, что условие $\breve{d}_n^{(2)}=O(n)$ отбросить нельзя. Два других примера, указанных автору Ньюнсом, показывают, что при $\varkappa^{(1)}(\rho+0)=\infty$ утверждение теоремы иногда справедливо, иногда нет.

М. Г. Хапланов

9738. О сходимости разложений по произведению простых полиномиальных базисов в произвольной области. Нассиф (On the convergence of the product series of simple sets of polynomials in a general region. Nassif M.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch. 1957, **A60**, № 5, 598—607; Indagationes math., 1957, **19**, № 5, 598—607 (англ.)

Известно, что произведение двух простых полиномиальных базисов, если второй приведенный и оба эффективны в $|z|\leqslant R$, эффективно в том же круге (термины см. РЖМат, 1958, 2850). Доказывается, что подобное утверждение перестает быть справедливым, если вместо окружности $|z|=R$ взять другую кривую. Именно, доказана теорема:

Пусть $\{p_n^{(i)}(z)\}$, $i=1,2$, — два простых полиномиальных базиса, со старшими коэффициентами, по модулю равными единице, и эффективных в замкнутой области $\overline{D(C)}$, ограниченной простой замкнутой регулярной кривой C. В ряд по произведению этих базисов можно разложить в области $\overline{D(C)}$ всякую функцию, регулярную в области $\overline{D(C_{1/A})}$, где $A=\frac{1}{\beta}+\frac{\mu}{\gamma}$.

Здесь C_r — кривая, которая преобразуется в окружность $|t|=r$ при конформном отображении внешности кривой C на внутренность $|t|<1: z=\frac{c}{t}+\Phi(t)$, $\Phi(t)$ регулярна в $|t|\leqslant 1$. Далее $\gamma=|c|$, $\mu=\max_{|t|=1}\Phi(t)|$, β есть модуль ближайшего к началу координат корня уравнения $\frac{c}{t}+\Phi(t)=\gamma e^{i\theta}$, когда θ пробегает значения от 0 до 2π; доказывается, что $\beta\leqslant 1$.

Теорему нельзя улучшить в том смысле, что можно указать кривую C, для которой указанное значение A точно хотя бы для одной пары перемножаемых базисов; именно: A точно, если за C взять окружность $|z+b|=R$, $b>0$, $R>0$ и положить $\{p_n^{(i)}(z)\}=\{(z+b)^n\}$, $i=1,2$, $n\geqslant 0$.

Рассматриваются два частных случая, когда C 1) эллипс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $a>b>0$, 2) овал Кассини $|z^2-1|=a^2$, $a>1$. Устанавливается, что функцию можно разложить в области $\overline{D(C)}$ в ряд по произведению базисов, если она регулярна внутри и на границе: в случае 1) эллипса $\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}=1$, $a'=\frac{3a-2l}{\sqrt{1+4\alpha}}$, $b'=\frac{2a-b}{\sqrt{1+4\alpha}}$, $\alpha=\frac{a-b}{a+b}$ в случае 2) овала $|z^2-1|=a^2+2$, причем доказывается, что указанные результаты улучшить нельзя.

М. Г. Хапланов

9739. Некоторые следствия из одной теоремы о функциональных рядах. Карадджич (Quelques conséquences d'un théorème des séries fonctionnelles. Karadžić Lazar), Весн. Друшт. матем. и физ. Н. Р. Србије, 1956, **8**, № 1-2, 29—38 (франц.; рез. сербо-хорв.)

Теорема. Пусть $\{\beta_n(x)\}$ — последовательность однозначных в области D функций. Если условия

$$G^{(i)}(t)_{t=1}=O(1),\ i\to\infty,\ [i=0,1,2,\ldots;\ G^{(0)}(t)=G(t)], \qquad (1)$$

$$\Delta^n\alpha_0(x)=\alpha_n(x)-\binom{n}{1}\alpha_{n-1}(x)+\cdots\pm\binom{n}{1}\alpha_1(x)\mp\mp\alpha_0(x)=o(1),\ n\to\infty, \qquad (2)$$

выполняются равномерно в области D, тогда

$$\sum_0^\infty \alpha_n(x)\,\beta_n(x) = \sum_0^\infty \Delta^n a_0(x)\,F^{(n)}(t)_{t=1},\quad x\in D,$$

где

$$G(t)=\sum_0^\infty |\beta_n(x)|\,t^n \quad\text{и}\quad F(t)=\sum_0^\infty \beta_n(x)\,t^n.$$

Если в области D равномерно выполняется условие (2) и условие

$$\frac{G^{(i)}(t)}{i!}_{t=1} = O(1),\quad i\to\infty,$$

тогда

$$\sum_0^\infty \alpha_n(x)\,\beta_n(x) = \sum_0^\infty \Delta^n a_0(x)\,\frac{F^{(n)}(t)}{n!}_{t=1},\qquad X\in D.$$

Из этой теоремы автор выводит некоторые следствия; приводим из них два.

Пусть функция

$$f(t)=\sum_0^\infty a_n z^n = a_0 + \sum_{n=1}^\infty \Delta^{n-1} b_1 \left(\frac{z}{\alpha - z}\right)^n$$

голоморфна в $|z|<1$, тогда при выполнении условия

$$\overline{\lim}_{n\to\infty}\sqrt[n]{|\Delta^{n-1}b_1|}=2$$

точка $z=-\alpha=e^{\lambda i}$ будет особой точкой функции $f(z)$.

Если $a_n = o(1)$, $n\to\infty$, $\overline{\lim}_{n\to\infty}\sqrt[n]{|\Delta^n S_0|}=o(1)$, $n\to\infty$, $S_n=\sum_0^n a_m$ и если ряд $\sum_0^\infty a_n$ суммируем по методу $\sum_0^\infty \Delta^n S_0 y^n$ или $\sum_0^\infty \Delta^n S_0 \frac{y^n}{n!}$, тогда $S_n\to S$, $n\to\infty$.

Г. В. Бадалян

9740. Приближение функций последовательностью многочленов. Караджич (Approximation des fonctions par une suite de polynômes. Karadžić Lazar), Весн. Друшт. матем. и физ. Н. Р. Сербије, 1956, 8, № 3—4, 121—124 (франц.; рез. сербо-хорв.)

Пусть

$$\lim_{n\to\infty}\Delta^n a_0 = 0,\quad \frac{1}{i!}\left(\sum_0^\infty |b_n|\,t^n\right)^{(i)}_{t=0} = O(1),\quad i\to\infty, \qquad (1)$$

тогда, как показано автором (реф. 9739),

$$\sum_0^\infty a_n b_n = \sum_0^\infty \Delta^n a_0 \frac{F^{(n)}(1)}{n!}, \qquad (2)$$

где $\Delta^n a_0 = a_n - \binom{n}{1}a_{n-1} + \ldots + (-1)^{n-1}\binom{n}{1}a_1 + (-1)^n a_0$,

$F(t)=\sum_0^\infty b_n t^n$.

Принимая

$$\Delta^k a_{n-k} = f_k\left(\frac{1}{x}\right)^k + \binom{n-k}{k-1} f_{k+1}\left(\frac{1}{x}\right)^{k+1} + \ldots + f_n\left(\frac{1}{x}\right)^n,$$

$$k=0,1,2,\ldots$$

тогда для $\{a_n\}=\left\{\Delta^n\left(\frac{1}{x}\right)\right\}$, $\{b_n\}=\left\{\frac{y^n e^{-y}}{n!}\right\}$,

при $\Delta^n a_0 = f_n\left(\frac{1}{x}\right)^n = o(1)$, $n\to\infty$, выполняются условия (1).

В результате из (2) следует, что

$$e^{-y}\sum_0^\infty \Delta^n\left(\frac{1}{x}\right)\frac{y^n}{n!} = \sum_0^\infty \frac{f_n}{x^n}\frac{y^n}{n!} = \sum_0^\infty c_n z^n = f(z),$$

$$\left(\{c_n\}=\left\{\frac{f_n}{n!}\right\},\quad z=\frac{y}{x},\quad |z|<\frac{1}{\overline{\lim}_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}}=R\right),$$

где $f_n = f^{(n)}(0)$, $n=0,1,2,\ldots$

Доказывается теорема: Пусть $f(z)=\sum_0^\infty c_n z^n$, если

$$f_n = o(n^n),\ n\to\infty,$$

$$f_1 z + \binom{n-1}{1} f_2 \frac{z^2}{n} + \ldots + f_n \frac{z^n}{n^{n-1}} = o(\sqrt{n}),\quad n\to\infty,$$

$$|z|<\frac{1}{\overline{\lim}\sqrt[n]{|c_n|}}=R,$$

где $f_n = f^{(n)}(0)$, $n=0,1,2,\ldots$; тогда

$$\lim_{n\to\infty}\Delta^n\left(\frac{z}{n}\right)=\sum_0^\infty c_n z^n = f(z)\quad (|z|<R),$$

где

$$\Delta^n\left(\frac{z}{n}\right) = f_0 + \binom{n}{1}f_1\frac{z}{n} + \ldots + \binom{n}{1}f_{n-1}\left(\frac{z}{n}\right)^{n-1} + f_n\left(\frac{z}{n}\right)^n.$$

Г. В. Бадалян

9741. Сходимость последовательностей дробно-линейных преобразований. Пиранян, Трон (Convergence properties of sequences of linear fractional transformations. Piranian G., Thron W. J.), Michigan Math. J., 1957, 4, № 2, 129—135 (англ.)

Пусть

$$T_n \equiv T_n(z) = \frac{A_n z + B_n}{C_n z + D_n}\ (n=1,2,3,\ldots) \qquad (1)$$

— какая-либо последовательность невырожденных дробно-линейных преобразований, рассматриваемых на расширенной комплексной плоскости. Изучение сходимости подобных последовательностей представляет, в частности, интерес для теории цепных дробей.

В работе изучается характер предельной функции для последовательности (1) на множестве сходимости этой последовательности (т. е. на множестве всех точек расширенной плоскости, где последовательность (1) сходится).

Устанавливается следующая теорема: На множестве сходимости последовательности (1) предельная функция: а) либо неврожденная дробно-линейная функция; б) либо функция, принимающая в точности 2 различных значения; в) либо константа.

В случае (а) последовательность (1) сходится на всей расширенной плоскости; в случае б) последовательность

(1) либо сходится только в двух точках, либо сходится на всей плоскости, причем всюду, за исключением одной точки, будет сходиться к одному и тому же значению; в случае в) множество сходимости может оказаться произвольным множеством.

Вводится понятие «множества расходимости» (м. р.): Множество E точек расширений плоскости называется множеством расходимости, если существует последовательность (1), расходящаяся всюду на E и сходящаяся в любой точке вне E.

Устанавливаются некоторые общие свойства множеств расходимости. Перечислим наиболее интересные из них: а) каждое м. р. является множеством типа $G_{\delta\sigma}$; б) каждое множество типа G_δ является м. р. (обратное не верно); в) соединение двух м. р. тоже является м. р.; г) каждое линейное счетное множество является м. р. (для нелинейных множеств этого утверждать нельзя); д) при топологических преобразованиях м. р., вообще говоря, не преобразуется в м. р.

В конце статьи авторы предлагают 4 еще не решенных проблемы. Вот одна из них: будет ли пересечение двух м. р. тоже м. р.? М. Б. Балк

9742. **Некоторые задачи теории однолистных функций. Куфарев П. П.**, Докл. 7-й Научн. конференции, посвящ. 40-летию Великой Октябрьской социалистической революции. Вып. 2. Томск, Томский ун-т, 1957, 17—18

Краткое изложение направления исследований по теории однолистных функций, выполненных за последнее время сотрудниками кафедры математического анализа Томского университета.

9743. **Некоторые классы однолистных функций. Аксентьев Л. А.**, Уч. зап. Казанск. ун-та, 1957, 117, № 2, 27—31

Даются достаточные условия однолистности отображений, реализуемых функциями, представимыми некоторыми обобщенными интегралами типа Коши. Эти условия, как отмечает автор, являются простым обобщением результатов Чакалова (РЖ Мат, 1957, 340).

Приводятся семейства функций, определяемых интегральными представлениями и отображающих внутренность (внешность) единичной окружности на внутренность (внешность) гладких кривых без самопересечений. Эти отображения, по замечанию автора, имеют приложения в теории обратных краевых задач.

Распространяется на замкнутые области достаточное условие однолистности отображения, указанное ранее Носиро (Noshiro, K., J. Fac. Sci. Hokkaido Univ., 1934, 2, 129—155). Г. В. Корицкий

9744. **О кривизне кривых при конформных отображениях. Гейер** (Despre curbura curbelor corespunzătoare într-o transformare conformă. Geier A.), Comun. ştiinţ. şi tehn., 1956, 2, 49—57 (рум.; рез. русск., франц.)

Доказывается, что между кривизной k аналитической кривой, принадлежащей некоторой односвязной области, и кривизной K ее образа при конформном отображении данной области, реализуемого регулярной в ней функцией $f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$, существует соотношение

$$K = \lambda k = \frac{(1 + y'^2)\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} y' - \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) + \varphi y''}{\varphi^2 y''} k,$$

где $\varphi^2(x, y) = \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)^2$. Устанавливается эквивалентность этого соотношения соотношению между k и K, найденному ранее Цицейкой (Tzitzéica G., C. r. Acad. sci., 1932, 195, 476 — 478).

Рассмотрено дифференциальное уравнение отображаемой кривой, которое получается при $\lambda = \text{const}$, и отмечены частные случаи, когда оно будет уравнением типа Бернулли, а также, когда конформное отображение будет поворотом, преобразованием подобия и переносом.

Примечание референта. Соотношение между k и K, полученное автором, выводится весьма просто из давно известной формулы кривизны образа кривой, реализуемого при конформном отображении (Study E., Konforme Abbildung einfach zusammenhängender Bereiche, 1913). Г. В. Корицкий

9745. **О наибольшем радиусе в соотношении подчинения. Ся Дао-син** (On the radius of superiority in subordination. Shah Tao-shing), Sci. Rec., 1957, 1, № 5, 329—333 (англ.)

Пусть функция $f(z)$ регулярна, а функция $F(z)$ регулярна и однолистна в круге $|z| < 1$. Г. М. Голузин доказал (Геометрическая теория функций комплексного переменного, Гостехиздат, 1952), что если $f(z) \not\equiv F(z)$, $\arg f'(0) = \arg F'(0)$ и $f(z) \prec F(z)$ в $|z| < 1$, то в $|z| < 0{,}1{,}2\ldots$ выполняется неравенство $|f'(z)| < |F'(z)|$, но что существуют функции, удовлетворяющие указанным условиям, для которых при z с $|z| > 3 - \sqrt{8}$ имеем $|f'(z)| > |F'(z)|$.

Автор доказывает, в основном следуя Г. М. Голузину, но уточняя его доказательство, что при вышеуказанных условиях неравенство $|f'(z)| < |F'(z)|$ выполняется в $|z| \leqslant 3 - \sqrt{8}$. Этим рассматриваемая проблема оказывается полностью решенной. Ю. Е. Аленицын

9746. **Некоторые экстремальные свойства определенных положительных последовательностей и соответствующие конформные отображения круга на выпуклые области. Шенберг** (Some extremal problems for positive definite sequences and related extremal convex conformal maps of the circle. Schoenberg I. J.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wet., 1958, **A61**, № 1, 28—37; Indagationes math., 1958, 20, № 1, 28—37 (англ.)

Пусть $\{\mu_n\}$ — определенная положительная последовательность

$$\mu_\nu = \oint e^{i\nu t} d\varphi(t) \quad (\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots), \quad \mu_0 = 1,$$

где функция распределения $\varphi(t)$ характеризует положительное распределение единичной массы на единичной окружности. Через $\widetilde{\varphi}(t)$ обозначена функция распределения в том частном случае, когда вся масса расположена на дуге $[e^{i\alpha}, e^{i(\alpha+\lambda)}]$, $0 < \lambda < 2\pi$, и, кроме того, $\widetilde{\mu}_\nu = 0$, $\nu = n_1, n_2, \ldots$, $1 < n_1 < n_2 < \ldots$ Рассмотрим также функцию $F(z) = z + \sum_{\nu=1}^{\infty} c_{n_\nu} z^{n_\nu}$, осуществляющую однолистное конформное отображение круга $|z| < 1$ на выпуклую область $\widetilde{D}$, причем пусть некоторой граничной дуге $[e^{i\beta}, e^{i(\beta+\lambda)}]$ соответствует конечный прямолинейный отрезок S на границе $\widetilde{D}$.

Теорема 1. Для всякого распределения $\varphi(t)$, удовлетворяющего условиям $\mu_\nu = 0$, $\nu = n_1, n_2, \ldots$, справедливо неравенство $|\mu_1| \leqslant |\widetilde{\mu}_1|$, причем равенство имеет место лишь для $\varphi(t) \equiv \widetilde{\varphi}(t)$.

Теорема 2. Если функция $F(z) = z + \sum_{\nu=1}^{\infty} c_{n_\nu} z^{n_\nu}$ осуществляет однолистное конформное отображение круга $|z| < 1$ на выпуклую область D, то D содержит круг $|w| < |\widetilde{\mu}|$, в частности область $\widetilde{D}$ содержит этот круг, который касается отрезка S в некоторой его внутренней точке. Таким образом, круг $|w| < |\widetilde{\mu}_1|$ является наибольшим, содержащимся во всех областях D.

Частные случаи: 1) если последовательность $\{\mu_n\}$ определенная положительная, причем $\{\mu_{2n}\}_1^\infty=0$, то $|\mu_1|\leqslant \frac{2}{\pi}$, знак равенства имеет место лишь в случае равномерного распределения массы на полуокружности; при всех однолистных конформных отображениях круга $|z|<1$ на выпуклую область посредством функций вида $F(z)=z+\sum_{k=1}^{\infty} c_{2k} z^{2k}$ покрывается круг $|w|<\frac{2}{\pi}$, радиус которого не может быть увеличен; 2) если $k>0$ — целое число и $\{\mu_n\}$ определенная положительная последовательность, причем $\{\mu_{\nu k+1}=0$, то справедливо точное неравенство $|\mu_1|\leqslant \Gamma^2\left(\frac{k+1}{k}\right):\Gamma\left(\frac{k+2}{k}\right)$; при всех однолистных конформных отображениях круга $|z|<1$ на выпуклую область посредством функций вида $F(z)=z+\sum_{\nu=0}^{\infty} c_{\nu k+1} z^{\nu k+1}$ покрывается круг $|w|<\Gamma^2\left(\frac{k+1}{k}\right):\Gamma\left(\frac{k+2}{k}\right)$, радиус которого не может быть увеличен. Я. Л. Геронимус

9747. О константах Блоха—Ландау. У л у ч а й (On the Bloch—Landau constants. U l u c a y C e n g i z. Comm. Fac. Sci. Univ. Ankara, 1955, A7, 233—252) (англ.; рез. турец.)

Пусть $(T_w)_1$, $(T_w)_2$ и $(T_w)_3$ — соответственно равносторонний треугольник, равнобедренный прямоугольный треугольник и треугольник с углами 30°, 60° и 90°. Пусть $\mathfrak{L}$ — класс аналитических функций f с $|f'(0)|=1$, которые конформно отображают вписанные в единичный круг треугольники, стороны которых — дуги окружности и все углы которых равны (модулярные треугольники), на один из трех треугольников $(T_w)_n$ $(n=1,2,3)$. Автор доказывает, что единственная функция класса $\mathfrak{L}$, дающая решение экстремальной задачи Ландау (т. е. задачи о нахождении радиуса наибольшего круга, покрытого образами точек z для любой $f\in\mathfrak{L}$), отображает модулярный равносторонний треугольник на $(T_w)_1$.

Класс $\mathfrak{B}$ состоит из конформных отображений с $|f'(0)|=1$, треугольников, расположенных внутри единичного круга, стороны которых — окружности, пересекающие под углом $\pi/2$ единичную окружность, и с внутренними углами π/p, π/q, π/r (где $(1/p)+1/q)+(1/r)<1$ и p, q, r — натуральные числа) на $(T_w)_n$ $(n=1,2,3)$. Единственная функция класса $\mathfrak{B}$, дающая решение в классе $\mathfrak{B}$ экстремальной задачи Блоха (т. е. задачи о нахождении радиуса наибольшего круга, покрытого однолистно образами z для всех $f\in\mathfrak{B}$), — это отображение равноугольного треугольника, сторонами которого являются дуги окружности с внутренними углами $\pi/6$ на $(T_w)_1$. Последнее утверждение доказывается посредством обобщения леммы Шварца.

G. Springer

Перевод из Math. Revs, 1956, **17**, № 5, 472

9748. Распределение импульсных давлений при ударе жидкости о стенки открытого прямоугольного сосуда. И в а н о в а Л. С., Тр. Моск. техн. ин-та рыбн. пром-сти и х-ва, 1957, вып. 8, 229—234

Рассматривается задача: открытый сверху сосуд, имеющий форму прямоугольного параллелепипеда, наполненный невязкой, несжимаемой жидкостью, внезапно приобретает горизонтальную скорость v_0; вычисляются импульсивные давления p, подействовавшие на боковые стенки сосуда при ударе жидкости.

Применяя метод М. А. Лаврентьева (Конформные отображения, Гостехиздат. 1946), автор получила общее решение поставленной задачи в следующем виде:

$$p(t)=-\frac{\rho v_0 l_1}{2\pi K}\int_{1/k}^{l_2}\ln\frac{k'-k\sqrt{t^2-1}}{k'+k\sqrt{t^2-1}}\,dy, \qquad (1)$$

где $dy=\frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(1-k^2t^2)}}$, ρ — плотность жидкости, l_1 — длина сосуда l_2 — высота жидкости в сосуде (в состоянии покоя) и модуль эллиптических интегралов k определяется из уравнения

$$I_1/l_2=2K/K'.$$

Определяя численными методами значение интеграла в правой части равенства (1), автор построила графики изменения давления для значений параметра $l_1/l_2=0{,}82;\ 1;\ 2;\ \infty$.

В результате исследования предельных случаев $l_1/l_2=\infty$ и $l_1/l_2=0$ показано, что центр давления импульсных сил, в зависимости от отношения длины сосуда к высоте налитой в сосуд жидкости, может изменяться от 0,37 до 0,50. П. Ф. Фильчаков

9749. К характеристике положительных рациональных функций. К е н и г (Zur Charakterisierung der positiven rationalen Funktionen. K ö n i g H e i n z), Arch. Math., 1958, 8, № 6, 409—412 (нем.)

Автор рассматривает рациональную функцию

$$Z(s)=\frac{a_0+a_1 s+\cdots+a_m s^m}{b_0+b_1 s+\cdots+b_n s^n},\qquad a_m b_n\neq 0,$$

с вещественными коэффициентами, регулярную в области $\operatorname{Re} s>0$; он называет ее положительной в этой области, если в ней $\operatorname{Re} Z(s)>0$ и если функция принимает вещественные значения при вещественных $s>0$. Он называет множество E пространства n измерений R^n алгебраически характеризуемым, если существует конечное множество многочленов с вещественными коэффициентами от n переменных $A_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,A_r(x_1\ldots,x_n),B_1(x_1,\ldots x_n),\ldots,B_s(x_1,\ldots,x_n)$, таких, что если точка $C(c_1,.,.,c_n)\in R^n$ принадлежит E, то выполняются неравенства

$$A_1(c_1,\ldots,c_n),\ldots,\ A_r(c_1,\ldots,c_n)>0,$$

$$B_1(c_1,\ldots,\ c_n),\ \ldots,\quad B_s(c_1,.,.,\ c_n)\geqslant 0.$$

Множество $E(m,n)\subset R^{m+n+2}$, состоящее из точек с координатами $(a_0,\ldots,\ a_m;\ b_0,\ldots,\ b_n)$, является пустым при $|m-n|>1$ и алгебраически характеризуемым при $|m-n|\leqslant 1$, $\operatorname{Min}(m,n)\leqslant 1$; автор доказывает, что оно не будет алгебраически характеризуемым, если $|m-n|\leqslant 1$, $\operatorname{Min}(m,n)>1$. Я. Л. Геронимус

9750. Неравенства для производных, аналогичные неравенству С. Н. Бернштейна. А х и е з е р Н. И., Л е в и н Б. Я., Докл. АН СССР, 1957, **117**, № 5, 735—738

Пусть E — некоторое совершенное точечное множество на вещественной оси комплексной плоскости z, имеющее положительную гармоническую меру, G — плоскость z, из которой удалено E, и A, B, C — области, которые получаются соответственно из полуплоскости $\operatorname{Im}\zeta>0$, квадрата $\lim\zeta>0$, $\operatorname{Re}\zeta>0$ (или $\operatorname{Re}\zeta<0$), и полуполосы $\operatorname{Im}\zeta>0$, $\alpha<\operatorname{Re}\zeta<\beta$ $(-\infty<\alpha<\beta<\infty)$ с помощью конечного или бесконечного числа прямолинейных разрезов, начинающихся на вещественной

оси, перпендикулярных ей и могущих иметь предельные отрезки лишь на границе квадрата или полуполосы.

Рассматриваются всевозможные (в том числе и многозначные) аналитические на G функции $f(z)$, имеющие предельные значения во всех точках $x \in E$ и удовлетворяющие условиям:

$$1)\ \sup_{x\in E}|f(x)|\leqslant 1, \qquad 2)\ \overline{\lim_{|z|\to\infty}}\frac{\ln f^*(|z|)}{|z|}<\infty,$$

где $f^*(z)$ есть верхняя грань $|f(z)|$ по всем значениям $|f(z)|$ в точке z.

Устанавливается существование конформного отображения полуплоскости $\operatorname{Im} z>0$ на одну из областей A, B или C, переводящего множество E в ту часть границы, которая принадлежит вещественной оси. Пусть $\varphi(z)$ — функция, полученная из отображающей после всевозможных аналитических продолжений, а $\omega(z)=e^{i\varphi(z)}$.

Среди указанных аналитических на G функций $f(z)$ авторы выделяют классы K_σ тех функций, которые могут быть представлены в виде линейной комбинации $f(z)=c_1f_1(z)+c_2f_2(z)$ (c_1, c_2 — комплексные числа), где $f_1(z)$ и $f_2(z)$ аналитичны на G, в точках множества E вещественны, удовлетворяют условию 2 и обладают тем свойством, что при данном $\sigma>0$ для любого $\varepsilon>0$ можно указать некоторые $\delta>0$, при котором отношения $f_1^*(z):[\omega(z)]^{\sigma+\varepsilon}$ и $f_2^*(z):[\omega(z)]^{\sigma+\varepsilon}$ стремятся к нулю, если $|z|\to\infty$, $\left|\arg z\pm\frac{\pi}{2}\right|\leqslant\delta$. Любая такая функция $f_1(z)$ при условии, что для ее предельных значений на границе $\sup_{x\in\partial e}|f_1(x)|\leqslant 1$, всюду в G удовлетворяет неравенству $|f_1(z)|\leqslant|\omega(z)|^\sigma$, причем знак равенства хотя бы в одной точке, хотя бы для одного значения $f_1(z)$ возможен лишь тогда, когда $f_1(z)\equiv e^{i\gamma}[\omega(z)]^\sigma$, где γ — действительное число.

Если $f(z)\in K_\sigma$ (где $\sigma>0$, в том случае, когда верхняя полуплоскость отображается в A или B, и $\sigma\geqslant\frac{\pi}{\beta-\alpha}$, в том случае, когда верхняя полуплоскость отображается в C), то в каждой точке $x\in E$, в которой существуют производные $f'(x)$ и $\omega'(x)$, справедливо неравенство $|f'(x)|\leqslant\sigma|\omega'(x)|$.

Функция

$$f_0(z)=c_1[\omega(z)]^\sigma+c_2[\omega(z)]^{-\sigma}\quad(|c_1|+|c_2|=1),$$

являющаяся здесь экстремальной, в случае, когда множество E состоит лишь из отрезков, только одна обладает этим свойством.

В качестве следствий из этого предложения авторы получают ряд интересных неравенств для целых функций. Отметим некоторые из них. Если целая функция $f(x)$ степени $\sigma>0$ принимает действительные значения на вещественной оси и удовлетворяет неравенству $|f(x)|\leqslant 1$ для $|x|\geqslant 1$ (соответственно для $x\geqslant 0$), то там же

$$f'(x)\leqslant\sigma\left|\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right|\left(\text{соответственно } |f'(x)|\leqslant\sigma\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$$

Если $\sigma\geqslant 1$ и $|f(x)|\leqslant 1$ при $|x\leqslant 1$, то для этих значений справедливо неравенство

$$f'(x)\leqslant\frac{\sigma}{\sqrt{1-x^2}}.$$

А. Ф. Тиман

9751. К определению аналитических функций класса E_p в многосвязных областях. Тумаркин Г. Ц., Хавинсон С. Я., Успехи матем. наук, 1958, **13**, № 1, 201—206

G — n-связная область, у которой ни одна из компонент границы не вырождается в точку. Регулярная внутри G функция $f(z)\in E_p(G)$ по определению, если существует последовательность контуров Γ^i, лежащих внутри G и ограничивающих области $G^i\to G$, такая, что

$$\overline{\lim_{i\to\infty}}\int_i|f(z)|^p|dz|<+\infty. \qquad (1)$$

Пусть $z=\varphi(w)$ конформно преобразует какую-либо n-связную область K с аналитическими границами на G. Доказывается, что необходимое и достаточное условие принадлежности $f(z)$ к $E_p(G)$ состоит в том, что $|f[\varphi(w)]|^p|\varphi'(w)|$ имеет в K гармоническую мажоранту и что для всех $f(z)\in E_p(G)$ существует универсальная последовательность контуров Γ^i указанного типа такая, что имеет место (1). Если граница G — спрямляема, то можно еще добавить требование, что длины Γ^i ограничены постоянной, не зависящей от i

В. И. Смирнов

9752. Направления наибольшего роста целой функции конечного порядка и нормального типа. Вилькоксон (The directions of strongest growth of an integral function of finite order and mean type. Wilson R.), J. London Math. Soc., 1957, **32**, № 4, 409—420 (англ.)

Пусть $F(z)$ — целая функция конечного порядка ρ, нормального типа σ и $h(\theta)$ — ее индикатриса роста. В. Бернштейном (Bernstein W., Ann. Scuola norm. super. Pisa, 1935, **2**, 381—399) доказано, что для фиксированного θ и произвольного малого $\varepsilon>0$ будет выполняться неравенство

$$\frac{1}{r^\rho}\ln|F(re^{i\theta})|>h(\theta)-\varepsilon, \qquad (1)$$

по крайней мере, для множества значений r положительной верхней плотности. В реферируемой работе это предложение уточняется для направлений наибольшего роста функций $F(z)$, т. е. для тех значений θ, при которых $h(\theta)=\sigma$. Уточнение касается плотности множества значений r, при которых выполняется неравенство (1).

И. Ф. Лохин

9753. Адамаровское умножение целых функций конечного порядка и нормального типа. Вилькоксон (Hadamard multiplication of integral functions of finite order and mean type. Wilson R.), J. London Math. Soc., 1957, **32**, № 4, 421—429 (англ.)

Пусть

$$F_1(z)=\sum_0^\infty a_nz^n, \qquad F_2(z)=\sum_0^\infty b_nz^n$$

— целые функции конечного порядка, нормального типа и целая функция $F(z)$ определяется рядом $F(z)=\sum_0^\infty a_nb_nz^n$. Направление $\arg z=\theta$ называется направлением наибольшего роста целой функции конечного порядка и нормального типа, если значение ее индикатрисы роста при $\arg z=\theta$ равно типу этой функции. Пусть далее $\arg z=\theta_1$, $\arg z=\theta_2$ являются соответственно направлениями наибольшего роста функции $F_1(z)$ и $F_2(z)$.

В реферируемой статье указываются условия, при которых можно утверждать, что $\arg z=\theta_1+\theta_2$ будет направлением наибольшего роста функции $F(z)$.

И. Ф. Лохин

9754. О преподавании некоторых вопросов теории эллиптических функций (Методическая заметка).

Смогоржевский (Про викладання деяких питань теорії еліптичних функцій (Методична замітка). Смогоржевський О. С.), Наук. зап. Луцьк. держ. пед. ін-ту, 1955, 3, № 2, 29—34 (укр.)

9755. **Об абелевых интегралах с бесконечным числом особенностей на открытых римановых поверхностях. Мюрберг** (Über Abelsche Integrale mit unendlich vielen Singularitäten auf offenen Riemannschen Flächen. Myrberg Lauri, Suomalais. tiedeakat. toimituks, 1955, Sar. AI, № 209, 21 s.) (нем.)

Пусть F — произвольная открытая риманова поверхность и F_s — та ее часть, точки которой, в соответствующей метрике, отстоят от фиксированной точки $P_0 \in F$ на расстоянии меньшем s, причем $\lim F_s = F$ при $s \to \infty$. Каждая точка $P \in F$ порождает свою систему исчерпания (F_s) для F. Производная $\varphi(z)$ абелева интеграла на F определяется как ковариантный аналитический вектор (ср. стр. 374—380 книги Неванлинна Р., Униформизация, РЖМат, 1956, 7313 К). Вводя величину

$$E_s(\varphi) = \iint_{F_s} \ln\left[1 + \frac{|\varphi(z)|^2}{K_s(z,z)}\right] K_s(z,z)\, d\sigma,$$

где $\varphi(z)$ — ковариантный аналитический вектор F, $K_s(z,z)$ — ядерная функция Бергмана для F_s, а $d\sigma$ — элемент площади, автор исследует класс E всех ковариантных аналитических векторов на F, для которых $\frac{1}{s}\int_0^s \ln[1 + E_s(\varphi)]\, ds < \infty$ относительно каждой системы исчерпания (F_s) при $s \to \infty$. Доказывается, в частности, что класс векторов с конечным числом особенностей, рассмотренный Неванлинна и Виртаненом (Nevanlinna R., Suomalais. tiedeakat. toimituks, 1940, sar. AI, № 1; Virtanen K., там же, 1949, sar. AI, № 56), содержится в E. Вместе с тем, как показано в реферируемой работе, E содержит, например, коварианту

$$\varphi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{(z-n)^2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} |A_n| < \infty$$

и, следовательно, дает расширение указанного выше класса. Д. Б. Потягайло

9756. **Интегральное представление функций двух комплексных переменных. Темляков А. А.**, Уч. зап. Моск. обл. пед. ин-та, 1957, 57, 3—9

Настоящая работа является продолжением ряда работ того же автора (РЖМат, 1956, 3784; 1957, 7006). Рассматриваются функции, заданные в (p, q) — двоякокруговой области $D\,(pq > 0,\ (0,0) \in D)$, являющейся подобластью некоторой области регулярности, ограниченной неаналитическими гиперповерхностями

$$|w| = r_1(\tau), \quad |z| = r_2(\tau), \quad 0 < \tau < 1,$$

где

$$\lim_{\tau \to 0} r_1(\tau) = 0, \quad 0 < r_1'(\tau) < p\frac{r_2(\tau)}{\tau},$$

$$r_2(1) < \infty, \quad r_2(\tau) = \exp\left(-\frac{q}{P}\int_0^{\tau} \frac{\tau}{1-\tau}\, d\ln r_2(\tau)\right).$$

Пусть $F(w,z)$ — аналитическая функция в D и $F(w,z)$, $F'_w(w,z)$, $F'_z(w,z)$ непрерывны в $\overline{D}$. Функции, удовлетворяющие этим условиям, называются функциями класса α.

Доказана следующая теорема: Если $F(w,z) \in \alpha$, то для точки $(w,z) \in D$

$$F(w,z) = \frac{1}{4\pi^2 i}\int_0^{2\pi} dt \int_0^1 d\tau \int_C \frac{\Phi[r_1(\tau)\xi^P,\ r_2(\tau)\eta^P]}{\xi - u}\, d\xi,$$

где C — окружность $|\xi| = 1$, $\eta = \xi e^{-it}$,

$$u = \tau\left(\frac{w}{r(\tau)}\right)^{\frac{1}{p}} + (1-\tau)\left(\frac{z}{r_2(\tau)}\right)^{1/q} e^{it}.$$

Таким образом, если $F(w,z) \in \alpha$, то ее значения в D определяются значениями дифференциального оператора

$$L[F] = F(w,z) + pwF'_w(w,z) + qzF'_z(w,z) = \Phi(w,z)$$

на границе области. М. В. Федорюк

9757. **О некоторых вопросах теории функций нескольких комплексных переменных, связанных с регулярным распространением одной области на другую. Аравийская Е. Н.**, Докл. 7-й Научн. конференции, посвящ. 40-летию Великой Октябрьск. соц. революции. Вып. 2, Томск, Томский ун-т, 1957, 10—11

Кратко характеризуются полученные автором результаты о возможности регулярного распространения некоторой окрестности куска аналитической поверхности $w = y\,(z)$, принадлежащего области регулярности на эту область, и указывается, что эти результаты применяются к вопросам интегрального представления функции с заданными множествами особых точек функции. Л. А. Маркушевич

9758. **О ядерных функциях. Одзаки, Касиваги, Цубой** (On kernel functions. Ozaki Shigeo, Kashiwagi Sadao, Tsuboi Teruo), Sci. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku, Sect. A., 1955, 5, 14—19 (англ.)

Даются аксиомы для кольца R с инволюцией и R-значным внутренним произведением. Они являются некоторым изменением ранее опубликованных аксиом (РЖМат, 1957, 8751). Получены некоторые простые следствия и указаны примеры из теории функций двух комплексных переменных. E. Hewitt

Перевод из Math. Revs, 1956, 17, № 2, 177.

9759. **О целых функциях двух переменных. Еремин С. А.** Укр. матем. ж., 1957, 9, № 1, 30—43 (рез. франц.)

Приводятся известные выражения порядка роста и типа целой функции двух комплексных переменных через коэффициенты соответствующего степенного ряда. Показано, что доказательства ряда теорем для целых функций одной переменной применимы без изменения к доказательствам подобных теорем для целых функций двух переменных (Ибрагимов И. И., Изв. АН СССР. Сер. матем., 1939, № 5—6; Ибрагимов И. И., Келдыш М. В., Матем. сб., 1947, 20, № 2 и т. д.).

Приведем, например, следующее утверждение автора: Если $n(r)$ и $\widetilde{n}(r)$ — функции плотности последовательностей $\{w_k\}$ и $\{z_k\}$, $|w_k| = \rho_k$, $\rho_k \leqslant \rho_{k+1}$, $|z| = \widetilde{\rho}_k$, $\widetilde{\rho}_k < \rho_{k+1}$, $f(w,z)$ — целая функция, $M(r,\widetilde{r}) = \max_{|z|=r,\,|w|=\widetilde{r}} |f(w,z)|$ и неравенства

$$\ln M(r,\widetilde{r}) < \lambda[n(\theta r) + \widetilde{n}(\theta\widetilde{r})], \quad 2\lambda < \ln\frac{1-\theta}{\theta}$$

выполняются при некотором фиксированном θ, $0 < \theta < 1/2$, для неограниченно растущих значений $r_k = \theta^{-1}\rho_{n_k}$, $\rho_{n_k} < \rho_{n_k+1}$, $\widetilde{r}_k = \theta^{-1}\widetilde{\rho}_{n_k}$, $\widetilde{\rho}_{n_k} < \widetilde{\rho}_{n_k+1}$, то последовательность частичных сумм $\{P_{n_k,\ n_k}(w,z)\}$

ряда типа Ньютона равномерно сходится к $f(w, z)$ в любом бицилиндре с центром в начале и конечного радиуса. Если же указанные неравенства выполняются для любых $r > r_0$, $\tilde{r} > \tilde{r}_0$, то так же сходится к $f(w, z)$ последовательность $P_{n,n}(w, z)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$.

Примечание референта. Очевидно, что любое утверждение для целой функции одной переменной может быть без труда перенесено на целые функции многих переменных по каждому из переменных. Было бы интереснее заняться обобщением подобных утверждений для целых функций многих переменных по совокупности переменных. И. И. Ибрагимов

9760. Алгебры голоморфных функций. Эдуардс (Algebras of holomorphic functions. Edwards R. E.), Proc. London Math. Soc., 1957, 7, № 28, 510—517 (англ.)

Пусть X — комплексное аналитическое многообразие, $H(X)$ — алгебра всех голоморфных функций X, $M(x)$ — идеал алгебры $H(x)$, состоящий из всех функций f, для которых $f(x) = 0$ $(x \in X)$. Автор говорит, что X — многообразие типа A, если: 1) каждый идеал $M(x)$ имеет конечное число образующих; 2) для любой системы функций $f_1, f_2, \ldots, f_k$ из $H(X)$, одновременно не обращающихся в нуль ни в одной точке X, найдутся голоморфные на X функции $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$ такие, что $\varphi_1 f_1 + \varphi_2 f_2 + \ldots + \varphi_n f_n = 1$; 3) $H(X)$ разделяет точки многообразия и в окрестности каждой точки X существует локальная система координат, состоящая из функций алгебры $H(X)$. Многообразиями типа A являются, в частности, многообразия Штейна. Доказывается, что если X и Y — многообразия типа A и существует изоморфизм Φ: $H(X) \to H(Y)$, то существует аналитический изоморфизм φ: $X \to Y$, индуцирующий на функциях изоморфизм Φ. Введем теперь в $H(X)$ компактно-открытую топологию и допустим, что существует взаимно непрерывный изоморфизм Φ: $H(X) \to H(Y)$. При этих предположениях теорема остается верной, если многообразие X является объединением относительно компактных открытых подмногообразий X_α типа A таких, что $H(X)$ плотна в $H(X_\alpha)$.

А. Л. Онищик

9761. Голоморфные и мероморфные отображения комплексных пространств. Реммерт (Holomorphe und meromorphe Abbildungen komplexer Räume. Remmert Reinhold), Math. Ann., 1957, **133**, № 4, 328—370 (нем.)

Рассматриваются комплексные пространства А. Картана (для них атласы покрытий состоят из карт, гомеоморфных локально-неприводимым локально-аналитическим множествам некоторого пространства C^N). Непрерывное отображение $y = \tau(x) : X \to Y$, где X и Y — комплексные пространства, называется голоморфным, если при нем каждой функции $g(y)$, голоморфной в некоторой области $B \subset Y$, соответствует функция $g(\tau(x))$, голоморфная в области $\tau^{-1}(B) \subset X$. Цель работы — систематическое изучение общих свойств подобных отображений.

Слоем отображений $\tau : X \to Y$ называется аналитическое множество $\tau^{-1}(\tau(x)) \subset X$ (где точка $x \in X$). Коизмерением (комплексным) $r_\tau(x)$ слоя $\tau^{-1}(\tau(x))$ в точке x называется (локальный) ранг отображения τ в этой точке. Функция $r_\tau(x)$ в общем случае непостоянна и оказывается полунепрерывной снизу.

Доказывается теорема: Если $\tau : X \to Y$ — некоторое голоморфное отображение, то множество $X_\tau(m)$ всех точек $x \in X$, для которых ранг $r_\tau(m) \leqslant m$, является аналитическим.

Для каждой связной компоненты X_i (где $i \in I$, I — некоторое множество индексов $\bigcup_{i \in I} X_i = X$) всегда существует $\sup_{x \in X_i} r_\tau(x) = r_\tau(X_i) \leqslant d(X_i)$, где $d(X_i)$ — комплексная размерность X_i; $r_\tau(X_i)$ называется рангом τ на X_i. Величина $r_\tau = r_\tau(X) = \sup_{i \in I} r_\tau(X_i)$, если она конечна, называется рангом τ на X. Точки x связного комплексного пространства X, для которых $r_\tau(x) < r_\tau$, составляют множество точек вырождения отображения τ. Из приведенной теоремы следует, что подобное множество всегда является аналитическим и не имеет изолированных точек. Отображение, для которого множество точек вырождения пусто, называется нигде не вырожденным. Заметим, что указанные определения несколько отличаются от общепринятых: обычно нигде не вырожденным называется отображение, все слои которого дискретны. Доказываются теоремы:

1. Если $\tau : X \to Y$ — нигде не вырожденное голоморфное отображение ранга r, то для каждой точки $x \in X$ существует такой базис окрестностей $\{U_\nu\}$, что все $\tau(U_\nu)$ являются локально-аналитическими множествами пространства Y точной комплексной размерности r.

Если множество точек вырождения τ не пусто, то это отображение может не обладать указанным свойством.

2. Если $\tau : X \to Y$ — голоморфное отображение ранга r связного комплексного пространства X в r-мерное пространство Y, то отображение τ тогда и только тогда является открытым, когда оно нигде не вырождено.

3. Пусть $\tau : X \to Y$ — голоморфное отображение ранга r. Пусть для каждой точки $y \in \tau(X)$ существуют такая ее окрестность $V(y)$ и компактное в X множество $X_y \subset X$, что каждая компонента слоя $\tau^{-1}(\tau(x))$, где $\tau(x) \in V(y)$, имеющая точную размерность, пересекается с X_y. Тогда $\tau(X)$ является r-мерным локально-аналитическим множеством в Y. Если пространство X связно, то $\tau(X)$ имеет точную размерность r и неприводимо.

4. Если $\tau : X \to Y$ локально собственное (т. е. для всякого $y \in \tau(x)$ существует окрестность $V(y)$, для которой $\tau^{-1}(V(y))$ компактно в X) голоморфное отображение, то образ $\tau(M)$ любого аналитического в X множества M является локально-аналитическим в Y. Если

$$r_\tau(M) = \sup_{x \in M} \{d_x(M) - d_x[(\tau^{-1}(\tau(x)) \cap M]\}$$

— ранг τ на M ($d_x(M)$ — комплексная размерность множества M в точке x), то $\tau(M)$ имеет размерность $r_\tau(M)$. Если M неприводимо, то $\tau(M)$ имеет точную размерность $r_\tau(M)$ и также неприводимо. Если $\tau : X \to Y$ — собственное голоморфное отображение, то $\tau(M)$ — аналитическое множество в Y.

Отсюда следует: Если $\tau : X \to Y$ — голоморфное отображение и X компактно, то $\tau(x)$ — аналитическое множество в Y. Если Y — кратнопроективное комплексное пространство, то $\tau(X)$ — алгебраическое множество в Y.

Топологическое подпространство L комплексного пространства X называется его комплексным подпространством, если комплексная структура пространства L (определяемая его атласом покрытий) такова, что вложение $L \to X$ является голоморфным отображением.

Доказывается теорема: Совокупность комплексных подпространств комплексного пространства X совпадает с совокупностью его локально-неприводимых локально-аналитических множеств с индуцированной комплексной структурой.

Пусть E — множество точек вырождения голоморфного отображения $\tau: X \to Y$ ранга r; комплексное пространство Y также предполагается r-мерным. В этом случае, если множество $\tau(E)$ состоит из внутренних точек $\tau(X)$, отображение τ называется полным.

Доказывается теорема: Голоморфное отображение $\tau: X \to Y$ ранга r связного комплексного пространства X в r-мерное комплексное пространство Y полно, если каждый слой $\tau^{-1}(\tau(x))$ (где $x \in E$) имеет связную компактную компоненту.

Далее доказываются теоремы о голоморфности обратного отображения, о голоморфности сложных отображений.

Отображение $\tau: X \to Y$ связного комплексного пространства X на комплексное пространство Y называется мероморфным, если оно удовлетворяет следующим условиям: 0) Образ $\tau(x)$ каждой точки $x \in X$ является не пустым компактным множеством в Y. 1) График G_τ отображения (т. е. совокупность всех точек $(x, y) \in X \times Y$, для которых $y \in \tau(x)$) является связным комплексным подпространством пространства $X \times Y$, имеющим ту же размерность, что и X. 2) Пространство X содержит плотное множество X, на котором отображение τ однозначно.

Доказывается теорема: Если $\tau: X \to Y$ — мероморфное отображение, то существует такое аналитическое множество N, имеющее коизмерение $\geqslant 2$, что τ на $X - N$ однозначно и, следовательно, голоморфно. Наименьшее множество N, обладающее этими свойствами, называется множеством особенностей мероморфного отображения. В работе устанавливаются некоторые свойства подобных множеств.

Заметим, что предлагаемое автором определение мероморфного отображения отлично от другого, ранее предложенного Штоллем (РЖМат, 1956, 6546).

Б. А. Фукс

9762. Об аналитических функциях двух комплексных переменных, являющихся парааналитическими. Ф р е ш е (Sur les fonctions analytiques de deux variables complexes qui sont paraanalytiques. F r é c h e t M a u r i c e), Изв. Матем. ин-т. Бълг. АН, 19, 7 2, № 2, 3—14 (франц.; рез. болг., русск.)

Пусть $f(\xi, \eta)$ — аналитическая функция комплексных переменных: $\xi = x_1 + ix_2$, $\eta = x_3 + ix_4$ в точке $\xi^0 = x_1^0 + ix_2^0$, $\eta^0 = x_3^0 + ix_4^0$. Пусть $f(\xi, \eta) = P_1 + iP_2$ (P_1, P_2 — действительные); $F(v) = P_1 f_1 + P_2 f_2$; $v = x_1 e_1 + \ldots + x_4 e_4$, где f_1, f_2 ($e_1, \ldots, e_4$) — единичные векторы пространства E_2 (E_4) с законом умножения R: $f_j \cdot e_k = \sum_{h=1}^{2} u_{jkh} \cdot f_h$; $u_{jkh} = \text{const}$, $j, h = 1, 2$; $k = 1, \ldots, 4$. Доказывается, что $F(v)$ будет парааналитической для $v = v^0 = x_1^0 e_1 + \cdots + x_4^0 e_4$ относительно какого-нибудь закона умножения R (РЖМат, 1955, 5002) в том и только в том случае, если $f(\xi, \eta)$ — аналитическая функция комплексного переменного $z = w\xi + t\eta$, где w и t — постоянные, в точке $z^0 = w\xi^0 + t\eta^0$, причем если даются любая аналитическая функция $\varphi(x + iy)$ (x, y — действительные) в точке $x^0 + iy^0$ и любая линейная форма $w\xi + t\eta$, то найдется хоть один закон умножения R, относительно которого векторная функция $F(v)$, соответствующая функции $f(\xi, \eta) \equiv \varphi(w\xi + t\eta)$, будет парааналитической для $v = v^0$, где $w\xi^0 + t\eta^0 = x^0 + iy^0$. Исследуются коротко виды таких законов умножения R.

В. С. Федоров

9763. О немоногенных функциях гиперкомплексной переменной $\omega = x + \theta y + \theta^2 z$. Г е о р г и у (Asupra funcţiilor nemonogene de variabilă ipercomplexă $\omega = x + \theta y + \theta^2 z$. G h e o r g h i u O c t. E m.), Comun. ştiinţ. şi tehn., 1956, 2, 35—45 (рум.; рез. русск., франц.)

Пусть $\omega = x + \theta y + \theta^2 z$, $(\theta^3 = 1)$, $F(\omega) = u + \theta v + \theta^2 w$, где u, v, w — действительные функции действительных переменных x, y и z, достаточно гладкие в данной области изменения этих переменных (в дальнейшем берутся точки только этой области). Здесь $1, \theta, \theta^2$ — базис ассоциативной и коммутативной алгебры над полем действительных чисел. Изучаются свойства первой и второй производных функций $F(\omega)$ по различным направлениям, а также свойства ареолярных и объемной производных этой функции. При этом в данной точке $M(x, y, z)$ и для данной плоскости π, проведенной через эту точку, ареолярная производная функции $F(\omega)$ определяется как

$$\lim_{(S)\to M} \frac{\int_{(C)} F(\omega)\, d\omega}{\iint_{(S)} d\sigma} \equiv \frac{DF}{D\Omega_\pi},$$

где (C) — замкнутая простая гладкая кривая на плоскости π, содержащая точку M в своей внутренности (S) на этой плоскости, и где положено: $d\omega = dx + \theta dy + \theta^2 dz$,

$$d\sigma^3 = (dy\delta z - dz\delta y)^3 + (dz\delta x - dx\delta z)^3 + (dx\delta y - dy\delta x)^3 - 3\,(dy\delta z - dz\delta y)\,(dz\delta x - dx\delta z)\,(dx\delta y - dy\delta x),$$

а проекции элемента $d\sigma$ на плоскости XOY, YOZ и ZOX определяются соответственно формулами

$$dxdy = P_1 d\sigma; \quad dydz = P_2 d\sigma; \quad dzdx = P_3 d\sigma,$$

где P_k $(k = 1, 2, 3)$ — так называемые косинусы Аппеля, удовлетворяющие уравнению: $P_1^3 + P_2^3 + P_3^3 - 3P_1P_2P_3 = 1$. Доказывается, что

$$\frac{DF}{D\Omega_\pi} = \left(\theta \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y}\right) P_1 + \left(\theta^2 \cdot \frac{\partial F}{\partial y} - \theta \frac{\partial F}{\partial z}\right) P_2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z} - \theta^2 \frac{\partial F}{\partial x}\right) P_3.$$

Объемная производная функции $F(\omega)$ в данной точке $M(x, y, z)$ определяется формулой

$$F'_V(\omega) \equiv \lim_{(V)\to M} \frac{\iint_{(\Sigma)} F(\omega)\,(dydz + \theta\, dzdx + \theta^2 dxdy)}{\iiint_{(V)} dV} = \frac{\partial F}{\partial x} + \theta \frac{\partial F}{\partial y} + \theta^2 \frac{\partial F}{\partial z},$$

где (V) — тело, ограниченное поверхностью (Σ) и содержащее точку $M(x, y, z)$. Библ. 5 назв.

Примечание референта. Утверждение автора, что для всякой моногенной функции $F(\omega)$ ее объемная производная равна нулю, неверно: для всякой моногенной функции $F(\omega)$ можем утверждать только, что $(\theta - 1) F'_V(\omega) = 0$. Встречаются неточности формулировок, исправленные в реферате. В. С. Федоров

9764. О решениях линейных дифференциальных систем с помощью моногенных гиперкомплексных функций. М о р е в И. А., Укр. матем. ж., 1958, 10, № 1, 59—69 (рез. англ.)

Доказывается, что множество всех комплексных решений $(w_0, \ldots, w_{r-1})$ данной системы вида:

$$\frac{\partial w_0}{\partial x} + i \frac{\partial w_0}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial w_1}{\partial x} + i \frac{\partial w_1}{\partial y} = -\lambda_1 \frac{\partial w_0}{\partial x} - \mu_1 \frac{\partial w_0}{\partial y}, \qquad (4)$$

$$\frac{\partial w_{r-1}}{\partial x} + i \frac{\partial w_{r-1}}{\partial y} \sum_{k=1}^{r-1} \left(\lambda_k \frac{\partial w_{r-k-1}}{\partial x} + \mu_k \frac{\partial w_{r-k-1}}{\partial y}\right)$$

(λ_k, μ_k — комплексные постоянные ($k = 1, \ldots, r-1$)) совпадает с одним классом гиперкомплексных функций ($w_0, \ldots, w_{r-1}$ — компоненты всякой такой функции), ранее изученным автором (РЖМат, 1957, 6327). Все эти гиперкомплексные функции — моногенные относительно некоторой, специально подобранной функции того же класса. Таким образом, система (1) играет роль известной системы Коши—Римана для функций указанного класса. Библ. 4 назв. В. С. Федоров

9765. О n-метакалорийных функциях. Фридман (On n-metacaloric functions. Friedman Avner), Proc. Amer. Math. Soc., 1957, 8, № 4, 770—776 (англ.)

Автор называет n-метакалорийной функцией всякое решение $u(x, t)$ уравнения $p(\Omega)u(x, t) = 0$, где $x = (x_1, \ldots, x_N)$; $\Omega = \Delta - \partial/\partial t$; $\Delta = \Sigma_{i=1}^{N} \partial^2/\partial x_i^2$; $p(z)$ — полином от z степени n и с коэффициентами, не зависящими от x и t. Результаты:

1. Общий вид n-метакалорийной функции в области D:

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=0}^{n_i - 1} t^j u_j^{\alpha_i}(x, t),$$

где $p(z) = \Pi_{i=1}^{k} (z - \alpha_i)^{n_i}$; $\Sigma_{i=1}^{k} n_i = n$; $\alpha_p \neq \alpha_q$, $p \neq q$, $p, q = 1, \ldots, k$; $u_j^{\alpha_i}(x, t)$ — решение в области D уравнения: $(\Omega - \alpha_i) u(x, t) = 0$. Полагая, ради простоты, $N = 1$, автор доказывает:

2. Называя функцию $u(x, t)$, определенную в полосе $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, типа (K, n) $(K \neq 0)$, когда $|\Omega^k u(x, t)| \leqslant M e^{Kx^2}$, $k = 0, 1, \ldots, n$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, и типа $(0, n)$, если эта функция типа (ε, n) для всякого $\varepsilon > 0$, получим для n-метакалорийной функции $u(x, t)$ типа $(K, n-1)$ в полосе $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$:

$$\mu(u; h) \equiv \frac{1}{2(\pi h)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-\xi)^2/4h} \cdot u(\xi, t-h)\, d\xi =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=0}^{n_i - 1} (t-h)^j e^{\alpha_i h} \cdot u_j^{\alpha_i}(x, t)$$

(при обозначениях теоремы 1) для всяких t и h, удовлетворяющих условиям:

$$t_1 < t \leqslant t_2; \qquad t_1 < t - h; \qquad 0 < h < \frac{1}{8K},$$

а в случае $\operatorname{Re}\{\alpha_i\} \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, k$, для функции $u(x, t)$, n-метакалорийной в полосе $-\infty < t \leqslant t_2$ и типа $(0, n-1)$ в каждой полосе $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, имеем следующее обобщение теоремы Лиувилля: если $u(x, t)$ ограниченная и существует предел $\mu(u; h)$ при $h \to \infty$, то $u(x, t) \equiv \text{const}$.

3. Исследуются свойства $\mu(u; h)$, характеризующие функцию $u(x, t)$ как n-метакалорийную и типа $(K, n-1)$. Библ. 5 назв. В. С. Федоров

9766. Формулы, родственные формулам Неванлинна-Альфорса для некоторых наложений одного многообразия n измерений на другое. Шварц (Formules apparentées à celles de Nevanlinna-Ahlfors pour certaines applications d'une variété à n dimensions dans une autre. Schwartz Marie-Hélène), Bull. Soc. math. France, 1954, 82, № 4, 317—360 (франц.)

В 1935 г. Альфорс указал подход к основным соотношениям неванлинновской теории распределения значений через теорию поверхностей наложения (Неванлинна Р., Однозначные аналитические функции, М.—Л., 1941, гл. XIII), а затем в 1937 г. (Ahlfors, Acta Soc. scient. fennicae, 1937, 2, № 6, 1—17), предполагая, что на римановой поверхности введена риманова метрика, показал, что к основным теоремам Р. Неванлинна можно прийти с помощью формулы Гаусса-Бонне (гл. XII книги А. П. Нордена «Теория поверхностей» РЖМат, 1957, 6622 К). Автор рассмотрела ранее регулярные наложения одного многообразия n измерений на другое и перенесла на этот случай формулу Гаусса-Бонне (РЖМат, 1957, 1755). Синтезируя методы Альфорса и обобщая их, автор получает обобщения результатов Альфорса, относящиеся к регулярно исчерпываемым поверхностям наложения. Сложность терминологии (список обозначений занимает 1 страницу) не позволяет точно сформулировать в реферате основные результаты статьи. Поэтому второстепенные условия, обеспечивающие достаточную правильность и гладкость наложений, мы опускаем.

Обозначения см. РЖМат, 1957, 1755, но многообразие V может не быть компактным, а W — компактно.

Пусть V_t — семейство многообразий, исчерпывающее V, когда $t \to t_0$ (область значений t не обязательно интервал). На W задана риманова метрика ds^2, которая с помощью отображения, обратного к f, осуществляющему наложение, переносится на V. Пусть $\mathfrak{V}$ и $\mathfrak{F}$ — соответственно объемы n и $n-1$ измерений на V. Если $\lim_{t \to t_0} \mathfrak{F}(V_t)/\mathfrak{V}(V_t) = 0$, то наложение f V на W называется параболическим относительно исчерпания V_t (обобщение регулярной исчерпаемости по Альфорсу). Далее рассматриваются параболические регулярные наложения. Обозначим $\overline{N}(t, \mathfrak{A})$ — число точек $f^{-1}(\mathfrak{A}) \cap V_t$ $(\mathfrak{A} \in W)$, $N(t, \mathfrak{A})$ — то же число, но с учетом топологической степени, $N(t) = \mathfrak{V}(V_t)/\mathfrak{V}(W)$ $\delta(t, \mathfrak{A}) = 1 - N(t, \mathfrak{A})/N(t)$, $\vartheta(t, \mathfrak{A}) = (N(t, \mathfrak{A}) - \overline{N}(t, \mathfrak{A}))/N(t)$. Важнейшее следствие из теоремы 1 утверждает: для всех $\xi \in W$, за исключением, возможно, множества меры нуль, $\overline{\lim}\, \delta(t, \xi) = 0$. Для случая мероморфных в $|z| < R \leqslant \infty$ функций это дает $\lim n(r, \xi)/A(r) = 1$ (и $\lim n/A = 1$, если пренебречь исключительным множеством r), что, насколько нам известно, и в этом простейшем случае является новым результатом, дополняющим результат Фростмана (Неванлинна Р., цит. выше, стр. 280): $\lim_{r \to R} N(r, \xi)/T(r) = 1$ для всех ξ, кроме множества значений внутренней емкости нуль. Из формулы (1) в РЖМат, 1957, 1755 получается (теорема II):

$$\frac{1}{N(t)} \int_{\dot{K}^+(\dot{V}_t)} - \Pi^* + \frac{1}{N(t)} \sum_{D_i'^k \subset V_t} (-1)^k (m(D_i'^k) - 1) + \frac{\chi(V_t)}{N(t)} = \chi(W) + o(1).$$

Здесь интеграл слева дает меру трансцендентной разветвленности (его аналог в неванлинновской теории

$$2T(r, f) - N_1(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln [(1 + |f|^2)/|f'|]\, d\varphi + O(1),$$

ср. Teichmüller O., Dtsch. Math., 1939, 4, 163—190), а сумма — меру алгебраической разветвленности (аналог $(N_1(r))$. Затем при дополнительных ограничениях (главное сводится к трансцендентной разветвленности V только над конечным числом точек) показывается, что

$$\frac{1_i}{N(t)} \int_{\dot{K}^+(\dot{V}_t)} - \Pi^* = \sum_i \delta(t, \mathfrak{A}_i),$$

и аналогичный результат для алгебраической разветвленности.

В конце выписываются формулы для частного случая отображений, осуществляемых мероморфными функциями. Указывается, что теорию можно обобщить, если рассматривать пространства многих комплексных переменных и системы функций (ср. РЖМат, 1954, 5553; 1956, 2169), и разбирается конкретный пример. А. А. Гольдберг

9767. Абстрактные голоморфные функции. Персидский К. П., Вестник АН КазССР, 1958, № 1, 91—97 (рез. каз.)

Известная теорема Гартокса о разложении по степеням $z_1,\ldots, z_n$ функции $f(z_1\ldots, z_n)$, аналитической по каждому из переменных в отдельности (см., например, Фукс Б. А., Теория аналитических функций многих комплексных переменных, Гостехиздат, 1948, § 9), обобщается на случай функции счетного множества аргументов, принимающей значения в банаховском пространстве. Г. Е. Шилов

9768. Об основах тонкой теории потенциала. Шоке (Sur les fondements de la théorie fine du potentiel. Choquet Gustave), C. r. Acad. sci., 1957, 244, № 12, 1606—1609 (франц.)

Рассматривается компактное (для простоты формулировок) пространство E и несимметрическое ядро $G(x, y)$; $x, y \in E$. Оно называется регулярным, если для любой меры $\mu \geqslant 0$ непрерывность потенциала G_μ на носителе меры влечет его непрерывность всюду в E. Если $G(x, y)$ и $\check{G}(x, y) = G(y, x)$ регулярны, и G конечно и непрерывно при $x \neq y$, то G называется вполне регулярным (très régulier) ядром. Для такого ядра множество внешней G-емкости нуль будет также иметь нулевую $\hat{G}$-емкость и наоборот. Имеет место теорема сходимости: Для всякой сходящейся последовательности мер $\mu_n \to \mu$, для которой соответствующие потенциалы $G\mu_n(x)$ имеют квази-всюду предел $f(x)$, имеем $G\mu(x) = f(x)$ квази-всюду. Если E — метрическое пространство, то множество $\mathfrak{M}_+$ положительных мер метризуемо. Обозначим L_{ν_0} ($\nu_0 \in \mathfrak{M}_+$) класс функций на E, для которых $\|\varphi\| = \int |\varphi|\, d\nu_0 < \infty$. Тогда если $\check{G}\nu_0$ непрерывно, то оператор $G\mu$, действующий из $\mathfrak{M}_+$ в L_{ν_0}, непрерывен. Для вполне регулярных ядер это приводит к следующему результату: если $\mu_n \to \mu$, то всюду $G\mu \leqslant \varliminf G\mu_n$, причем квази-всюду $G\mu = \varliminf G\mu_n$. Автор называет сердцевиной E (G—coer de E) дополнение к наибольшему открытому множеству G-емкости нуль. Основная теорема следующая: Пусть G вполне регулярно, $\check{G}\nu_0$ непрерывно и носитель ν_0 совпадает с сердцевиной E. Тогда следующие утверждения эквивалентны: 1) отображение $\mu \to G\mu$ $\mathfrak{M}_+$ в L_{ν_0} есть гомеоморфизм; 2) отображение $\mu \to (G\mu)\nu_0$ $\mathfrak{M}_+$ в $\mathfrak{M}_+$ есть гомеоморфизм; 3) множество непрерывных потенциалов $\check{G}\nu$ полно в $C(E)$; 4) равенство $G\mu_1 = G\mu_2$ квази-всюду влечет $\mu_1 = \mu_2$. Эта теорема устанавливает связь между «грубой» теорией потенциала, в которой потенциал рассматривается как мера, и «тонкой» теорией, в которой потенциал рассматривается как функция. Доказательства отсутствуют (иногда лишь намечены). Н. С. Ландкоф

9769 К. Элементы теории функций. Кнопп (Afüggvénytan elemei. Knopp Konrad. Budapest, Tankönyvkiadó, 1958, 176 l., ill., 6.50 Ft.) (венг.)

Перевод с немецкого 4-го издания книги (Knepp K; Elemente der Funktionentheorie (Berlin, Gruyter, 1955).

9770 К. Введение в теорию функций комплексного переменного. Короус (Úvod do nauky o funkcích komplexní proměnné. Korous Josef. Praha, SNTL, 1957, 379 s., 28 Kčs.), Bibliogr. katal. ČSR. České knihy, 1957, № 25, 537 (чешск.)

9771 К. Элементы теории функций комплексной переменной. Учебн. пособие для студ. III курса. 2-е изд. Шумов А. С., Всес. заочн. энерг. ин-т. М., 1957 (1958), 128 стр., илл., беспл.

9772 Д. Разветвленные регулярные семейства кривых и конечные асимптотические пути аналитических функций. Ван Вранкен-Венд (Branched regular curve families and finite asymptotic paths of analytic functions. Van Vranken Wend David. Doct. diss. Univ. Michigan, 1955), Dissert. Abstrs, 1955, 15, № 5, 842 (англ.)

9773 Д. Дифференцируемые приближения к слабым внутренним преобразованиям. Джуэтт (Differentiable approximations to light interior transformations., Jewett John William.— Doct. diss., Univ. Michigan, 1955), Dissert. Abstrs, 1955, 15, № 9, 1624 (англ.)

9774 Д. Конформное отображение некоторых видов круговых многоугольников. Пергаменцева Э. Д. Автореф. дис. канд. физ. матем. н., ЛГУ, Л., 1958

См. также: 9956 К, 10020

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Редакторы *В. В. Немыцкий, И. Н. Векуа, А. Г. Свешников*

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

9775. К вопросу интегрирования одного типа вырожденного гипергеометрического уравнения. Карасев И. М., Уч. зап. Кабардино-Балкарск. гос. пед. ин-та, 1957, вып. 12, 29—38

Находятся условия, при которых уравнение

$$(a_2 + b_2x)\,y'' + (a_1 + b_1x)\,y' + (a_0 + b_0x)\,y = 0 \qquad (1)$$

имеет решение вида

$$y = e^{\lambda x}(d/dx)^m\,[e^{\mu x}(a_1 + b_2x)^k]. \qquad (2)$$

Примечание референта. В статье утверждается, что даются необходимые и достаточные условия выражения общего интеграла уравнения (1) с помощью квадратур. На самом деле рассматривается только вопрос о существовании решения типа (2). Г. К. Энгелис

9776. К вопросу о решении уравнения Ляме в замкнутом виде. Иваненко В. В. (До питання про розв'язування рівняння Ляме в загальному вигляді. Іваненко В. В.), Наук. зап. Київськ. держ. пед. ін-т, физ.-матем. сер., 1956, 19, 42—61 (укр.)

Рассматривается вопрос о построении в замкнутом виде решения уравнения Ляме

$$y'' - [n(n+1)px + B]y = 0,$$

где n — целое положительное число, px — эллиптическая функция, B — произвольный параметр. В § 1 строятся в замкнутой форме решения этого уравнения при $n=1$, $n=2$, $n=3$. § 2 посвящен изложению общего оригинального метода построения решения уравнения Ляме. В § 3 выводится связь этих решений с функциями Ляме. В. И. Зубов

9777. **Решения гипербесселевого уравнения. И Цзя-шунь** (Solutions of the hyper-Bessel equation. Yih Chia-Shun), Quart. Appl. Math., 1956, **13**, № 4, 462—463 (англ.)

Доказывается, что уравнение $L^n f=0$ $(L=D^{-2}+r^{-2}D-p^2r^{-2}+k^2, D=d/dr)$ имеет решения вида $r^m Z_{p+m}(kr)$ $(m=0,1,\ldots,n-1)$, если $Z_s(r)$ — решение уравнения Бесселя $(D^2+r^{-1}D-s^2r^{-2}-\lambda)f=0$. Г. К. Энгелис

9778. **Новый метод расчета квадратичных линейчатых поверхностей. Анке** (Eine neue Berechnungsmethode der quadratischen Regelfläche. Anke K.), Z. angew. Math. und Phys., 1955, **6**, № 4, 327—331 (нем.)

Пусть $p=d/dt$ обозначает дифференциальный оператор относительно времени t; рассмотрим полиномиальный оператор $f(p)=a_0p^n+a_1p^{n-1}+\cdots+a_n$ с действительными коэффициентами a_k. Предполагая, что дифференциальное уравнение $f(p)y(t)=0$ допускает только устойчивое решение $y(t)$, автор дает метод вычисления интеграла $J_0=\int_0^\infty y^2dt$ с помощью коэффициентов a_k и начальных значений $q_i=p^iy(0)$. С этой целью он умножает дифференциальное уравнение на $p^ky(t)$, интегрирует от 0 до ∞ и получает ряд формул для различных значений k, которые позволяют провести вычисление J_0, умножая и обращая известные матрицы. Автор допускает, что задача уже была рассмотрена и решена другими авторами (Sartorius H., Dissertation, Stuttgart, 1945; Hazebroek P., Van der Waerden B. L. Trans. ASME, 1950, **72**, 309—315; Bückner H, Quart. Appl. Math., 1952, **10**, 205—213), но он претендует на то, что в его методе не требуется знания «точного» (явного) решения $y(t)$. Это не так. В статье Бюкнера, цитированной выше, дается явная формула для J_0, без использования представления $y(t)$ в терминах экспоненциальных функций. Автор игнорирует также тот факт, что практический пример, имеющий отношение к минимизации J_0 при условиях $a_0=a_n=1$, $q_0=1$, $q_1=q_2=\cdots=q_{n-1}=0$, был уже рассмотрен в в статье Бюкнера. H. F. Bückner

Перевод из Math. Revs, 1956, **17**, № 6, 613.

9779. **О методе моментов в теории нелинейных дифференциальных уравнений. Гаврилов Н. И.**, Научн. ежегодник Одесск. ун-та, 1956, Одесса, 1957, 109—113

Для уравнения $d\rho/d\theta=\rho f(\rho,\theta)$, где $f(\rho,\theta)$ — либо целая, либо рациональная функция от ρ, коэффициенты которой непрерывны при всевозможных θ, ставится задача: при каких ограничениях, наложенных на функцию $f(\rho,\theta)$, решение упомянутого уравнения допускает представление

$$\rho=\int_0^1[\tau+\omega^{-1}\Pi(\theta)]^{-1}\,d\sigma(\tau;\theta); \qquad (1)$$

в котором $\Pi(\theta)>0$, $\omega=\mu\exp\left\{\int_0^\theta f(0,s)\,ds\right\}$, μ — параметр, а $\delta(\tau,\theta)$ — неубывающая функция от τ с ограниченной на сегменте $[0,1]$ вариацией.

Формулируются (без доказательств) результаты, относящиеся к более простому случаю $f(\rho,\theta)=\varphi(\rho)$. В этом случае представление (1) заменяется таким:

$$\rho=\int_0^1(\tau+\Pi\mu^{-1}e^{-\lambda\theta})^{-1}d\sigma(\tau);\ \lambda=\varphi(0),\ \Pi=\text{const}>0. \qquad (2)$$

Утверждается, что представление (2) возможно, если $\varphi(\rho)$ принадлежит введенному автором классу так называемых нормальных функций. Формулируются некоторые признаки нормальности. С. Г. Михлин

9780. **Рекуррентные соотношения для логарифмических решений в задаче об изгибе круглых пластин. Григоренко** (Рекурентні співвідношення для логарифмічних розв'язків в задачі по згин круглих пластин. Григоренко Я. М.), Прикл. механіка, 1957, **3**, № 4, 400—408 (укр.; рез. русск., англ.)

Рассматривается уравнение

$$L[w]\equiv x^nP_0(x)\frac{d^nw}{dx^n}+\ldots+xP_{n-1}(x)\frac{dw}{dx}+P_n(x)w=0,$$

где $P_i(x)$ — полиномы $(i=0;\ 1;\ 2\ldots\ n)$.

Известно, что решение этого уравнения может быть представлено в виде рядов специального вида. В статье рассматривается два случая: 1) все корни характеристического уравнения $f_0(\rho)=0$ одинаковы, 2) корни характеристического уравнения разнятся на целые числа.

Строятся рекуррентные формулы, позволяющие находить решения в виде известных рядов, содержащих логарифмические члены. Полученный результат применяется к задаче об изгибе круглой пластины линейнопеременной толщины с k узловыми диаметрами под действием произвольной нагрузки. В. И. Зубов

9781. **Приведение к квадратурам систем линейных однородных дифференциальных уравнений при специальной симметричности матрицы коэффициентов. Заметка I: Системы с циклическими матрицами, элементы которых — числа. Фадини** (Riducibilità alle quadrature di sistemi differenziali lineari omogenei dovuta a speciali simmetrie della matrice dei coefficienti. Nota I. Sistemi a matrice ciclica i cui elementi sono numeri. Fadini Angelo), Ricerca, 1957, 8, genn-giugno, 42—49 (итал.)

Показано, что матрицы специального вида, например

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix},$$

элементарным способом приводятся к диагональной форме, отчего системы с такими матрицами легко интегрируются. Р. Э. Виноград

9782. **Приведение к квадратурам систем линейных однородных дифференциальных уравнений при специальной симметричности матрицы коэффициентов. Заметка II: Системы с циклическими матрицами, элементы которых — матрицы. Фадини** (Riducibilitá alle quadrature di sistemi differenziali lineari omogenei dovuta a speciali simmetrie della matrice dei coefficienti. Nota II. Sistemi a matrice ciclica i cui elementi sono matrici. Fadini Angelo), Ricerca, 1957, 8, genn. giugno, 50—59 (итал.)

Результат предыдущей заметки обобщается на тот случай, когда элементы a, b,... сами являются матрицами особого строения. Р. Э. Виноград

9783. **Применение гиперматричного алгорифма Эгервари к математическому исследованию многофазисных трансформаторов. Ловашш-Надь** (Egerváry J. hipermatrix-algoritmusának alkalmazása többfázisú transzformátorok matematikai vizsgálatára. Lovass-Nagy Viktor) Magyar tud. akad. Mat. kutató int. közl., 1956, **1**, № 1—2, 125—149 (венг.; рез. русск., англ.)

Цель работы — дать единое и наглядное решение системы дифференциальных уравнений, описывающих стационарные и транзиэнтные электрические процессы, протекающие в многофазисных трансформаторах, с помощью некоторых новейших результатов теории матриц, полученных Эгервари. Система неоднородных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами вида

$$r_{pk}i_{pk}+\sum_{\nu=1}^{h} l_{pk\nu}\frac{d}{dt}i_{p\nu}+\sum_{\nu=1}^{h} m_{k\nu}\frac{d}{dt}i_{s\nu}=u_{pk}, \quad (1)$$

$$r_{sk}i_{sk}+\sum_{\nu=1}^{h} l_{sk\nu}\frac{d}{dt}i_{s\nu}+\sum_{\nu=1}^{h} m_{k\nu}\frac{d}{dt}i_{p\nu}=u_{sk}, \quad (2)$$

математически описывающая некоторый n-базисный трансформатор, может быть представлена единственным матричным дифференциальным уравнением

$$L\frac{d}{dt}i+Ri=u, \quad (3)$$

решение которого в случае любых матричных коэффициентов может быть получено из общей формулы, выведенной в одной из предыдущих работ автора (РЖМат, 1957, 489).

В том случае, когда трансформатор таков, что, во-первых, материальные и геометрические данные катушек, расположенных на первичной стороне, тождественны, во-вторых, катушки вторичной стороны также одинаковы, наконец, в расположении катушек наблюдается циклическая симметрия, матричные коэффициенты, фигурирующие в уравнении (3), суть гиперматрицы, состоящие из циклических блоков. В этом случае решение общего вида

$$i=(\sqrt{R})^{-1}T^{*}e^{-At}T\sqrt{R}\,i_0-(\sqrt{R})^{-1}T^{*}\left[A\,(j\omega E+A)^{-1}(Ee^{j\omega}-e^{-At})\right]T\,(\sqrt{R})^{-1}u_0. \quad (4)$$

Уравнение (3), удовлетворяющее начальному условию $i(0)=i_0$, может быть приведено к иному виду, если использовать гиперматричный алгорифм Эгервари (РЖМат, 1955, 4877) и привести гиперматрицы, фигурирующие в решении общего вида (4) и состоящие из циклических и поэтому попарно перестановочных блоков, к диагональному виду. Полученная таким образом формула дает наглядное и годное для численных вычислений решение проблемы и совершенно аналогична формуле, описывающей однофазисный трансформатор.

В конце работы автор применяет полученные общие результаты для случая двух- и трехфазисных трансформаторов. Резюме автора

9784. **О связи между системами линейных дифференциальных уравнений и интегральными уравнениями Вольтерра с вырожденными ядрами.** **Бибелиц** (Über den Zusammenhang zwischen Systemen linearer Differentialgleichungen und Volterrascher Integralgleichungen mit ausgeartetem Kern. Wiebelitz R.), Arch. Math., 1956, **7**, № 3, 184—196 (нем.)

Дан новый метод сведения системы линейных дифференциальных уравнений к системе интегральных уравнений, причем предполагается, что известно общее решение некоторой однородной подсистемы, в то время как при обычных методах должны быть известны решения всей исходной системы. Работа состоит из трех разделов:

1. Сведение системы интегральных уравнений к системе дифференциальных уравнений. Рассматривается система

$$y_\alpha(s)+\sum_{\beta=1}^{n}\int_a^b k_{\alpha\beta}(s,t)\,y_\beta(t)\,dt=f_\alpha(s) \quad (1)$$

с вырожденными ядрами $k_{\alpha\beta}(s,t)=\sum_{j=1}^{m_{\alpha\beta}}X^j_{\alpha\beta}(s)\,Y^j_{\alpha\beta}(t)$ $(\alpha=1,\ldots,n)$, где функции $Y^j_{\alpha\beta}(t)$ имеют на интервале $a\leqslant t\leqslant b$ непрерывные производные до $(2M_\alpha-1)$-го порядка, а функции $X^j_{\alpha\beta}(s)$ и $f_\alpha(s)$ непрерывны на интервале $a\leqslant s\leqslant b$ (буква j не показатель степени, а индекс). По функциям $Y^j_{\alpha i}(i=1,\ldots,n;\ j=1,\ldots,m_{\alpha i})$ для каждого i составляется линейное дифференциальное уравнение

$$L_i^{*}[v(s)]\equiv\sum_{\nu=0}^{\mu_i}\varphi^i_{\mu_i-\nu}(s)\,v^{(\nu)}(s)=0,$$

решением которого являются эти функции и сопряженный оператор

$$L_i[u(s)]=\sum_{\nu=0}^{\mu_i}(-1)^\nu\frac{d^\nu}{ds^\nu}\left(\varphi^i_{\mu_i-\nu}(s)\,u(s)\right)=\sum_{\nu=0}^{\mu_i}a^i_{\mu_i-\nu}(s)\,\frac{d^\nu u(s)}{ds^\nu},$$

где μ_i не превышает суммы $m_{\alpha i}$ $(\alpha=1,\ldots,n)$. Пользуясь известным свойством взаимно сопряженных операторов, имеем

$$Y^j_{\alpha j}(s)\,L_i[u(s)]=\frac{d}{ds}P^j_{\alpha i}[u(s)]\ (i=1,\ldots,n),$$

где оператор $P^j_{\alpha i}$ определяется по известной формуле. С помощью таким образом построенных операторов образуется система дифференциальных уравнений

$$L_\alpha[u_\sigma(s)]+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m_{\alpha i}}X^j_{\alpha i}(s)\,P^j_\alpha[u_i(s)]=0\ (\alpha=1,\ldots,n),$$

решения которой $u_\alpha=u_{\alpha\beta}(s,t)\,(\alpha,\beta=1,\ldots,n)$ находятся при специальных начальных условиях

$$u_{\alpha\beta}=\frac{\partial}{\partial s}u_{\alpha\beta}=\ldots=\frac{\partial^{\mu_i-2}}{\partial s^{\mu_i-2}}u_{\alpha\beta}=0,$$

$$a^i_0\frac{\partial^{\mu_i-1}}{\partial s^{\mu_i-1}}u_{\alpha\beta}=\delta_{\alpha\beta}=\left\{\begin{array}{l}1\text{ для }\alpha=\beta\\0\text{ для }\alpha\neq\beta\end{array}\right\}\text{ при }s=t,$$

причем предполагается, что $a^i_0(s)\neq 0$ $(i=1,\ldots,n)$. Затем доказывается (теорема 1), что функция

$$y_\alpha(s)=f_\alpha(s)+\int_a^s\sum_{\beta=1}^{n}L_\alpha[u_{\alpha\beta}(s,t)]\,f_\beta(t)\,dt,\ \alpha=1,\ldots,n,$$

есть однозначное решение уравнения (1) на $[a,b]$.

2. Сведение системы дифференциальных уравнений к системе интегральных уравнений. Рассматривается система дифференциальных уравнений

$$a_i(x)\,y_i^{(m_{ii}+1)}+\sum_{j=1}^{n}F_{ij}[y_j(x)]\equiv a_i(x)\,\frac{d^{m_{ii}+1}y_i}{dx^{m_{ii}+1}}+\sum_{j=1}^{n}\sum_{\nu=0}^{m_{ij}}a^{ij}_{m_{ij}-\nu}(x)\,\frac{d^\nu y_i}{dx^\nu}=f_i(x),\ i=1,\ldots,n,$$

с непрерывными коэффициентами на интервале $a \leqslant x \leqslant b$, при условии, что для каждого фиксированного j $m_{ij} \leqslant m_{jj}$ $(i = 1, \ldots, n)$. Далее составляется подсистема уравнений

$$a_i(x)\, u^{(m_{ii}+1)}(x) + \sum_{j=1}^{m} F_{ij}[u_i(x)] = 0, \qquad (2)$$

а данная система переписывается в виде

$$a_i(x)\, y_i^{(m_{ii}+1)}(x) + \sum_{j=1}^{m} F_{ij}[y_i(x)] = f_i(x) - \sum_{k=m+1}^{n} F_{ik}[y_k(x)]. \qquad (3)$$

Системы (2) и (3) могут быть сведены к системе из $N = m + \Sigma_{j=1}^{m} m_{jj}$ дифференциальных уравнений первого порядка с N неизвестными функциями $u_j^{(\nu)}(x)$ $(j = 1, \ldots, m,\ \nu = 0, \ldots, m_{jj})$. Таким образом, вопрос о решении системы (2) сводится к решению системы неоднородных дифференциальных уравнений первого порядка. Решение этой системы находится методом вариаций произвольных постоянных по формуле

$$y_j^{(\mu)}(x) = \sum_{\lambda=1}^{N} u_{j\lambda}^{(\mu)}(x) \left\{ C_\lambda + N_\lambda^{\nu\tau}\left[f_\nu(\tau) - \sum_{k=m+1}^{n} F_{\nu k}[y_k] \right] \right\} \qquad (4)$$

$$(j = 1, \ldots, m;\ \mu = 0, \ldots, m_{jj}),$$

где $u_{j\lambda}^{(\mu)}(x)$—фундаментальные решения соответствующей однородной системы, C_λ — произвольные постоянные, а оператор $N_\lambda^{\nu\tau}$ определяется по формуле, указанной в работе. Далее доказывается (теорема 2), что функции $y_i^{(m_{ii}+1)}(x)$ $(i = m+1, \ldots, n)$ удовлетворяют системе интегральных уравнений

$$a_i(x)\, y_i^{(m_{ii}+1)}(x) + \sum_{j=m+1}^{n} \mathfrak{K}'_{ij}(x, t)\, y_j^{(m_{jj}+1)}(t)\, dt = f_i^*(x), \qquad (5)$$

где ядра $\mathfrak{K}'_{ij}$ и функции f_i^* определяются по формулам, данным в работе. Отсюда интегрированием могут быть найдены искомые функции $y_i(x)$ $(i = m+1, \ldots, n)$. Если эти функции подставить в формулу (3), то можно найти (тоже путем интегрирования) и остальные неизвестные функции $y_j(x)$ $(j = 1, \ldots, m)$. Метод применим (теорема 3) к решению систем линейных дифференциальных уравнений первого порядка, причем в этом случае система уравнений (5) может быть заменена системой интегральных уравнений относительно самих неизвестных функций (теорема 4).

3. Сведение системы линейных дифференциальных уравнений. В этом разделе на основании предыдущих разделов показана возможность понижения порядка системы линейных дифференциальных уравнений без знания ее частных решений. В обзорной части работы не указана статья Н. Н. Назарова «О связи между дифференциальными и интегральными уравнениями» (Тр. среднеаз. ун-та, 1933, сер. 5, № 6, стр. 8).

В. В. Васильев

9785. О системе двух уравнений Брио и Букэ. Мячин В. Ф., Вестн. Ленингр. ун-та, 1958, № 7, 88—102 (рез. англ.)

Рассматривается вопрос о представлении решений системы дифференциальных уравнений с особой точкой регулярного типа в нормальной форме, которые аннулируются в этой особой точке. Подобная проблема рассматривалась многими авторами, однако лишь в работе референта была разрешена до конца в классической ее постановке.

Настоящая работа содержит несколько другой подход к решению указанной задачи и дает ряд более детальных результатов. В. И. Зубов

9786. Вклад в асимптотическую теорию обыкновенных дифференциальных уравнений в комплексной области. Стродт (Contributions to the asymptotic theory of ordinary differential equations in the complex domain. Strodt Walter), Mem. Amer. Math. Soc., 1954, № 13, 81 pp.) (англ.).

Вводится семейство S неограниченных областей s на плоскости комплексного переменного X, не пересекающих полуоси $x \leqslant 0$, обладающее свойствами: а) из $s_1 \subset S$, $s_2 \subset S$ следует $s_1 \cap s_2 \subset S$, б) по числу $c_1 > 0$ существует $s \subset S$ такое, что $|X| > c_1$ при $X \subset S$.

F — семейство аналитических функций f, называемых допустимыми, если f аналитична и область ее аналитичности, содержит $s \subset S$. Обозначим через $\log_0 x = x$ и $e_0(x) = x$. Тогда по индукции $\log_{j+1}(x) = \log(\log_j(x))$ и $e_{j+1}(x) = e^{e_j(x)}$. Будем писать $f(x) < 1$, где $f(x) \in F$, если $\dfrac{d^j(e_k(x))}{dx^j} \to 0$ при $x \to \infty$, $x \in S$. Если $f(x) \in F$, $g(x) \in F$, то $f < g$ означает, что $f/g < 1$. Если $f - g < g$, то $f \sim g$. Если $f \sim kg$, где $k = \text{const}$, то пишут $f \approx g$. Если для любого $N > 0$ $f < x^{-N}$, то f тривиально. Обозначим через M_p множество логарифмических одночленов $Ax^{\alpha_0}(\log x)^{\alpha_1} \ldots (\log_p x)^{\alpha_p}$ ранга p, где $A \neq 0$, $\alpha_0, \ldots, \alpha_p$ — вещественные числа, M_{-1} есть множество, не равное нулю, констант, $p \geqslant -1$. Обозначим через E_r множество допустимых функций, обладающих свойствами:

1) $1 \in E_r$;

2) Если $f_1, \ldots, f_k \in E_r$, то $\Sigma_i e_i f_i \in E_r$;

3) $\Sigma_{i=1}^{n} m_{ip} f_i$ либо тривиальна, либо $\sim m_p$, где m_{ip} и m_p — логарифмические одночлены ранга $p \leqslant r$.

Теорема 1. Если $Q(x, y_0, \ldots, y_n) - \Phi(x)$ есть полином относительно $y_0, y_1, \ldots, y_n$ с коэффициентами из E_r, при этом каждый член, входящий в Q, имеет положительную степень и по крайней мере один коэффициент этих членов нетривиален, так же как и $\Phi(x)$, то существует конечное число логарифмических одночленов $M(x)$, обладающих свойствами: 1) $Q(x, M, M^{(1)}, \ldots, M^{(n)}) \sim \Phi(x)$; 2) если логарифмический одночлен $N(x) < M(x)$, то $Q(x, N, N^{(1)}, \ldots, N^{(n)}) < \Phi(x)$. Во второй части теоремы 1, опущенной ради краткости, дается алгорифм для построения всех логарифмических одночленов $M(x)$, обладающих свойствами 1) — 2). Далее автор приводит две теоремы, которые применяет к нахождению приближенных решений полиномиальных дифференциальных уравнений с коэффициентами из E_r. Отметим, что наличие более чем 120 лемм и определений, а также громоздкость формулировок теорем весьма затрудняет чтение работы. Библ. 17 назв. В. И. Зубов

9787. Элементарный вывод необходимого и достаточного условия неколеблемости решения линейного дифференциального уравнения второго порядка. Кондратьев В. А., Успехи матем. наук, 1957, 12, № 3, 159—160

Для уравнения

$$L(y) = y'' + p(x)\, y' + q(x)\, y = 0$$

элементарным образом, на основании «принципа максимума», доказано: необходимым и достаточным условием неколеблемости является существование такой

функции $u(x) > 0$, чтобы $L(u) \leqslant 0$. Из этого критерия простой заменой получается критерий М. И. Ельшина (Докл. АН СССР, 1949, 68, № 5). С. А. Гальперн

9788. Колебания системы, содержащей реле с опережающей характеристикой. Челпанов И. Б., Прикл. матем. и механ., 1958, 22, № 1, 50—66

Рассматриваются колебания релейной системы с одной степенью свободы вида

$$\frac{d^2u}{dt^2} + L\frac{du}{dt} + Mu = -F(u), \qquad (1)$$

где $F(u)$ — общая характеристика релейного усилителя, отражающая эффект опережения включения реле (особенность задачи).

Анализ движения системы производится фактически путем точечных преобразований оси отклонений (амплитуд отклонений) в самое себя. Устанавливаются условия устойчивости движения системы (1), а также устойчивости предельных циклов в зависимости от «выхода» реле h, ($|F(u)|_{\max} = h$). Значение работы заключается в применении к исследованию движения системы на фазовой плоскости статистических методов оценки движения. В частности, находятся стационарные плотности вероятности в случае отсутствия устойчивых предельных циклов на фазовой плоскости. Дается новый подход к анализу колебаний релейных систем регулирования и управления. Г. М. Уланов

9789. О колеблемости решений линейных дифференциальных уравнений третьего и четвертого порядков. Кондратьев В. А., Докл. АН СССР, 1958, 118, № 1, 22—24

Рассматриваются уравнения

$$y^{\mathrm{III}} + p(x)\,y = 0 \qquad (1)$$

и

$$y^{\mathrm{IV}} + q(x)y = 0. \qquad (2)$$

Пусть $x \geqslant x_0$ и коэффициенты $p(x)$ и $q(x)$ — непрерывные функции. Формулируются следующие теоремы:

Теорема 1. Если в уравнении (1) функция $p(x)$ не меняет знака, то между двумя последовательными нулями одного решения лежит не более двух нулей любого другого решения.

Теорема 2. Если $q(x) \geqslant 0$, то между двумя последовательными нулями решения уравнения (2) лежит не более четырех нулей любого другого решения.

Теорема 3 утверждает, что если $p(x)$ в уравнении (1) не меняет знака, то всегда существует неколеблющееся решение этого уравнения. Если же $p(x)$ меняет знак, то могут быть уравнения, у которых все решения колеблющиеся. Приводятся достаточные условия того, что все решения (1) колеблющиеся.

Теорема 4 устанавливает критерии в виде неравенств для коэффициента $p(x)$, достаточные для того, чтобы а) одно решение некоторой фундаментальной системы решений уравнения (1) стремилось монотонно к нулю, а остальные два были колеблющимися; б) все решения уравнения (1) были неколеблющимися, в) два решения некоторой фундаментальной системы решений уравнения (1) были колеблющимися, а третье монотонно стремилось к $+\infty$.

Аналогично теорема 5 устанавливает для уравнения (2) достаточные критерии того, что а) все решения колеблющиеся, б) имеется фундаментальная система решений, состоящая из двух колеблющихся и двух неколеблющихся решений, в) все решения неколеблющиеся.

Теоремы 6 и 7 дают достаточные условия колеблемости и неколеблемости решений уравнений (1) и (2) в виде расходимости и сходимости некоторых интегралов, содержащих коэффициент соответствующего уравнения. С. А. Гальперн

9790. Применение теоремы Гильдебрандта и Грейвса к решению периодической краевой задачи нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения. Чан Чхан Хун, Сухак ка мулли, Математика и физика, 1957, 1, № 4, 6—14 (корр., рез. русск.)

Доказывается следующая теорема: Пусть дано уравнение

$$y'' = \varphi(x, y, y') + \alpha y, \qquad (1)$$

где 1) $\varphi(x, y, y')$ — периодическая с периодом 1 по «x», определенная в области Ω, $-\infty < x, y, y' < \infty$, непрерывная по всем переменным и непрерывно дифференцируемая по y, y' функция; 2) $\varphi_y(x, y, y') \geqslant 0$ в Ω; 3) $\varphi_{y'}(x, y, y') \leqslant M$ в Ω, где α, M — положительные постоянные.

Тогда существует единственное решение уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям $y'(0) = y(1)$, $y'(0) = y'(1)$.

Для доказательства, полагая

$$y'' - \alpha y = Q(x), \qquad (2)$$

уравнение (1) преобразовывается в уравнение

$$Q(x) = \varphi\left(x, \int_0^1 G(x, s)\,Q(s)\,ds, \frac{d}{dx}\int_0^S G(x, s)\,Q(s)\,ds\right) = 0,$$

где $G(x, s)$ — функция Грина уравнения (2). Далее рассматривается операторное уравнение

$$A[Q(x); \lambda] \equiv Q(x) -$$

$$-\lambda\varphi\left(x, \int_0^1 G(x, s)\,Q(s)ds, \frac{d}{dx}\int_0^1 G(x, s)\,Q(s)\,ds\right) = 0 \qquad (3)$$

доказано, что по теореме Гильдебрандта и Грейвса решение этого уравнения получается аналитическим продолжением решения по параметру λ от 0 до 1.

Из резюме автора

9791. Некоторые вопросы асимптотического поведения интегральных кривых уравнения первого порядка в целом. Лощинин В. С., Уч. зап. Рязанск. гос. пед. ин-та, 1958, 15, 77—82

Рассматривается уравнение $y' = f(x, y)$, где $f(x, y)$ определена и непрерывна на всей плоскости (x, y), $f > 0$ при $y < \psi(x)$, $f < 0$ при $y > \omega(x)$, функции $\psi(x)$ и $\omega(x)$ непрерывны при $-\infty < x < \infty$. Получены некоторые почти очевидные результаты о продолжаемости решений этого уравнения при $x \to \infty$ и $x \to -\infty$. В предположении ограниченности функций ψ и ω доказано существование ограниченных (при $-\infty < x < \infty$) решений и изучены их свойства.

А. Ф. Филиппов

9792. К вопросу о горизонтальных и вертикальных асимптотах решений уравнения первого порядка. Лощинин В. С., Уч. зап. Рязанск. гос. пед. ин-та, 1958, 15, 83—87

Если функция $f(x, y)$ удовлетворяет условиям предыдущего реферата, и, кроме того, кривая $f(x,y)=0$ состоит из конечного числа ветвей, каждая из которых имеет горизонтальную асимптоту при $x \to +\infty$ (при $x \to -\infty$), то всякое решение уравнения $y' = f(x,y)$ при $x \to +\infty$ (соответственно, всякое ограниченное решение при $x \to -\infty$) имеет горизонтальную асимптоту. Близкие результаты ранее получены С. А. Гальперном (Докл. АН СССР, 1946, 54, № 5, 387—390). Кроме того, получено достаточное условие существования вертикальных асимптот у решений такого же уравнения, основанное на сравнении с уравнением с разделяющимися переменными.

А. Ф. Филиппов

9793. Дивергенция векторных полей и дифференциальные уравнения. Заремба (Divergence of vector fields and differential equations. Zaremba

S. K.), Amer. J. Math., 1954, **76**, № 1, 220—234 (англ.)

В предположении, что в дифференциальном уравнении

$$\frac{dx}{X(x, y)} = \frac{dy}{Y(x, y)} = dt \qquad (1)$$

функции $X(x, y)$ и $Y(x, y)$ имеют непрерывные частные производные, автор рассматривает выражение $\delta(x, y) = X'_x(x, y) + Y'_y(x, y)$, т. е. «дивергенцию вектора» $(X(x, y), Y(x, y))$. Используя это выражение $\delta(x, y)$, автор дает ряд изящных предложений (часть этих предложений установлена ранее другими методами). Первым из этих предложений — на него опираются все остальные — является:

Теорема 1. Пусть $x = x(t)$, $y = y(t)$ — интегральная кривая уравнения (1), $(x_1\, y_1)$ и (x_2, y_2) — две ее различные точки, причем $x(t_i) = x_i, y(t_i) = y_i$ $(i = 1,2)$. Пусть $\mathscr{T}_i$ — ортогональная траектория, проходящая через точку (x_i, y_i), и u_i — параметр на $\mathscr{T}_i$, определенный уравнением

$$-\frac{dx}{Y(x, y)} = \frac{dy}{X(x, y)} = \frac{du}{X^2(x, y) + Y^2(x, y)}$$

При этом $u_i = 0$ в точке (x_i, y_i) $(i = 1, 2)$. Тогда, рассматривая u_2 как функцию от u_1 $(u_2 = f(u_1))$, определенную условием, что соответствующие друг другу значения u_2 и u_1 являются значениями, соответствующими точкам кривых $\mathscr{T}_2$ и $\mathscr{T}_1$, соединенным дугой одной и той же интегральной кривой системы (1), мы получим при $u_1 = 0$

$$\frac{du_2}{du_1} = e^{\int_{t_1}^{t_2} \{X'_x(x(t), y(t)) + Y'_y(x(t), y(t))\}\, dt}.$$

Фигурирующая в этой теореме функция $u_2 = f(u_1)$, очевидно, является частным случаем «функции соответствия», введенной Дюлаком (Dulac H., Bull. Soc. math. France. 1923, **51**).

Из теоремы 1 автор непосредственно получает следующие (известные ранее) предложения:

а) Предельный цикл устойчив, если

$$h = \int_C [X'_x(x, y) + Y'_y(x, y)]\, dt < 0,$$

и неустойчив, если $h > 0$.

б) Если предельный цикл полуустойчив, то $h = 0$.

в) Область, в которой $X'_x(x, y) + Y'_y(x, y)$ имеет постоянный знак, не может содержать полуустойчивых предельных циклов.

г) Область, в которой $X'_x(x, y) + Y'_y(x, y)$ тождественно обращается в нуль, не может содержать предельных циклов.

Основываясь на выражении для du_2/du_1, автор доказывает следующую теорему, в случае аналитических $X(x, y)$ и $Y(x, y)$, другим методом доказанную Ляпуновым (Общая задача об устойчивости движения, 1950).

Теорема 4. Пусть начало O является центром «в смысле Пуанкаре» (т. е. особой точкой с чисто мнимыми характеристическими корнями и такой, что через все отличные от O точки некоторой ее окрестности проходят замкнутые интегральные кривые — «кривые центра»).

Если D — область внутри одной из замкнутых интегральных кривых этого центра O, то в области D существует однозначный первый интеграл уравнения (1).

Следующую теорему автор рассматривает как предложение, в известном смысле обратное тем предложениям Бендиксона (Acta Math. 24, 1908) и Дюлака (C. r. Acad. Sci. 1937, **204**, 1703—1706), в которых устанавливаются достаточные критерии для отсутствия замкнутых интегральных кривых.

Теорема 8. Пусть начало O (0,0) является фокусом или узлом системы (1) и пусть D — область, содержащая начало O, через все отличные от O точки которой проходят интегральные кривые, кончающиеся в точке O. Предположим, что $X(x, y)$ и $Y(x, y)$ имеют в области D частные производные до второго порядка. Какую бы функцию $F(x, y)$, имеющую в области D непрерывные производные и в точке O не обращающиеся в нуль, мы ни взяли, существует определенная в области D функция $Z(x, y)$, удовлетворяющая уравнению

$$(zX)'_x \quad (zY)'_y = F(x, y).$$

При этом, если $X(x, y)$, $Y(x, y)$ и $F(x, y)$ — функции, аналитические в области D, то функция $z(x, y)$ — тоже является аналитической. Кроме того, если функция $F(x; y)$ имеет постоянный знак в области D, то функция $z(x, y)$ имеет в этой области постоянный знак.

Е. А. Леонтович

9794. О мере устойчивости системы двух дифференциальных уравнений с двумя нелинейными функциями. Козловский Д. А., Уч. зап. Рязанск. гос. пед. ин-та, 1958, 15, 57—66

Рассматривается система двух дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} dx_1/dt &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \gamma(x_i), \\ dx_2/dt &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \nu(x_k)\ (i, k = 1, 2), \end{aligned} \qquad (1)$$

где функции $\gamma(x_i)$ и $\nu(x_k)$ представлены в виде

$$\begin{aligned} \gamma(x_i) &= \rho_i x_i^m + \varphi_i(x_i), \\ \nu(x_k) &= g_k x_k^m + \psi_k(x_k)\ (i, k = 1, 2), \end{aligned} \qquad (2)$$

$m \geqslant 2$, а φ_i и ψ_i содержат члены порядка более высокого, чем m относительно x_i или x_k. Постоянные a_{ij} удовлетворяют условиям $a_{11} + a_{22} = 0$, $D = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} > 0$.

В предположении, что решения системы (1) обладают свойством $x_i(t) \to 0$ при $t \to +\infty$ $(i = 1,2)$, устанавливается зависимость быстроты затухания от параметров системы.

В. А. Плисс

9795. Достаточные условия существования предельных циклов. Железнов Е. И., Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1957, № 1, 127—132

Рассматривается система

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f_1(x) + ay, \\ \dot{y} &= bx + f_2(y). \end{aligned} \qquad (1)$$

Устанавливаются достаточные условия существования предельных циклов. В частности, доказывается следующее утверждение.

Если $ab \neq 0$, при всех $x \neq 0$, $y \neq 0$ выполняется соотношение

$$\frac{f_1(x)}{x}\,\frac{f_2(y)}{y} - ab > 0,$$

внутри некоторой окрестности начала координат

$$\frac{f_1(x)}{x} + \frac{f_2(y)}{y} < 0,$$

вне некоторой окрестности начала координат

$$\frac{f_1(x)}{x} + \frac{f_2(y)}{y} > 0,$$

то система (1) имеет предельный цикл.

В. А. Плисс

9796. Аналитические признаки различия типов предельного цикла Л и Ю э - ш э н, Дунбэй женьминь дасюэ цзыжанькэсюэ сюэбао, Acta scient. natur., 1957, № 1, 71—93 (кит.; рез. русск.)

Изучается поведение интегральных краевых в окрестности $U(C)$ замкнутой траектории C системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = X(x, y); \quad \frac{dy}{dt} = Y(x, y).$$

Автор вводит криволинейную систему координат (s, λ), в которой положение точки M определяется числами λ (расстояние от M до точки N встречи с кривой C вдоль траектории, ортогональной к кривым изучаемой системы и проходящей через M) и s (расстояние точки M вдоль кривой C от некоторой начальной точки).

Изучаемая система заменяется уравнением $d\lambda/ds = F(s, \lambda)$, которое используется для исследования функции последования,

Основные результаты: Для суждения об устойчивости предельного цикла C надо по правым частям изучаемой системы составить вспомогательную функцию

$$\Phi(x, y) = \frac{X^2 Y'_y - XY(X'_x + Y'_y) + Y^2 X}{X^2 + Y^2},$$

которая на кривой C обращается в функцию $\sigma(s) = \Phi[x(s); y(s)]$ и вычислить $\int_0^l \sigma(s)\, ds = I$.

Если $I < 0$ $(I > 0)$, то предельный цикл является устойчивым (неустойчивым). Если $I = 0$, но

$$\int_0^l \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \lambda^2} - \varphi'_\lambda \varphi'_n\right]_{\lambda=0} e^{\int_0^s \sigma(s)\, ds}\, ds \neq 0$$

$\left(\text{здесь } \varphi = \operatorname{arc\,tg} \left.\frac{dy}{dx}\right|_M - \operatorname{arc\,tg} \left.\frac{dy}{dx}\right|_N\right)$, то цикл полуустойчивый.

Если $\left.\frac{\partial^i \varphi(s, \lambda)}{\partial \lambda^i}\right|_{\lambda=0} = 0 \; (0 \leqslant s \leqslant l)$ $(i = 1, 2, \ldots, m-1)$ и $\int_0^l \left[\frac{\partial^m \varphi(s, \lambda)}{\partial \lambda^m}\right]_{\lambda=0} ds \neq 0$, то C — m-кратный цикл.

Если предельный цикл C является полуустойчивым и монотонным (т. е. $\lambda(s)$ есть монотонная функция вдоль каждой интегральной кривой), то на нем выполняется соотношение $\Phi(x, y) = 0$. П. Н. Папуш

9797. О новых достаточных условиях устойчивости, полуустойчивости и неустойчивости предельного цикла уравнения $dy/dx = P(x, y)/Q(x, y)$. Ткачев В. Ф., Докл. АН СССР, 1957, 116, № 4, 564—567

Изучается поведение интегральных кривых в окрестности замкнутой кривой L (длины l), данной своими параметрическими уравнениями $x = \varphi(s)$; $y = \psi(s)$ $(0 \leqslant s \leqslant l)$; l — длина дуги, отсчитываемая от некоторой начальной точки. Использована криволинейная система координат (s, n), в которой положение точки M определяется числом n (длина отрезка направленной нормали к кривой L, проходящей через точку M) и s (длина дуги кривой L от начальной точки до основания нормали).

В этой системе координат исследуемое уравнение принимает вид $dn/ds = F(s, n)$, особенно удобный для изучения функции последования.

Основной результат: Составим последовательность чисел $\{I_i\}$, каждое из которых вычисляется с помощью определенного интеграла:

$$I_i = \int_1^l F^{(i)}(s, n) \left[\exp \int_0^l F'_n\, dt\right] ds \Big|_{n=0} \quad (i = 1, 2, \ldots),$$

и обозначим через I_k первое число в этой последовательности, отличное от нуля. Если k — четное, то предельный цикл L полуустойчивый. Если k — нечетное и $I_k < 0$ $(I_k > 0)$, то предельный цикл L устойчивый (неустойчивый).

Указывается, что полученное условие является более общим, чем известный критерий Пуанкаре. При $k = 1$ этот результат был получен Чечиком. (РЖМат, 1956, 398). Рассматриваются частные случаи. П. Н. Папуш

9798. Замечания к статье Уца. Брауэр (Remarks on a paper by Utz. Brauer George), Proc. Amer. Math. Soc., 1958, 9, № 1, 34—36 (англ.)

Обобщаются результаты Уца (РЖМат, 1957, 6362). Рассматривается уравнение

$$x'' + \alpha(x, x') + \beta(x, t) = 0$$

с действительными коэффициентами. Если $\alpha(x, 0) = 0$ и существует постоянная T такая, что $x \cdot \beta(x, y) > 0$ при $y > T$, то решение, сохраняющее знак при больших t, станет монотонным. Если для такого решения

$$\limsup_{y \to \infty} \int_{\alpha_1}^{y} \frac{\alpha[x(t), x'(t)]}{x'(t)}\, dt < \infty,$$

то $x^2(t)$ монотонно возрастает при $t \to \infty$.

Это теорема применяется к уравнению

$$x'' + g(x') + c(t)\, x = 0,$$

где $c(t) > 0$, $c'(t) \geqslant 0$ при $t > T$; $g(0) = 0$, $g'(y) \leqslant 0$: при этих условиях неосциллирующие решения обязаны неограниченно возрастать (по абсолютной величине).

И. М. Соболь

9799. Период предельного цикла нелинейных колебаний. Грошковский (Okres granicznego cyklu drgania nicliniowego. Groszkowski J.), Arch. elektrotechniki, 1955, 4, № 2, 269—278 (польск. рез. русск., англ.)

Приведены две формулы для периода предельного цикла решения уравнения Ван-дер-Поля

$$\ddot{x} - \nu(1 - x^2)\dot{x} + x = 0$$

для всяких значений параметра ν, одна из которых, например, имеет вид

$$\frac{T_1}{T_0} = [1 + a(\nu)\nu^2]^{1/2},$$

где $a(\nu)$ — некоторая функция, учитывающая влияние режима работы системы и определяемая одной из формул

$$a(\nu) = 0{,}066\, \frac{15 + \nu^{4/3}}{8 + \nu^{4/3}}$$

или

$$a(\nu) = 0{,}66\, \frac{60 + \nu^2}{32 + \nu^2}.$$

Обе формулы автора правильны для всяких значений ν $(0 \leqslant \nu < \infty)$ и хорошо согласуются с другими правильными формулами. Как следует из таблицы, сравнивающей результаты, полученные на основании различных формул, несогласие не превышает 1.5—2%. В таблице приведены также результаты (в пределе $2 \leqslant \nu \leqslant 7$), полученные Л. Лукашевичем при употреблении анализатора дифференциальных уравнений. J. Osiowski

9800. О нелинейных преобразователях. Флюгге-Лоц, Вунч (On a nonlinear transfer system. Flügge-Lotz J., Wunch W. S.), J. Appl. Phys., 1955, 26, № 4, 484—488 (англ.)

Рассматривается задача об улучшении переходного процесса в замкнутой системе, описываемой уравнением второго порядка

$$a\ddot{y} + b\dot{y} + cy = \gamma(t),$$

где $y \equiv y(t) - \dot{}$ регулируемая координата, $y(t)$ — заданная возмущающая функция, a — постоянная, b, c — разрывные функции второго рода от рассогласования $\varepsilon = y - y_0$. Физически нелинейные функции b и c осуществляются при помощи релейных устройств. Разобран также более общий случай, в котором b и c зависят также от производной ε. Задача решается методом построений на фазовой плоскости переменных y, $\dot{y}$. М. З. Литвин-Седой

9801. **Свободные колебания системы с одной степенью свободы и нелинейной упругой характеристикой, с учетом линейного вязкого трения. Гутовский** (Free vibration of a system of one degree of freedom with non-linear elastic characteristic, taking into consideration linear viscose damping. Gutowski Roman), Arch. mech. stosowanej, 1957, 9, № 6, 647—668 (англ.; рез. польск., русск.)

Рассматривается уравнение

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \alpha^2\varphi(x) = 0,\ h > 0. \qquad (1)$$

Получены условия осцилляции решений и оценка расстояния между соседними нулями. Предлагается метод приближенного решения.

Примечания референта. Если заметить, что решение $x(t)$ уравнения (1) удовлетворяет линейнсму уравнению

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \alpha^2\frac{\varphi(x(t))}{x(t)}x = 0$$

и воспользоваться обычной теоремой сравнения, то сразу получим: А) Если всех $x \in (-\infty, \infty)$ (включая нуль) $\varphi(x)/x \geqslant \beta + \varepsilon$, где $\beta = (n/\alpha)^2$, то все решения осциллируют.

Б) Если, кроме того, $\varphi(x)/x \leqslant M$, то расстояние между соседними нулями решений $\geqslant \pi/\alpha\sqrt{M - \beta^2}$. Эти предложения перекрывают теоремы реферируемой статьи.

Доказательство теоремы 1 (стр. 651) ошибочно: уравнение $\operatorname{tg} t = a(t)[B + b(t)]^{-1}$ при произвольных непрерывных $a(t)$ и $b(t)$ может не иметь корней. Имеются опечатки. Нет библиографических ссылок. И. М. Соболь

9802. **Разрывная наследственность в динамических системах. Фогель** (Hérédité discontinue dans les systèmes dynamiques. Vogel Théodore), C. r. Acad. sci., 1958, 246, № 9, 1379—1381 (франц.)

В предыдущих заметках (РЖМат, 1958, 5795) автор исследовал динамическую систему с наследственностью

$$\ddot{x} + g(x, \dot{x}) + \int_0^t f(x, \dot{x})\,dt = 0$$

в предположении регулярности функции g и f. В данной работе считается, что функция f испытывает разрыв первого рода в точках некоторой замкнутой линии; автор переходит к пространству x, $\dot{x}$, $\ddot{x}$ и кратко описывает, какие случаи могут при этом представиться (типы траекторий и т. п.). Упоминается также о случае, когда интеграл в заданной системе имеет вид интеграла Стилтьеса с массой, распределенной вдоль некоторой линии в плоскости x, $\dot{x}$; тогда система имеет вид $\ddot{x} + g(x, \dot{x}) = 0$, причем функция g меняется скачком по достижении траекторий указанной линии (такие «бушующие» динамические системы были рассмотрены автором ранее, см. РЖМат, 1953, 1185, 1954, 5121). А. Д. Мышкис

9803. **Нелинейные наследственные динамические системы с полной памятью. Фогель** (Systèmes dynamiques à hérédité non linéaire et à mémoire totale. Vogel Théodore), C. r. Acad. sci, 1958, 246, № 1, 59—61 (франц.)

Рассматривается уравнение

$$\ddot{x} + g(x, \dot{x}) + \int_0^t f(x, \dot{x})\,dt = 0, \qquad (1)$$

где g и f — голоморфные функции своих аргументов. Это уравнение является обобщением уравнения, рассмотренного автором в предыдущей заметке (РЖМат, 1958, 5795). Полагая $\dot{y} = x$, $\dot{z} = -y$, $F(x, y, z) = yg_x + f - zg_y$, автор сводит свое уравнение к системе

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-z} = \frac{dz}{F(x, y, z)} = dt, \qquad (2)$$

особые точки которой задаются соотношениями $y = 0$, $z = 0$, $F(x, 0, 0) = 0$.

Содержание заметки сводится к изучению типов особых точек системы (2). Это изучение дает возможность сделать автору ряд заключений о наличии предельных циклов. Е. А. Барбашин

9804. **Проблемы теории динамических систем. Тшицинский** (Problèmes dans la théorie des systèmes dynamiques. Trjitzinsky W. J.), Acta math., 1956, 95, № 3—4, 191—289 (франц.)

В своей обширной работе (около 100 стр.) автор рассматривает различные приложения топологических принципов Данжуа, изложенных им в книге «Leons sur le calcul de coefficients d'une série trigonométrique» (Part. I, II, III, IV, Paris, 1941—1949).

Первый из этих принципов позволяет утверждать, что некоторые свойства, имеющие место для счетного всюду плотного множества, автоматически оказываются имеющими место на некотором множестве второй категории (дополнение ко множеству первой категории); второй принцип, используемый автором, гласит: если некоторое свойство (например, устойчивость в том или ином смысле) имеет место на некотором совершенном множестве P, то это же свойство имеет место в известном смысле равномерно либо на всем P, либо на всякой порции P, не пересекающейся с некоторым замкнутым не плотным множеством $F \subset P$. Автор переносит на более широкие случаи ряд понятий и теорем, известных из классической теории динамических систем в n-мерных евклидовых пространствах. Сначала он рассматривает обобщение понятия устойчивости по Пуассону. Пусть M — некоторая точка пространства динамической системы и пусть $\lambda \geqslant 0$, рассмотрим замкнутую сферу $S(M, \lambda)$ и на этой сфере некоторое множество $E(M, \lambda)$; скажем, что траектория $C(M)$ устойчива: $(+, E(M, \lambda))$, если всякая точка $N \in E$ будет ω-предельной для точек $C(M)$. Автор рассматривает также случай $\lambda = \infty$. Множество E в этом случае задается на единичной сфере $S(M, 1)$ и его точка N называется, по определению, ω-предельной (в бесконечности), если найдется последовательность t_n такая, что проекции $M_n = f(M, t_n)$ по лучам, направленным в M, имеют N своей ω-предельной точкой. Аналогично можно определить $(-, E(M, \lambda))(+, -, E(M, \lambda))$. Используя принципы Данжуа, получим, например, такую теорему:

Если множество точек устойчивых $(+, E(M, \lambda))$ всюду плотно на совершенном множестве P, то оно автоматически оказывается второй категории на P. Наиболее существенными являются следующие обобщения теории семейств инвариантных множеств. Пусть каждой точке M некоторого инвариантного множества D поставлено в соответствие некоторое замкнутое ограниченное множество $\mathfrak{M} = G(M, 0)$ и пусть это множество содержит саму точку M. Обозначим через $G(M, t) = G(F(M, t), 0)$,

$F(M, t)$ образ точки M при преобразовании t и предположим, что $g(M, 0)$ непрерывно меняется вместе с M. На случай множеств $G(M, t)$ могут быть перенесены понятия устойчивости по Пуассону, возвращаемости областей, понятие блуждающих и не блуждающих точек, а следовательно, следуя плану Г. Биркгофа, и понятие центра и центра притяжения (Хильми). Приведем некоторые теоремы. Скажем, что множество-траектория $C(\mathfrak{M})$ ($\mathfrak{M} = g(M, 0)$) для точки M устойчиво (+) относительно $E(M) \subset G(M, 0)$, если существует последовательность $t_j \to -\infty$ такая, что всякой точке $\theta \in E(M)$ соответствуют точки $N_j \in G(M, t_j), j = 1, 2, \ldots, n$, такие, что $N_j \to Q$, когда $j \to \infty$; в общем случае (t_j) зависит от положения точки Q в $E(M)$. В том случае, когда t_j может быть выбрана независимо от положения Q, мы скажем, что множество-траектория устойчиво (t) вполне. Тогда имеет место теорема: Если множество-траектория $C(\mathfrak{M})$ вполне (+) устойчиво для всех точек M, принадлежащих некоторому всюду плотному множеству, тогда существует множество второй категории, для всех точек которого $C(\mathfrak{M})$ вполне (+) устойчиво. Интересна такая теорема, доказанная для случая $g(M, 0) = M$: Пусть M_n — всюду плотное счетное множество и пусть, по отношению к каждой траектории $C(M_n)$ имеет место односторонняя устойчивость по Ляпунову; тогда существует множество точек M второй категории такое, что $\rho(F(M, t), F(M_\nu, t)) \to 0$ при $\nu \to \infty$ равномерно по отношению к t $(\tau \leqslant t < \infty)$. Устанавливается существование центра притяжения для случая, когда исходная динамическая система компактна, существование внутри центра множества второй категории устойчивых по Пуассону точек и т. п. Все эти теоремы устанавливаются независимо от соответствующих теорем классической теории динамических систем и эти последние могут быть получены из них как частные случаи. Последний параграф работы посвящен некоторым метрическим вопросам. Снова изучаются динамические системы в евклидовом пространстве, однако теперь траектории представляют собой гладкие кривые. В пространстве предполагается заданной мера Лебега. Данжуа высказал следующую гипотезу: Пусть $\Phi(H, \tau) = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau m(H, t)\,dt$, где $m(H, t) = \operatorname{mes} F(H, t)$; предположим, что $\lim_{\tau \to +\infty} \Phi(H, \tau)$ существует для всякого измеримого множества H, тогда по гипотезе Данжуа

$$\Phi(H) = \int_H f(x)\,dx \quad \text{и} \quad \Phi(F(H, t)) = \Phi(H),$$

т. е. $\Phi(H)$ — положительный интегральный инвариант. Автор устанавливает в одном частном случае справедливость гипотезы Данжуа, а также доказывает эргодическую теорему Биркгофа и устанавливает известные свойства сильно транзитивных систем, исходя из предположения, что $\lim \tau \to \infty (H, \tau)$ существует для всякого измеримого множества. В. В. Немыцкий

9805. **Асимптотически автономные системы дифференциальных уравнений. Маркус** (Asymptotically autonomous differential systems. Markus L.), Ann. Math. Studies, 1956, № 36, 17—29 (англ.)

Пусть в некоторой области θ n-мерного евклидова пространства для $t > t_0$ определена система ρ:

$$\dot{x} = f(x, t). \qquad (1)$$

Правые части предполагаются непрерывными и удовлетворяющими локальному условию Липшица. Система (1) называется асимптотически автономной, если существует такая автономная система ρ_∞: $\dot{x} = f(t)$, что для каждого компактного подмножества $K \cap \theta$ и числа $\varepsilon > 0$ можно найти такие $T = T(K, \varepsilon) > t_0$, что $|f_i(x\,t) - f_i(x)| < \varepsilon$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$, всех $x \in K$ и всех $t > T$. Сначала изучается связь между некоторыми свойствами семейства решений ρ_∞ и ρ. Например:

Теорема 2. Пусть P — особая точка ρ_∞ и пусть уравнение в вариациях для $f(x)$ в этой точке имеет характеристические числа с отрицательными вещественными частями. Тогда существует такая окрестность N точки P и такое T, что точка P является единственной ω-предельной точкой для всех решений ρ, начинающихся в окрестности N для $t_0 \geqslant T$.

Некоторая траектория системы $\rho: S(t)$ называется рекурсивной (recursive) в точке P, если для каждой окрестности точки P существует постоянная T такая, что $S(t)$ возвращается в эту окрестность по крайней мере один раз за каждый промежуток времени $t_1 \leqslant t \leqslant t_1 + T$, если только t_1 достаточно велико.

Теорема 5. Пусть решение системы ρ: $S(t)$, выходящее из точки P, рекурсивно и пусть $\rho \to \rho_\infty$, тогда и решение ρ_∞, выходящее из этой точки, рекурсивно (конечно, если только оно определено для всех $t \geqslant t_0$). В частности, следствие теоремы справедливо, если $S(t)$ почти периодическое решение.

Во второй части работы рассматривается уравнение

$$\ddot{x} - \mu(t) f(x) \dot{x} + g(x) = 0,$$

$\lim_{t \to \infty} \mu(t) = \mu_\infty > 0$. При ряде ограничений на $f(x)$ и $g(x)$ устанавливается, что расположения решений неавтономной системы асимптотически повторяют расположение интегральных кривых предельной автономной системы

$$\ddot{x} - \mu_\infty f(x)\dot{x} + g(x) = 0.$$

В. В. Немыцкий

9806. **О гладком сечении дисперсивной динамической системы. Красовский Н. Н.**, Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1957, № 1, 167—173

Рассматривается дисперсивная динамическая система в n-мерном евклидовом пространстве, определяемая автономной системой дифференциальных уравнений в нормальной форме. Правые части этой системы удовлетворяют в каждой ограниченной области условию Липшица. Относительно упомянутой выше динамической системы доказывается теорема: «Дисперсивная динамическая система при наличии условия Липшица обладает сколь угодно гладким сечением».

Приводится лемма, имеющая самостоятельное значение: Для любого $\gamma > 0$ существует функция $V(x_1, \ldots, x_n)$, непрерывная в G вместе со всеми частными производными и удовлетворяющая условиям:

$$V(x) = 0 \text{ при } \|x - x(x_0, t)\| > \gamma \qquad (0 \leqslant t \leqslant T) \qquad (1)$$

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{dV}{dx_i} X_i > 0$$

при

$$\|x - x(x_0, t)\| < \alpha\ (0 \leqslant t \leqslant T) \text{ и } x \notin U[x(x_0, T), \gamma], \qquad (2)$$

$$\alpha = \alpha(x_0) = \text{const}, \quad \alpha > 0,$$

$$dV/dt \geqslant 0 \text{ при } x \in \{G \setminus U[x(x_0, T), \gamma]\} \qquad (3)$$

(символ dV/dt означает в (2) и (3) полную производную по времени $dV[x(x_0, t)]/dt$ вдоль траектории $x(x_0, t)$).

В. И. Зубов

9807. **Применение мажорирующих групп преобразований к обыкновенным дифференциальным уравнениям с периодическими коэффициентами. Ураба**

(Application of majorized group of transformations to ordinary differential equations with periodic coefficients. Urabe Minoru), J. Sci. Hiroshima Univ., 1956, **A19**, № 3, 469—478 (англ.)

Продолжение предыдущей статьи автора (J. Sci. Hiroshima Univ., 1952, **A16**, 267—283). Доказывается следующая теорема:

Пусть дана система уравнений

$$\dot{x}_i = X_i(x, t),\ i = 1, \ldots, n, \qquad (1)$$

где $X_i(x, t)$ суть аналитические функции $x_1, \ldots, x_n$ в окрестности нуля, непрерывные и периодические функции t с периодом ω. При этом $X(0, t) = 0$. Тогда существует аналитическое преобразование с периодическими коэффициентами

$$y_i = f_i(x, t) = x_i + \sum_{k_1+\ldots+k_n \geqslant 2} p^{(k_1,\ldots,k_n)} x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n}, \qquad (2)$$

которое приводит систему (1) к виду

$$\dot{y}_i = \lambda_i y_i, \qquad (3)$$

если удовлетворяется какое-либо из условий:

1) решение $\varphi_i(x, t)$ уравнений (1) такое, что $\varphi_i(x, 0) = x_i$, мажорируется по отношению к x_j, т. е. существуют аналитические функции $\varphi_i(x)$ такие, что $\varphi_i(x, t) \ll \varphi_i(x)$;

2) произведения $\lambda_i\omega$ характеристических показателей на период ω все представляют собой целые кратности $2\pi i$ и существует формальное преобразование вида (2), приводящее систему (1) к виду (3).

Эта теорема была доказана в работе Сибуя (РЖМат, 1955, 3742). Автор применяет другой метод доказательства, основанный на применении мажорирующих групп преобразований. В заключение приводится конкретный пример системы вида (1) и преобразования вида (2). Ю. А. Рябов

9808. О поверхностях, заполненных асимптотическими интегралами системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Олех (On surfaces filled up by asymptotic integrals of a system of ordinary differential equations. Olech C.), Bull. Acad. polon. sci., 1957, Cl. 3, 5, № 10, 935—941, LXXIX (англ., рез. русск.)

Пусть в n-мерном комплексном пространстве E задана линейная система

$$dy/dt = Ay$$

(A — постоянная матрица; $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ — различные ее собственные значения; μ — одно из λ_i). Пространство E разлагается на прямую сумму трех инвариантных относительно оператора A подпространств $E = E' + E'' + E'''$. Эти подпространства суть множества точек, через которые проходят решения вида

$$\sum_{\mathrm{Re}\lambda_i < \mathrm{Re}\mu} e^{\lambda_i t} w_i(t), \quad \sum_{\mathrm{Re}\lambda_i = \mathrm{Re}\mu} e^{\lambda_i t} w_i(t) \text{ или}$$

$$\sum_{\mathrm{Re}\lambda_i > \mathrm{Re}\mu} e^{\lambda_i t} w_i(t)$$

($w_i(t)$ — многочлены). Далее множество E'' представляется в виде суммы $E_1 + E_2 + \ldots + E_\beta$ — по степеням соответствующих многочленов $w_i(t)$ (степени равны $0, 1, \ldots, \beta - 1$; очевидно, β — размерность максимального ящика с $\mathrm{Re}\,\lambda_i = \mathrm{Re}\,\mu$ в нормальной жордановой форме A). Любой вектор x может быть представлен в виде суммы

$$x = x' + x'' + x''' = x' + x_1 + x_2 + \ldots + x_\beta + x'''.$$

Для характеристики асимптотического поведения x вводится функция

$$\chi_t(x) = \|x'\| + \|x_1\|/t^{\beta-1} + \|x_2\|/t^{\beta-2} + \ldots + \|\|_\beta\| + \|x'''\|.$$

В работе доказана весьма общая теорема сравнения, гарантирующая для системы

$$dx/dt = Ax + F(t, x) + \varphi(t, x') + \psi(t, x''')$$

существование решений $x(t)$ таких, что

$$\chi_t(x(t) - y(t)) = o(e^{\mathrm{Re}\mu t} t^{s-\beta}), \qquad (1)$$

если $y(0) \in E_s$ ($s = 1, 2, \ldots, \beta$). Не приводя полностью условий этой теоремы, отметим основное: $\chi_t(F(t, x)) \leqslant g(t)\chi_t(x)$, где $\int_0^\infty g(t)\,dt < \infty$. Добавки φ и ψ принимают значения только из множеств E' и E'' соответственно.

При некоторых дополнительных ограничениях исследуется структура множества решений, удовлетворяющих условию (1). И. М. Соболь

9809. Об устойчивости в целом невозмущенного движения для уравнений непрямого автоматического регулирования. Якубович В. А., Вестн. Ленингр. ун-та, 1957, № 19, 172—176 (рез. англ.)

Рассматривается система дифференциальных уравнений непрямого регулирования

$$dx/dt = Ax + a\varphi(\sigma),\ d\sigma/dt = (b, x) - \rho\varphi(\sigma), \qquad (1)$$

x, a, b — векторы, A — матрицы порядка n, σ, ρ, φ—скаляры, A, a, b, ρ постоянны. Относительно φ предполагается, что она непрерывна и $\varphi(0) = 0$, $\sigma\varphi(\sigma) > 0$. Доказывается следующее утверждение:

Предположим, что $\mathrm{Det}\,A \neq 0$. Если для системы (1) может быть найдена функция Ляпунова вида $v = -(Hx, x) - \int_0^\sigma \varphi(\sigma)\,d\sigma$, где $(Hx, x) \geqslant 0$, производная от которой, вычисленная в силу системы (1), имеет вид $\dot{v} = (Gx, x) + [(g, x) + \sqrt{\rho}\varphi(\sigma)]^2$, где $(Gx, x) > 0$ при $x \neq 0$, то тривиальное решение системы (1) устойчиво в целом. В. А. Плисс

Часть I см. РЖМат, 1957, 403.

9810. О кусочно-линейных дифференциальных уравнениях, встречающихся в теории регулирования. II. Андре, Зейберт (Über stückweise lineare Differentialgleichungen, die bei Regelungsproblemen auftreten. II. André Johannes, Seibert Peter), Arch. Math., 1956, **7**, № 3, 157—164 (нем.)

Пространство $(z_1, \ldots, z_n)$ разбито гиперплоскостью S: $\Sigma s_i z_i = 0$ (в векторной записи $\mathbf{s}\cdot\mathbf{z} = 0$) на области $G^+(\mathbf{s}\cdot\mathbf{z} > 0)$ и $G^-(\mathbf{s}\cdot\mathbf{z} < 0)$. Рассматривается кусочно-линейная система дифференциальных уравнений в векторной записи

$$\dot{\mathbf{z}} = D\mathbf{z} + \mathbf{r}\,\mathrm{sgn}\,\mathbf{s}\cdot\mathbf{z} \qquad (1)$$

матрица D и векторы $\mathbf{r}$ и $\mathbf{s}$ — постоянные. Пусть S_0 — кусок гиперплоскости S, на который входят решения уравнения (1) из областей G^+ и G^-, т. е. на котором $\mathbf{s}(D\mathbf{z} + \mathbf{r}) < 0$, $\mathbf{s}(D\mathbf{z} - \mathbf{r}) > 0$ при $\mathbf{z} \in S_0$. Показано, что при $\tau \to 0$ решение уравнения с запаздыванием

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = D\mathbf{z}(t) + \mathbf{r}\,\mathrm{sgn}\,\mathbf{s}\cdot\mathbf{z}(t - \tau) \qquad (2)$$

с начальным условием $\mathbf{z}(t_0) = \mathbf{z}_0 \in S_0$ стремится к решению уравнения

$$\dot{\mathbf{z}} = PD\mathbf{z} \qquad (3)$$

с тем же начальным условием; сходимость равномерна на любом конечном отрезке времени, на котором решение уравнения (3) принадлежит S_0; $PD\,\mathbf{z}$ — проекция вектора $D\,\mathbf{z}$ на плоскость S в направлении вектора $\mathbf{r}$ (а не ортогональная проекция).

Уравнение (2) описывает релейное регулирование с запаздыванием переключения: переход от движения по закону $\mathbf{z} = D\,\mathbf{z} - \mathbf{r}$ к движению по закону $\dot{\mathbf{z}} = D\,\mathbf{z} + \mathbf{r}$ и обратно совершается не в момент пересечения плоскости S, а спустя заданное время τ.

Показано, что тот же самый результат (сходимость к решению уравнения (3)) получается и в том случае, когда переключение происходит после пересечения плоскости S не через заданное время τ, а при удалении от S на заданное расстояние δ, где $\delta \to 0$.

Таким образом, решение $\mathbf{z}(t)$ задачи автоматического регулирования состоит из кусков кривых, проходящих в областях G^+ и G^- и удовлетворяющих уравнению (1), и из кусков, лежащих на поверхности S и удовлетворяющих уравнению (3). А. Ф. Филиппов

9811. Об устойчивости систем прерывистого регулирования с двумя импульсными элементами. Троицкий В. А., Тр. Ленингр. политехн. ин-та, 1958, № 192, 220—234

Математически задача сводится к анализу уравнений

$$\dot{x} = bx + h_1 f_1(\sigma_1) + h_2 f_2(\sigma_2),$$
$$\sigma_1 = j_1 x; \quad \sigma_2 = j_2 x;$$

b — квадратная матрица порядка n; h_1, h_2 и a_1, a_2 — матрицы и строки постоянных; x — столбец переменных; $f_1(\sigma_1)$ и $f_2(\sigma_2)$ — характеристики импульсных элементов, графики которых представляются чередующимися по времени прямоугольными импульсами и паузами. Период чередования постоянный. В функциях $f(\sigma)$ высота или ширина импульса пропорциональна значению σ в конце предыдущего периода.

В статье дается метод построения уравнений в конечных разностях, устанавливающих связь между переменными x в начале и конце произвольного периода. Решение этих уравнений определяет состояние системы в дискретные, отстоящие друг от друга на величину периода моменты времени.

Устойчивость исследуется по корням характеристического полинома конечно-разностных уравнений.

Решение проводится методами матричного исчисления с приведением линейной части исходных уравнений к канонической форме, что не только упрощает исследование задачи, но и позволяет составить конкретную рецептуру ее решения. Отмечается влияние на устойчивость временно́го сдвига между последовательными включениями первого и второго импульсных элементов. В конце рассмотрен конкретный пример. Статья представляет практический интерес для расчета системы прерывистого регулирования. П. В. Бромберг

9812. Об устойчивости нелинейных регулируемых систем, описываемых дифференциальными уравнениями пятого и шестого порядка. Розенвассер Е. Н., Автоматика и телемеханика, 1958, **19**, № 2, 101—113 (рез. англ.)

Рассматривается система дифференциальных уравнений «прямого автоматического регулирования»

$$\begin{cases} \dot{\eta}_k = \sum_{\alpha=1}^{n} b_{k\alpha}\eta_\alpha + h_k f(\sigma) \quad (k = 1, \ldots, n), \\ \sigma = \sum_{\alpha=1}^{n} j_\alpha \eta_\alpha, \end{cases} \tag{1}$$

где коэффициенты вещественны, непрерывная и вещественная функция $f(\sigma)$ удовлетворяет условиям $f(0)=0$, $\sigma f(\sigma) > 0$ при $\sigma \neq 0$.

Характеристическое уравнение линеаризованной системы $f(\sigma) = \mu\sigma$ представимо в виде

$$\Delta(\mu) \equiv D(\mu) - cM(\mu) = 0,$$

где $D(\mu) = \det \| b_{k\alpha} - \mu\delta_{k\alpha} \|_{k\alpha=1}^{n}$ и степень полинома $M(\mu)$ в общем случае равна $n-1$. Рассмотрен общий случай для $n=5$ и для $n=6$ случай, когда степень полинома $M(\mu)$ равна трем.

В книге А. И. Лурье «Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования» (Гостехиздат, 1951 г.) задача получения достаточных условий устойчивости в целом системы (1) сведена к получению условий существования вещественного решения некоторой системы алгебраических квадратных уравнений. Для рассматриваемого случая автор сводит эту последнюю систему к системе

$$x^2 - z = A, \; y^2 - z = B, \; z^2 - xy = C,$$

где A, B, C определяются некоторым образам по коэффициентам многочленов $D(\mu)$ и $M(\mu)$.

Получены условия существования вещественного решения системы (1) в виде простых неравенств, связывающих коэффициенты A, B, C. Эти неравенства и являются достаточными условиями устойчивости в целом системы (1). В. А. Якубович

9813. Об одном классе нелинейных дифференциальных уравнений. Якубович В. А., Докл. АН СССР, 1957, **117**, № 1, 44—46

Рассматривается система непрямого регулирования

$$dx/dt = Ax + a\varphi(\sigma), \; d\sigma/dt = (b, x) - \rho\varphi(\sigma), \tag{1}$$

x, a, b — векторы, A — матрица порядка n, σ, ρ, φ—скаляры, A, a, b, ρ — постоянны. Относительно φ предполагается, что она непрерывна и $\varphi(0) = 0$, $\sigma\varphi(\sigma) > 0$. Предполагается, что все корни уравнения $\det(A - \lambda E) = 0$ имеют отрицательные действительные части.

Даются условия, при которых для системы (1) можно указать функцию Ляпунова вида $v = (Hx, x) + \int_0^\sigma \varphi(\sigma)\,d\sigma$, где $(Hx, x) \geqslant 0$.

Отмечается, что в случае, когда $n=2$, а матрица A имеет диагональную каноническую структуру, условия эти совпадают с условиями, выведенными А. И. Лурье (Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования, 1951). В. А. Плисс

9814. Об устойчивости движения по отношению к части переменных. Румянцев В. В., Вестн. Моск. ун-та. Сер. матем. механ., астрон., физ., химии, 1957, № 4, 9—16

Рассматриваются дифференциальные уравнения вида

$$\dot{x}_s = X_s(x_1, \ldots, x_n, t) \quad (s = 1, \ldots, n),$$

определенные в области $t \geqslant t_0$ $\sum_{r=1}^{m} x_r^2 < H$, $x_{m+1}, \ldots, x_n$ — произвольны, где $m < n$ и H — постоянная, больше нуля. Предполагается, что в окрестности тривиального решения $x_1, \ldots, x_n$ функции X_s разлагаются в сходящиеся, целые, степенные ряды по переменным $x_1 \ldots, x_n$ с вещественными, ограниченными, непрерывными по t коэффициентами. При этих условиях излагается постановка Ляпунова задачи об устойчивости тривиального решения лишь в отношении части переменных $x_1, \ldots, x_m$ $(m < n)$, вводится понятие функций $V(t x_1, \ldots, x_n)$, знакоопределенных по отношению к этой части, и доказывается, что теоремы об устойчивости прямого метода Ляпунова сохраняют свою силу, если при решении данной задачи в этих

теоремах использовать введенные здесь функции V и их первые производные, также определенные по отношению к части переменных $x_1, \ldots, x_m$.

Приводятся примеры применения доказанных теорем к некоторым задачам механики твердого тела и аналитической механики. А. М. Летов

9815. **Строение группы симплектических матриц и структура множества неустойчивых канонических систем с периодическими коэффициентами. Якубович В. А.**, Матем. сб., 1958, 44, № 3, 313—352

В связи с вопросами устойчивости канонической системы 2κ уравнений с периодическими коэффициентами

$$dy/dt = IH(t)\,y \quad (H(t+1) = H(t)) \qquad (1)$$

автор исследует строение группы вещественных симплектических матриц G. При этом основное внимание уделяется структуре областей в G, отвечающих каноническим системам вида (1), которые обладают неограниченными решениями (неустойчивые системы). По аналогии с понятием сильно устойчивой системы автор вводит понятие сильно неустойчивой системы. Сильно неустойчивой называется такая неустойчивая система, что все близкие к ней системы также неустойчивы. Выясняется, что при $\kappa > 1$ (четыре уравнения и более) множество всех сильно неустойчивых систем связно, т. е. любые две сильно неустойчивые системы можно непрерывно деформировать одну в другую, оставаясь в области сильно неустойчивых систем. Автор удаляет из множества всех сильно неустойчивых систем те из них, которые обладают кратными мультипликаторами разного рода на единичной окружности, и доказывает, что получающееся в результате множество распадается на счетное число связных компонент. При этом каждая компонента характеризуется одним из $2(2^k-1)$ типов расположения мультипликаторов и, кроме того, одним целым числом. Для некоторых из указанных компонент оказывается справедливой теорема о монотонной зависимости матриц коэффициентов соответствующих систем, установленная ранее автором для случая $\kappa = 1$.

В работе также рассматривается структура областей в G, соответствующих таким каноническим системам, у которых все решения удовлетворяют неравенству $\|y(t)\| \leqslant e^{\alpha t}$.

Для доказательства изложенных фактов автор устанавливает ряд предложений общего характера. Доказывается, например, что приращение аргумента симплектической матрицы вдоль замкнутой кривой (см. работу И. М. Гельфанда и реферата РЖМат, 1956, 2190) равно сумме приращений аргументов мультипликаторов 1-го рода. Устанавливается далее, что множество симплектических матриц, спектры которых с учетом рода совпадают, связно. Имеется и ряд других результатов. В. Б. Лидский

9816. **Распространение некоторых результатов Ляпунова на линейные канонические системы с периодическими коэффициентами. Якубович В. А.**, Прикл. матем. и механ., 1957, 21, № 4, 491—502

Рассматривается каноническая система 2κ уравнений

$$dy/dt = IH(t)\,y \qquad (1)$$

с периодической матрицей коэффициентов $H(t)$. Частным случаем системы (1) является система второго порядка

$$\frac{d^2y}{dt^2} + P(t)\,y = 0,\ P^*(t) = P(t). \qquad (2)$$

Из множества всех симметрических периодических матриц $H(t)$ автор удаляет те из них, которым соответствуют мультипликаторы, равные ± 1. Остающиеся матрицы разбиваются на четыре подмножества $\{i, j\}$, $i, j = 0,1$, по следующему правилу: индекс $i = 0$, если число пар мультипликаторов, расположенных на отрицательной полуоси, четно; $i = 1$, если число пар нечетно. Аналогично $j = 0$ и $j = 1$ в зависимости от четности числа пар на положительной полуоси.

Доказывается, что в случае канонических систем специального класса, содержащего, в частности, системы (2), можно в конечное число шагов определить, к какому из подмножеств $\{i, j\}$, принадлежит данная система. Эти результаты могут быть использованы при определении условий неустойчивости (все подмножества $\{i, j\}$, за исключением $\{0,0\}$, неустойчивы), а также для установления некоторых признаков устойчивости. В частности, для положительно определенной матрицы $P(t)$ (см. систему (2)) удается указать необходимое и достаточное условие принадлежности к центральной области устойчивости. Последнее формулируется также в терминах конечного числа шагов. Работа обобщает на случай систем некоторые результаты А. М. Ляпунова, содержащиеся в мемуаре 1902 г. В. Б. Лидский

9817. **О периодических решениях дифференциальных уравнений. Хэ Цзянь-сюнь**, Сямэнь дасюэ сюэбао (цзыжань кэсюэбань), Acta scient. natur. Univ. amoiensis, 1957, № 2, 33—41 (кит.; рез. русск.)

Рассматривается система

$$\dot{x}_i = X_i(x_1, \ldots, x_n, t)\ (i = 1, \ldots, n),$$

где X_i — непрерывные функции своих аргументов, периодические по t с периодом ω. Ставится вопрос о существовании периодического решения этой системы, период которого ω_1 несоизмерим с ω. Показывается, что для существования таких периодических решений необходимо и достаточно, чтобы автономная система

$$\dot{x}_i^0 = X_i(x_1, \ldots, x_n, 0)\ (i = 1, \ldots, n)$$

имела периодическое решение $x_i^0(t)$ с периодом ω_1 и это решение обращало бы в нуль разности

$$X_i(x_1^0, \ldots, x_n^0, t) - X_i(x_1^0, \ldots, x_n^0, 0).$$

Кроме того, выводятся некоторые достаточные критерии существования таких периодических решений и приводятся в качестве иллюстрации ряд примеров, где эти решения существуют и не существуют. Ю. А. Рябов

9818. **О некоторых нелинейных почти-периодических дифференциальных уравнениях. Шеффер** (Sobre ecuaciones diferenciales nolineales casi-periódicas. Schäffer Juan Jorge), Publs. Inst. mat. y estadist. Fac. ingr. y agrimens., 1957, 3, № 2, 17—52 (исп.; рез. англ.)

Работа содержит математические результаты диссертации автора (Schäffer J. J., Contributions to the theory of electrical circuits with non-linear elements. Van Gorcum & Co., Assen, 1956, Thesis, ETH Zurich).

В основном рассматривается уравнение

$$\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{p}(t)) = 0, \qquad (1)$$

где $\mathbf{x}$, $\mathbf{g}$, $\mathbf{f}$, $\mathbf{p}$ — векторы. Предполагается, что: A) $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ — непрерывна и дифференцируема, причем $\mathbf{f}'(\mathbf{x})$ непрерывна, симметрична, положительна и всюду локально удовлетворяет условию Липшица; B) $\lim_{\|\mathbf{x}\|\to\infty} \|\mathbf{f}(\mathbf{x})\| = \infty$; C) $\mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ — непрерывна и дифференцируема по $\mathbf{u}$, причем $\mathbf{g}'_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ непрерывна и везде положительна; D) для каждых вектора $\mathbf{v}$ и единичного

вектора e имеет место соотношение:

$$\lim_{r\to+\infty} \mathbf{e}^* \cdot \mathbf{g}(r\mathbf{e}, \mathbf{v}) = +\infty$$

(звезда обозначает транспонирование).

Основная теорема: Если выполнены условия A), B), C), D) (отмечается, что некоторые из этих условий могут быть заменены более слабыми) и вектор $\mathbf{p}(t)$ почти периодический с достаточно малой нормой, то все решения уравнения (1) экспоненциально стремятся к его единственному почти периодическому решению. Аналогичный результат получается, если вектор $\mathbf{p}(t)$ асимптотический почти периодический в смысле Фреше (Fréchet). При доказательстве используется метод Рейтера (Reuter G. E. H., J. London Math. Soc., 1951, 26, 215—221). Как приложение дается обобщение некоторых результатов Америо (РЖМат, 1957, 3109) на систему вида

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{N}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{h}(\mathbf{x}) + \mathbf{p}(t) = 0$$

Библ. 12 назв. Б. П. Демидович

9819. Об автоколебаниях в регулируемых системах с несколькими регулирующими органами. Троицкий В. А., Тр. Ленингр. политехн. ин-та, 1958, № 192, 201—219

Исследуется задача о разыскании периодического решения квазилинейной системы дифференциальных уравнений методом малого параметра Пуанкаре. Рассматриваемая система уравнений записывается в виде

$$\dot{x}_k = \sum_{\alpha=1}^{n} b_{k\alpha}x_\alpha + \mu\sum_{\beta=1}^{m} h_{\beta k}\varphi_\beta(\sigma_\beta, \dot{\sigma}_\beta), \quad k = 1, \ldots, n, \tag{1}$$

$$\sigma_\beta = \sum_{\alpha=1}^{n} j_{\beta\alpha}x_\alpha, \quad \beta = 1, \ldots, m,$$

где $b_{k\alpha}$, $h_{\beta k}$, $j_{\beta\alpha}$ — постоянные коэффициенты, μ — малый параметр, φ_β — функции σ_β и $\dot{\sigma}_\beta$. В предположении, что характеристическое уравнение системы, получающейся из (1) при $\mu = 0$, имеет одну пару чисто мнимых корней $\pm i\tilde{\omega}$, а остальные корни все различные и не равны нулю или целой кратности $\pm i\tilde{\omega}$, система (1) приводится к виду

$$\dot{z}_\rho = \lambda_\rho z_\rho + \mu\sum_{s=1}^{m} a_{s\rho}\varphi_s(\sigma_s, \dot{\sigma}_s), \quad \rho = 1, \ldots, n-2,$$

$$\dot{x} = -\tilde{\omega}y + \mu\sum_{s=1}^{m} \alpha_s\varphi_s(\sigma_s, \dot{\sigma}_s),$$

$$\dot{y} = \tilde{\omega}x + \mu\sum_{s=1}^{m} \beta_s\varphi_s(\sigma_s, \dot{\sigma}_s), \tag{2}$$

$$\sigma_s = A_s x + B_s y + \sum_{\rho=1}^{n-2} \gamma_{s\rho}z_\rho \quad (s = 1, \ldots, m).$$

Периодическое решение «порождающей» системы (получающейся из (2) при $\mu = 0$) записывается в виде

$$x = P\cos\tilde{\omega}t, \quad y = P\sin\tilde{\omega}t, z_\rho = 0, \quad \rho = 1, \ldots, n-2,$$

где P — произвольный коэффициент («порождающая» амплитуда).

Вместо независимой переменной t в уравнение (2) вводится переменная τ:

$$\tau = \frac{\tilde{\omega}t}{1 + k_1\mu + k_2\mu^2 + \ldots},$$

где коэффициенты k_1, k_2 определяются впоследствии, и ищется периодическое решение этой системы в виде рядов, расположенных по целым положительным степеням μ:

$$\begin{aligned} z_\rho &= \mu z_{\rho 1}(\tau) + \mu^2 z_{\rho 2}(\tau) + \ldots \quad (\rho = 1, \ldots, n-2), \\ x(\tau) &= P\cos\tau + \mu x_1(\tau) + \mu^2 x_2(\tau) + \ldots, \\ y(\tau) &= P\sin\tau + \mu y_1(\tau) + \mu^2 y_2(\tau) + \ldots \end{aligned} \tag{3}$$

Составляются уравнения первого и второго приближения, т. е. уравнения относительно $z_{\rho 1}$, x_1, y_1, $z_{\rho 2}$, x_2, y_2. Уравнения первого приближения решаются полностью. Из условий периодичности для x_1, y_1 находится порождающая амплитуда P и коэффициент k_1 — первая поправка на частоту. Из условий существования периодического решения для уравнений второго приближения находится вторая поправка на частоту k_2. Далее находятся достаточные условия устойчивости полученного периодического решения. В заключение рассматривается в качестве иллюстрации пример системы, к которой применяются выведенные формулы. Ю. А. Рябов

9820. Фундаментальная система действительных решений для линейных дифференциальных систем с периодическими коэффициентами. Гамбилл (A fundamental system of real solutions for linear differential systems with periodic coefficients. Gambill Robert A.), Riv. mat. Univ. Parma, 1956, 7, № 3—5, 311—319 (англ.)

В системе

$$\ddot{y}_j + \sigma_j^2 y_j + \lambda\sum_{h=1}^{n} \varphi_{jh}(t)\, y_h = 0, \quad j = 1 \ldots, n, \tag{1}$$

$\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ — различные положительные числа, λ — «малый» действительный параметр, $\varphi_{jh}(t)$ — действительные периодические функции периода $T = 2\pi/\omega$, ряды Фурье которых

$$\varphi_{jh}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \{a_{jhk}\cos k\omega t + b_{jhk}\sin k\omega t) \tag{2}$$

абсолютно сходятся. Рассматривается «нерезонансный» случай $m\omega \neq \sigma_j \pm \sigma_h, j, h = 1, 2, \ldots, n, m = 1, 2, \ldots$ Кроме того, выполнено одно из следующих условий: (α) $\varphi_{jh}(t) = \varphi_{hj}(t)$, ($\beta$) $\varphi_{jh}(t) = \varphi_{jh}(-t)$, ($\gamma$) матрица $\Phi(t) = \|\varphi_{jh}(t)\|$ представима в виде $\Phi(t) = \Phi_0(t) + \Psi(t)$, где $\Phi_0(t) = \mathrm{diag}(\Phi_1, \ldots, \Phi_k)$ — прямая сумма матриц $\Phi_1, \ldots, \Phi_k$, каждая из которых удовлетворяет условиям (α) или (β), матрица Ψ имеет элементы, отличные от нуля лишь выше (или ниже) матричной диагонали $\Phi_1, \ldots, \Phi_k$.

Со ссылками на результаты Чезари (Cesari L., Atti Accad. Italia, Mem. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1940, 11, 633—692) и автора (РЖМат, 1955, 5785) получены следующие выражения для характеристических показателей $i\tau_j$ системы (1):

$$\tau_j = \sigma_j + \frac{\lambda^2}{8\sigma_j}\sum_{p=1}^{\infty} (a_{jpk}a_{pjk} + b_{jpk}b_{pjk})\times \tag{3}$$

$$\times\left\{\frac{1}{(k\omega + \sigma_j)^2 - \sigma_p^2} + \frac{1}{(k\omega - \sigma_j)^2 - \sigma_p^2}\right\} + O(\lambda^3).$$

Для действительной фундаментальной системы решений y_{jh} получены ряды вида

$$y_{jh} = y_{jh}^{(0)} + \lambda y_{jh}^{(1)} + \lambda^2 y_{jh}^{(2)} + \ldots, \tag{4}$$

где $y_{jh}^{(k)}$ — тригонометрические полиномы с аргументами $\{(m\omega + \tau_h)t\}$ (m — целое число), коэффициенты которых выражаются через коэффициенты рядов (2) и числа τ_j.

Ряды (3), (4) сходятся при достаточно малых $|\lambda|$. Приведены примеры. В. А. Якубович

9821. Один признак существования определенных классов решений нелинейного дифференциального уравнения и некоторые оценки в методе малого пара-

6*

метра. **Гельман А. Е.**, Докл. АН СССР, 1958, 118, № 6, 1063—1065

Рассматривается вопрос об оценке области изменения параметра, в которой существует или же разлагается в ряд по этому параметру решение (периодическое, квази- и почти периодическое) нелинейного дифференциального уравнения. Основные результаты содержатся в следующих лемме и теореме:

Лемма. Пусть

$$L(y) = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y,$$

где a_i — постоянные и абсолютные значения вещественных частей корней характеристического полинома оператора суть $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, причем $\alpha_i \neq 0$. Пусть $\psi(t)$ — ограниченная измеримая функция, заданная на $(-\infty; \infty)$, и $\sup|\psi(t)| = \bar{\psi}$. Тогда существует единственное, ограниченное на $(-\infty, \infty)$ решение уравнения $L(y) = \psi(t)$, причем для этого решения и его производных имеют место оценки

$$|y^{(i)}| \leqslant \beta_i \bar{\psi} \quad (0 \leqslant i \leqslant n),$$

где

$$\beta_i = u_i \frac{\alpha_1^i + \alpha_2^i + \ldots + \alpha_n^i}{n\alpha_1, \ldots, \alpha_n}, \quad u_0 = 1, \; u_1 = 2, \; u_2 = 6, \ldots$$

и, вообще, $u_i = C_i^1 u_1 + C_i^2 u_2 + \ldots + C_i^{i-1} u_{i-1} + 1$.

При этом, если $\psi(t)$ — периодическая, квази- или почти периодическая функция, то и это ограниченное решение также принадлежит к тем же классам функций.

Теорема. Дано уравнение

$$L(y) = \psi(\lambda, t) + F(t, \lambda, y, y', \ldots, y^n), \qquad (1)$$

где $\psi(\lambda, t)$ — аналитическая относительно параметра λ в окрестности $\lambda = 0$ функция, $F(t, \lambda, x_0, \ldots, x_n)$ — аналитическая в окрестности нуля функция относительно $\lambda, x_0, \ldots, x_n$, причем коэффициенты рядов для ψ и F суть ограниченные, измеримые на промежутке $(-\infty, \infty)$ функции t и $F(t, \lambda, 0, \ldots, 0) = 0$. Пусть $\bar{\psi}(\lambda)$ и $\varphi(\lambda, x)$ суть мажоранты для $\psi(\lambda, t)$ и $F(t, \lambda, y, \ldots, y^{(n)})$, получаемые из рядов для ψ и F заменой всех коэффициентов точной верхней границей их модулей, а $y^{(i)}$ — на $\beta_i x$, R — радиус. Пусть уравнение

$$\Phi'_x(0, x) + \frac{\bar{\psi}(0)}{x} = 1$$

имеет некратный положительный корень x^0, причем $x^0 \neq R$. Тогда существует Λ такое, что при $|\lambda| < \Lambda$ существует решение уравнения (1), обладающее свойствами, указанными в лемме, и аналитическое относительно λ. При этом можно считать, что $\Lambda = \sup_{0<x<R} \lambda$, где λ удовлетворяет уравнению

$$\Phi'_x(\lambda, x) + \frac{\bar{\psi}(\lambda)}{x} = 1. \qquad (2)$$

Если, далее,

$$x(\lambda) = x_0 + \lambda x_1 + \lambda^2 x_2 + \ldots$$

есть разложение в ряд по степеням λ меньшего положительного корня уравнения (2) и

$$y(\lambda, t) = y_0(t) + \lambda y_1(t) + \lambda^2 y_2(t) + \ldots$$

есть разложение в ряд по степеням λ указанного решения уравнения (1), то

$$|y_k(t)| \leqslant \frac{x_k}{\alpha_1 \cdot \alpha_2 \ldots \alpha_n} \quad (-\infty < t < \infty).$$

Ю. А. Рябов

9822. **Об асимптотическом представлении решений системы нелинейных уравнений с медленно изменяющимися коэффициентами. Митропольский** (Про асимптотичне представлення розв'язків систем нелінійних рівнянь зі змінними коефіцієнтами. Мітропольський Ю. О.), Наук. щорічник. Механ.-матем. фак. Київськ. ун-ту, 1956. Київ, 1957, 504—506 (укр.)

Рассматривается система возмущенных уравнений

$$\frac{dx_k}{dt} = X_k(\tau, x_1, x_2, \ldots, x_n) + \varepsilon X_k^*(\tau, \theta, x_1, x_2, \ldots, x_n, \varepsilon) \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \qquad (1)$$

где $\tau = \varepsilon t$ — «медленное время», ε — малый параметр, $d\theta/dt = V(\tau) \geqslant 0$. Предполагается, что невозмущенная система

$$\frac{dx_k}{dt} = X_k(\tau, x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \qquad (2)$$

имеет семейство периодических решений, зависящих от двух произвольных постоянных:

$$x_k = x_k^0(\omega t + \varphi, a, \tau) \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \qquad (3)$$

где функции x_k^0 периодичны по $\psi = \omega t + h$ с периодом 2π, $\omega = \omega(a, \tau)$ — угловая частота, a, φ — произвольные постоянные. Кроме того, предполагается, что уравнения в вариациях

$$\frac{d\delta x_k}{dt} = \sum_{r=1}^{n} X'_{kx_r}(\tau, x_1^0, \ldots, x_n^0)\, \delta x_r \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \qquad (4)$$

соответствующие решениям (3), при $\tau \in [0, L]$ имеют $(n-2)$ характеристических показателя с отрицательными вещественными частями (два показателя равны нулю в силу предположения о существовании решений вида (3) у системы (2)) и что не существуют зависимости вида

$$m_3\gamma_3(\tau) + m_4\gamma_4(\tau) + \ldots + m_n\gamma_n(\tau) = \gamma_Q(\tau), \; m_3 + m_4 + \ldots + m_n \geqslant 2,$$

где $\gamma_Q(\tau)$ $(q = 3, 4, \ldots, n)$ — действительные части упомянутых показателей, $m_3, m_4, \ldots, m_n$ — целые неотрицательные числа. Фундаментальная система решений (4) считается известной и при этих условиях строится асимптотическое представление для решений (1) вида

$$x_k = x_k^0\left(\frac{s}{r}\theta + \psi, a, \tau\right) + \varepsilon x_k^{(1)}\left(\theta, \frac{s}{r}\theta + \psi, a, \tau\right) + \varepsilon^2 x_k^{(2)}\left(\theta, \frac{s}{r}\theta + \psi, a, \tau\right) + \ldots \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \qquad (5)$$

где s, r — целые взаимно простые числа, выбор которых определяется видом изучаемого резонанса, а для a и ψ строится система уравнений вида

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon A_1(\tau, a, \psi) + \varepsilon^2 A_2(\tau, a, \psi) + \ldots,$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \omega(a, \tau)\frac{s}{r}v(\tau) + \varepsilon B_1(\tau, a, \psi) + \varepsilon^2 B_2(\tau, a, \psi) + \ldots \qquad (6)$$

После подстановки (5), (6) в (1) оказывается возможным с любой степенью точности относительно ε определить члены разложения (5) и правые части (6). В частности, для первого приближения получается формула

$$x_k = x_k^0 \left(\frac{s}{r}\theta + \psi, a, \tau \right) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

и уравнения

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon A_1(\tau, a, \psi),$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \omega(a, \tau) - \frac{s}{r} v(\tau) + \varepsilon B_1(\tau, a, \psi),$$

где A_1 и B_1 — частные периодические по ψ решения уравнений

$$\left[\omega(a, \tau) - \frac{s}{r} v(\tau)\right] \frac{\partial A_1}{\partial \psi} - 2a\omega(a, \tau) B_1 =$$

$$= M\left\{\sum_{k=1}^{n} X_k^*(\tau, \theta, x_1^0, \ldots, x_n^0, 0) f_{k2}^*(\psi, a, \tau)\right\}$$

$$\left[\omega(a, t) - \frac{s}{z} v(\tau)\right] a \frac{\partial B_1}{\partial \psi} + 2\omega(a, \tau) A_1 =$$

$$= -\frac{d\omega(a, \tau)}{d\tau} - M\left\{\sum_{k=1}^{n} X_k^*(\tau, \theta, x_1^0, \ldots \right.$$

$$\left. \ldots, x_n^0, 0) f_{k1}^*(\psi, a, \tau)\right\},$$

где M — означает усреднение по явно входящему времени, а f_{k2}^*, f_{k1}^* — периодические функции, определенным образом вычисляемые с помощью фундаментальной системы решений (4).

Таким образом, изучение асимптотики решений нелинейной возмущенной системы (1) сводится к системе двух уравнений (6) для «амплитуды» a и «фазы» ψ так, как это обычно делается для уравнений, близких к линейным. В. М. Волосов

9823. О поведении решений системы дифференциальных уравнений в окрестности изолированного статического решения. Лыкова О. Б., Докл. АН СССР, 1957, 115, № 3, 447—449

Рассматривается система нелинейных дифференциальных уравнений

$$dx/dt = X(x) + \varepsilon X^*(t, x, \varepsilon) \equiv F(t, x, \varepsilon), \qquad (1)$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)$ — искомый вектор и ε — малый положительный параметр. Предполагается, что: а) $X(0) = 0$, $X_x'(0) \neq 0$; б) вектор-функция $F(t, x, \varepsilon)$ в некоторой области $-\infty < t < +\infty$, $x \in U(0)$, $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, является периодической по t с периодом 2π (по-видимому, непрерывной по t, хотя это не оговорено автором!) и обладает ограниченными и равномерно непрерывными производными любого порядка по x и ε; в) характеристическое уравнение

$$\det[Ez - X_x'(0)] = 0$$

имеет пару чисто мнимых корней $z_1 = i\omega$, $z_2 = -i\omega$ ($\omega \neq 0$), причем остальные корни z_k ($k = 3, \ldots, n$) обладают отрицательными действительными частями.

Утверждается, что при малом ε система (1) в некоторой окрестности $U(0)$ имеет единственное двухпараметрическое локальное интегральное многообразие $\mathfrak{M}_t$, определенного вида, являющееся центром притяжения в известной области для остальных решений, начальные значения которых достаточно близки к $\mathfrak{M}_t$. При этом $\mathfrak{M}_t$ называется локальным интегральным многообразием, если для решений $x(t)$ из соотношения $x(t_0) \in \mathfrak{M}_t$ следует, что $x(t) \in \mathfrak{M}_t$ при x, принадлежащих некоторой окрестности $x(0)$. Б. П. Демидович

9824. О многократном дифференцировании по параметру решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром при производной. Васильева А. Б., Докл. АН СССР, 1958, 119, № 1, 9—11

Рассматривается система уравнений

$$\mu \frac{dz}{dt} = F(z, x, t), \ (\mu > 0), \qquad \frac{dx}{dt} = f(z, x, t), \qquad (1)$$

$$z|_{t=0} = z^0, \quad x|_{t=0} = x^0,$$

которая при $\mu = 0$ переходит в вырожденную систему

$$F(\bar{z}, \bar{x}, t) = 0, \quad \frac{d\bar{x}}{dt} = f(\bar{z}, \bar{x}, t), \qquad (2)$$

$$\bar{x}|_{t=0} = x^0.$$

Как показано в работах А. Н. Тихонова (цитируемых в реферируемой статье), при $\mu \to 0$ решения $z(t, \mu)$, $x(t, \mu)$ системы (1) стремятся к решениям $\bar{z}(t)$, $\bar{x}(t)$ системы (2), если начальная точка $(z^0, x^0, 0)$ взята из так называемой области влияния устойчивого корня $z = \varphi(x, t)$ уравнения $F(z, x, t) = 0$. Одно из возможных по А. Н. Тихонову определение устойчивого корня и его области влияния, используемое в статье, заключается в следующем: корень $z = \varphi(x, t)$ устойчив в области $D(x, t)$, если $\frac{\partial F}{\partial z}(\varphi(x, t), x, t) < 0$ для всякой точки (x, t) из $\overline{D}$. Область влияния этого корня — совокупность точек (z^0, x^0, t^0), для которых $\operatorname{sgn} F(z, x^0, t^0) = \operatorname{sgn} F(z^0, x^0, t^0)$ при $z^0 \lessgtr z \lessgtr \varphi(x^0, t^0)$. В реферируемой статье вычисляются производные высших порядков по μ для $z(t, \mu)$, $x(t, \mu)$ при $\mu \to 0$, в случае, когда начальная точка взята в области влияния одного из устойчивых корней. Показано, что предельные при $\mu \to 0$ значения $\bar{z}_{\mu n}$, $\bar{x}_{\mu n}$ производных $\partial^n z(t, \mu)/\partial \mu^n$, $\partial^n x(t, \mu)/\partial \mu^n$ могут быть найдены, если известны предельные значения для всех производных по μ более низкого порядка. Что касается предельных значений $\bar{z}_\mu$, $\bar{x}_\mu$ для производных первого порядка, то они были вычислены в прежних работах автора (цитируемых в статье) и таким образом задача вычисления $\bar{z}_{\mu n}$, $\bar{x}_{\mu n}$ оказывается до конца решенной. Как показано в реферируемой работе, предельные значения $\bar{z}_{\mu n}$, $\bar{x}_{\mu n}$ находятся из системы уравнений

$$n \frac{d}{dt} \bar{z}_{\mu n-1} = \overset{(n)}{F}(\bar{z}, \bar{x}, t, \bar{z}_\mu, \ldots, \bar{z}_{\mu n}, \bar{x}_\mu, \ldots, \bar{x}_{\mu n}),$$

$$\frac{d}{dt} \bar{x}_{\mu n} = \overset{(n)}{f}(\bar{z}, \bar{x}, t, \bar{z}_\mu, \ldots, \bar{z}_{\mu n}, \bar{x}_\mu, \ldots, \bar{x}_{\mu n})$$

с начальными условиями

$$\bar{x}_{\mu n}|_{t=0} = \bar{x}_{\mu n}^0 = \int_0^\infty (-1)^n \tau^n f_{n-1}^{(n)}(\tau)\, d\tau,$$

где F, f — некоторые определенные функции, линейные относительно $\bar{z}_{\mu n}$, $\bar{x}_{\mu n}$, которые легко находятся дифференцированием уравнений (1) по μ, $f_{n-1}^{(n)}$ — некоторая функция, тоже определенным образом вычисляемая

Величина $\bar{x}^0_{\mu n}$ называется скачком начального значения для $\partial^n x(t, \mu)/\partial\mu^n$. Сущность открытого явления заключается в том, что в то время как решения $z(t, \mu)$, $x(t, \mu)$ стремятся к предельным функциям, удовлетворяющим тем же начальным условиям, производные решений по параметрам стремятся к функциям, начальные значения которых отличны, вообще говоря, от $\left.\frac{\partial^n x(t, \mu)}{\partial \mu^n}\right|_{t=0}$. Для вычисления производных n-го порядка требуется, чтобы F и f имели соответственно непрерывные производные по всем аргументам до n порядков $(n+1)$ и n включительно. Указано, что результаты переносятся также и на системы более общего вида

$$\mu \frac{d}{dt} z_j = F_j(z_l, x_k, t), \quad j, l = 1, 2, \ldots, n;$$

$$\frac{d}{dt} x_i = f_i(z_l, x_k, t), \quad i, k = 1, 2, \ldots, m;$$

$$z_j|_{t=0} = z_j^0, \quad x_i|_{t=0} = x_i^0.$$

В. М. Волосов

9825. **О нелинейных колебаниях с одной степенью свободы системы с медленно изменяющимися параметрами. Волосов В. М.,** Докл. АН СССР, 1957, 117, № 6, 927—930

Рассматривается уравнение

$$\ddot{x} + Q(\varepsilon t, x) + \varepsilon f(\varepsilon, \varepsilon t, x, \dot{x}) = 0, \quad |\varepsilon| \ll 1, \qquad (1)$$

где Q и εf — медленно изменяющиеся основная сила, вызывающая колебательное движение, и малая возмущающая сила, зависящая от скорости $\dot{x}$.

В отличие от предыдущих работ автора (РЖМат, 1956, 8860; 1958, 5685, 6716), в которых приведен метод, позволяющий вычислять амплитуды и периоды колебаний, описываемых уравнением (1), в настоящей работе при тех же ограничениях решается задача о непосредственном вычислении значений решения $x(t,\varepsilon)$ при произвольном значении t из интервала времени порядка $1/\varepsilon$.

Приводятся асимптотические формулы для решения, удобство которых заключается в том, что все вычисляемые величины, необходимые для построения $x(t,\varepsilon)$, выражаются непосредственно через функции Q и f, входящие в (1).

Проводятся также сопоставление и некоторая дискуссия полученных автором результатов, с результатами, получаемыми с помощью метода усреднения.

Ю. А. Митропольский

9826. **Об оценке области нахождения истинного периодического решения, определяемого приближенно методом гармонического баланса. Глатёнок И. В.,** Автоматика и телемеханика, 1957, 18, № 12, 1132—1135

Работа связана с определением периодических решений уравнения

$$\ddot{y} = f(y, \dot{y}) \qquad (1)$$

методом гармонического баланса Крылова—Боголюбова.

Этот метод требует наличия в рассматриваемых уравнениях малого множителя. При обращении этого множителя в 0 уравнение должно иметь порождающее периодическое решение.

Автор не предполагает наличия у рассматриваемого уравнения порождающего периодического решения и соответствующего малого множителя. Приводятся формулировки трех теорем, устанавливающих ограничения, которые должны быть наложены на функцию f для того, чтобы периодические решения уравнения (1) могли быть приближенно оценены методом гармонического баланса, несмотря на то, что малого параметра правая часть не содержит. Термин «приближенно оценены» понимается в том смысле, что по периодическому решению, найденному методом гармонического баланса оценивается область, в которой расположено истинное периодическое решение (предельный цикл).

М. А. Айзерман

9827. **Поправка.** Докл. АН СССР, 1957, 117, № 6, 930.

К РЖМат, 1958, 6716.

9828. **Об эквивалентности в теории устойчивости задач для дифференциальных и дифференциально-разностных уравнений. Цинь Юань-сюнь** (On the equivalence problem of differential equations and difference-differential equations in the theory of stability. Chin Yuan-shun), Sci. Rec., 1957, 1, № 5, 287—289 (англ.)

Рассматривается уравнение с запаздывающим аргументом

$$\dot{x}(t) = px(t) + qx(t-\delta), \qquad (1)$$

где p, q и δ — постоянные, $\delta > 0$ и уравнение

$$\dot{x}(t) = (p+q)x(t). \qquad (2)$$

Утверждается, что решения $x \equiv 0$ уравнений (1) и (2): 1) при $p+q>0$ неустойчивы; 2) при $p+q<0$ и $0 < \delta < \Delta(p, q) = \frac{\pi}{8(|p|+|q|)}$ асимптотически устойчивы; 3) при $p+q=0$ и $0<\delta<\Delta(p, q) = \frac{1}{|p|}$ устойчивы.

Эти же утверждения, за исключением критического случая 3), справедливы в силу результатов Белмана и для некоторых нелинейных уравнений, для которых уравнение (1) является уравнением первого приближения.

Примечание референта. Условия 1), 2) и 3) не новы, нова лишь их интерпретация, связывающая вопрос об устойчивости решения уравнения (1) с вопросом об устойчивости решения уравнения (2).

Л. Э. Эльсгольц

9829. **Признаки ограниченности решений линейных дифференциальных уравнений с переменным запаздыванием аргумента. Рехлицкий З. И.,** Докл. АН СССР, 1958, 118, № 3, 447—449

Указаны необходимые и достаточные критерии ограниченности на полуоси $(0, \infty)$ решений некоторых дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом. Формулируются четыре теоремы. В теореме 1 рассматривается краевая задача

$$dy/dt - \lambda y(t - \alpha(t)) = x(t), \qquad 0 \leqslant t < \infty \qquad (1)$$

$$y(t) = \varphi(t), \quad t \leqslant 0, \quad \alpha(t) \geqslant 0,$$

где непрерывная функция $\alpha(t)$ допускает представление

$$\alpha(t) = \alpha_1(t) + \alpha_2(t),$$

удовлетворяющее условиям: 1) существует $\alpha_1'(t)$; 2) $\lim \alpha_1'(t) = 0$ при $t \to \infty$; 3) $\lim \alpha_2(t) = 0$ при $v \to \infty$.

Для того чтобы краевая задача (1) имела ограниченное решение $y(t)$ при произвольных непрерывных и ограниченных функциях $x(t)$ и $\varphi(t)$, необходимо и достаточно, чтобы все корни уравнения $1 - ze^{\lambda a z} = 0$ находились вне единичного круга, где $a = \overline{\lim}_{t\to\infty} \alpha(t) > 0$, если же $a = 0$, то для ограниченности $y(t)$ необходимо

и достаточно, чтобы λ находилась в открытой левой полуплоскости.

В теореме 2 при аналогичных условиях указывается необходимое и достаточное условие ограниченности краевой задачи для уравнения $dy/dt - Ay(t-\alpha(t)) = x(t)$, где A — линейный ограниченный оператор, действующий в комплексном пространстве Банаха.

В теореме 3 доказывается аналогичный результат для уравнения $dy/dt - A(t)\,y(t-\alpha(t)) = x(t)$, где $A(t)$ — оператор-функция, на которую наложен ряд ограничений.

В теореме 4 рассматривается краевая задача на полупрямой для уравнения

$$dy/dt - \alpha(t)\,y(t-a) - \beta(t)\,y(t) = x(t), \quad a > 0,$$

при некоторых ограничениях, налагаемых на комплекснозначные функции $\alpha(t)$ и $\beta(t)$, причем признак ограниченности решений аналогичен признаку в теореме 1. Доказательства не приведены. Л. Э. Эльсгольц

9830. Об одном рекуррентном линейном дифференциальном уравнении второго порядка. Бандич (On a recurrent linear differential equation of the second order. Bandic Ivan), Glasnik mat.-fiz. i astron., 1957, **12**, № 3, 181—187 (англ.; рез. сербо-хорв.)

Введем обозначения: $\Delta_1(u) = u'/u$, $\Delta_2(u) = u''/u$. Пусть $y = y_0(x)$ — решение линейного уравнения $\Delta_2(y) = \varphi(x)$. Тогда уравнение $\Delta_2(y) = \varphi(x) + \lambda_k(x)$, где

$$\lambda_k = \sum_{\nu=0}^{k-1} \Delta_2\left(\frac{1}{P\sqrt{X_\nu - \Delta_2(p)}}\right) - k\Delta_2(p),$$

имеет решение

$$y_k = y_0 \prod_{\nu=1}^{k-1} \frac{\Delta_1(y_\nu/p)}{\sqrt{X_\nu - \Delta_2(y)}} \quad (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

Здесь $p(x)$ — произвольная функция; $X_0 = \varphi(x)$, $X_k = \varphi(x) + \lambda_k(x)$. При конкретном выборе $p(x) = \text{const}$ из этого результата можно получить теорему Петровича об уравнениях Риккати. И. М. Соболь

9831. О некоторых приложениях дифференциально-разностных уравнений. Минорский (Sur quelques applications des équations différentielles aux différences. Minorsky Nicolas), Rend. Seminar. mat. e fis. Milano, 1952 (1953), **23**, 36—47 (франц.; рез. англ.)

Исследуются периодические решения линейного однородного дифференциально-разностного уравнения с постоянными коэффициентами

$$\ddot{x}(t) + a_1\dot{x}(t) + \lambda x(t-h) = 0, \qquad (1)$$

где λ — параметр, постоянное запаздывание $h > 0$.

Доказывается существование бесконечного множества значений λ, при которых уравнение (1) имеет периодические решения. В окрестности этих критических значений $\lambda = \lambda_k$ существуют значения λ, при которых уравнение (1) имеет решения с неограниченно возрастающими амплитудами колебаний, что не наблюдается в некоторых практических задачах, для описания которых используется уравнение (1).

Для описания таких процессов автор предлагает рассматривать решения нелинейного уравнения

$$\ddot{x}(t) + a_1\dot{x}(t) + \lambda x(t-h) + \varepsilon x^3(t-h) = 0. \qquad (2)$$

Считая ε и h малыми, автор упрощает уравнение (2) (вычисление ведется при $\lambda = 1$) и приближенно заменяет его системой уравнений без запаздывания, к которой применяется стробоскопический метод решения. Кроме подробного изучения уравнений (1) и (2), в статье высказывается несколько соображений о наиболее часто встречающихся в приложениях постановках задач, связанных с дифференциально-разностными уравнениями.

Примечание референта. В статье нет обоснования возможности замены уравнения (2) системой без запаздывания при приближенном нахождении периодических решений. В формуле (6) опечатка: вместо $x(t)$ должно быть $\dot{x}(t)$. Л. Э. Эльсгольц

9832. О методе оценки динамики многосвязных следящих систем. Савараги, Сунахара (On a method of evaluation of the dynamical behavior of co-ordinated control system. Sawaragi Yoshikazu, Sunahara Yoshifumi), Proc. 6th Japan Nat. Congr. Appl. Mech., 1956. Tokyo, 1957, 465—469 (англ.)

Рассматривается важный для современной теории автоматического регулирования вопрос о динамике многосвязных следящих систем. Движение таких систем исследуется с помощью методов разложения предполагаемого решения по собственным ортогональным векторам n-мерной системы.

Динамическая характеристика таких сложных систем описывается переходной функцией, получение которой упрощается при использовании собственных значений и ортогональных собственных значений векторов и n-мерной системы. Приводятся интересные примеры, иллюстрирующие предлагаемый метод.

Г. М. Уланов

9833. Собственные колебания и точность (ошибка) регулируемой системы с изменяющимися по времени параметрами. Людвиг, Рольник (Erzwungene Schwingungen und Fehler bei Regelsystemen mit zeitlich variabler Regelstärke. Ludwig G., Rollnik H.), Z. angew. Math. und Mech., 1958, **38**, № 1-2, 16—20 (нем.; рез. англ., франц., русск.)

Рассматривается решение дифференциального уравнения

$$P\left(\frac{d}{dt}\right)t\cdot\varepsilon(t) + Q\left(\frac{d}{dt}\right)\varepsilon(t) = n(t), \qquad (1)$$

где $P(z)$ и $Q(z)$ — некоторые полиномы по z, $\varepsilon(t)$ — отклонение системы, $u(t)$ — внешнее возмущение, получаемое методом интегральных вычетов. Оценивается ошибка системы с помощью функции $t\varepsilon(t)$.

Г. М. Уланов

9834. Две теории о групповом запаздывании и их применение в коррекции запаздывания. Гурье (Two theorems concerning group delay with practical application to delay correction. Gouriet G. G. Proc. Instn Electr. Engrs, 1957, C, № 275 R, 5 pp., ill.) (англ.)

Групповое запаздывание $\tau(\omega) = d\theta/d\omega$, где $\theta = \operatorname{tg} Q(\omega)/R(\omega)$ — тангенс отношения мнимой к вещественной характеристике функции $f(j\omega)$, определяется непосредственно по изображению $f(p)$ и ее производной по p. Устанавливается связь между $\tau(\omega)$ и $G'(\omega)$, как взаимных гильбертовых преобразований.

Г. М. Уланов

9835. Периодические режимы в релейной системе регулирования, содержащей звено чистого запаздывания. Долголенко Ю. В., Научно-техн. информ. бюл. Ленингр. политехн. ин-та, 1957, № 12, 3—12

Рассматривается релейная система автоматического регулирования специальной структуры, содержащая, помимо реле, элемент запаздывания. Процессы в системе описываются уравнениями

$$D_1(p)\,u(t) = K_1(p)\,\xi(t-\tau),$$
$$D_2(p)\,v(t) = K_2(p)\,\xi(t). \qquad (1)$$

$$\sigma(t) = u(t) + v(t) - r\xi(t) + F(t),$$
$$p\xi(t) = f[\sigma(t)],$$

где $f = \operatorname{sgn}\sigma$ — характеристика простого симметричного реле без мертвого хода и коэффициента возврата, τ — величина запаздывания, $D_1(p)$ и $K_1(p)$ — полиномы с постоянными и действительными коэффициентами по оператору дифференцирования $p = d/dt$, r — постоянный коэффициент, характеризующий жесткость обратной связи, а $F(t)$ — внешнее воздействие, которое предполагается гармоническим, с полупериодом T.

Работа посвящена определению периодических решений, уравнений (1), имеющих полупериод T. В случае, когда $F(t) \equiv 0$, также ищутся периодические решения, но уже любого периода. Хотя автор этого специально не оговаривает, он интересуется лишь симметричными периодическими режимами, т. е. такими, при которых переключение реле приходит лишь в моменты времени, кратные полупериоду.

С этой целью уравнения (1) приводятся к канонической форме

$$\dot{z}_\rho = \lambda_\rho z_\rho + f(\sigma_\tau),\ \dot{y}_\delta = \theta_\delta y_\delta + f(\sigma),$$
$$\dot{\sigma} \sum_\rho \beta_\rho z_\rho + \sum_\delta \gamma_\delta y_\delta - rf(\sigma) + \dot{F}(t) = 0.$$

Далее периодические режимы ищутся методом припасовывания, а условия устойчивости — рассмотрением последовательности моментов переключения реле при малом возмущении периодического режима, аналогично тому, как это делается в теории релейных систем, не содержащих запаздывания.

Примечание референта. При исследовании устойчивости автоколебаний соответствующее характеристическое уравнение не всегда имеет нулевой корень. Автор отбрасывает его, ссылаясь на теоремы А. А. Андронова и А. В. Витта (Ж. эксперим. и теор. физ., 1933, 3, вып. 5). Однако теорема Андронова и Витта доказана лишь для случая, когда правые части рассматриваемых дифференциальных уравнений достаточно гладкие и уравнения не содержат членов с запаздывающим аргументом. В рассматриваемых же в реферируемой работе уравнениях правые части разрывны и содержатся члены с запаздывающим элементом. М. А. Айзерман

9836. **Алгебраический подход к расчету автоматического контроля. Олденбергер** (Algebraic approach to design of automatic controls. Oldenburger Rufus), Trans. ASME, 1958, 80, № 2, 433—441. Discuss., 441—443 (англ.)

9837. **К анализу систем автоматического регулирования. Бендриков Г. А.** Сессия АН СССР по научн. пробл. автоматиз. произ-ва, 1956, Т. 2, М., АН СССР, 1957, 95—100

Рассмотрены типы траекторий корней (собственных частот) для следящих систем четвертого порядка, передаточная функция которых не имеет нулей. Г. М. Уланов

9838. **Графический метод расчета переходных процессов в нелинейных системах автоматического регулирования (Метод многих параметров на фазовых плоскостях). Терехов В. М.**, Тр. Моск. энерг. ин-та, 1957, вып. 29, 144—156

Рассматривается графический метод построения фазовых траекторий и развертка по времени t переменных процессов регулирования. Г. М. Уланов

9839. **К теории релейных регуляторов с зоной нечувствительности. Хан** (Zur Theorie der Relais-Regler mit Unempfindlichkeitszonen. Hahn W.), Z. angew. Math. und Mech., 1957, **37**, № 5-6, 224—227 (нем.)

Рассматривается релейный регулятор с зоной нечувствительности и гистерезисом в релейном элементе. Используется метод канонических уравнений А. И. Лурье для определения устойчивости и периодических решений (автоколебаний) релейной системы регулирования. Г. М. Уланов

9840. **Колебания систем порядка выше второго, включающих реле с опережающей характеристикой. Челпанов И. Б.**, Научно-техн. информ. бюл. Ленингр. политехн. ин-та, 1957, № 12, 33—42

Дано применение статистического анализа для описания движения релейной системы, незатухающие движения которой могут иметь непериодический характер. Фазовые траектории такой системы плотно заполняют некоторую замкнутую область A на фазовой плоскости, и движение может быть охарактеризовано стационарным вероятностным распределением по амплитудам. Основные результаты относятся к анализу движения вырожденной релейной системы 2-го порядка. Приводится схема системы и моделирование процессов в системе на электронной моделирующей установке ЭМУ-6. Г. М. Уланов

9841. **К вопросу об устойчивости неустановившегося движения на конечном интервале времени. Бочкарев А. Ф.**, Тр. Куйбышевск. авиац. ин-та, 1957, вып. 3, 11—14

9842. **О вынужденных разрывных колебаниях. Нагумо** (On a forced discontinuous oscillation. Nagumo Zin-iti. Proc. Fac. Engrg. Keio Univ. 7 (1954), 36—43 (1955) (англ.)

Исследуется субгармонический резонанс релаксационных колебаний уравнения $\delta(x^2 - 1)\,dx/d\tau + x = b\sin(\tau + \varphi)$, $1 < |x| \leqslant 2$, b — малое. $\tau(x)$ представляется в виде ряда по b и коэффициенты определяются как функции от x. Автор находит (чертит) изменения периода φ во время скачков и замечает, что они стремятся к соответствующим числам, кратным 2π только около четных субгармоник. Указывается несколько осцилляторов, описываемых упомянутым выше уравнением. Дается сравнение с экспериментом. E. Pinney

Перевод из Math. Revs, 1956, **17**, № 1, 39

9843. **О построении областей устойчивости. Островский Г. М.**, Автоматика и телемеханика, 1955, **16**, № 6, 501—507

Дается способ построения областей устойчивости для уравнения четвертой, пятой и шестой степеней при помощи инвариантов квадратичных форм.

9844. **Приближенное определение автоколебаний и вынужденных колебаний в системах автоматического регулирования. Попов Е. П.**, Тр. 2-го Всес. совещ. по теории автоматического регулирования. Т. 1. М.— Л. Изд-во АН СССР, 1955, 219—248

См. РжМех. 1957, 5186

9845. **Замечания к статье Л. Н. Сретенского «О направленном излучении волн из области, подверженной внешнему давлению». Сретенский Л. Н.**, Прикл. матем. и механ., 1957, 21, № 4, 595—596

Дается исправление нескольких ошибок, допущенных в вычислениях в работе автора (см. РЖМат, 1957, 7921).

9846. **Вывод достаточного условия устойчивости в «большом» синхронной машины. Андреюк В. А.**, Тр. Ленингр. политехн. ин-та, 1958, № 195, 168—186

9847. **Предельные режимы дальней электропередачи, определяемые из уравнений ее установившегося режима. Горев А. А.**, Тр. Ленингр. политехн. ин-та, 1958, № 195, 45—64

9848. **Математическое исследование точности копирования одного венгерского копировального станка. Фазекаш** (Egy magyar automatikus másolóberendezés másolási pontossgának matematikai vizs-

gálata. Fazekas Ferenc), Magyar tyd. akad. Alkalm. mat. int. közl., 1953, 2, 415—446 (венг.; рез. русск., нем.)

Машиностроительный завод «Mintag pgyár» выпустил автоматическое копировальное устройство под названием «Гидрофикс», работающее по гидравлическому принципу и монтируемое на токарный станок.

Автор занимается математическим исследованием происходящего в «Гидрофиксе» копировального процесса; он производит расчеты, дающие качественные информации о некоторых простых моделях устройства.

Рассматриваются вопросы о величине погрешности копирования, об ее точной оценке, об асимптотическом поведении. Из резюме автора

9849. **Поправка к статье Г. В. Гиль и А. Д. Мышкиса «Асимптотическое поведение решений одной нелинейной краевой задачи теории пограничного слоя».** Докл. АН СССР, 1957, 115, № 1, 8

К РЖМат, 1957, 7859.

9850. **Построение функции Грина для уравнения колебания стержня. Галустян С. Б.,** Азэрб. сэнае инст. эсэрлэри. Тр. Азерб. индустр. ин-та, 1956, вып. 13, 63—74 (рез. азерб.)

См. РЖМех, 1957, 9378.

9851 Д. **Асимптотическое поведение решений дифференциального уравнения $y^1 = f(x, y)$ в целом. Лощинин В. С.** Автореф. дисс. канд. физ. матем. н., Моск. обл. пед. ин-т, М., 1958

9852 Д. **Обоснование метода гармонического баланса для некоторых нелинейных задач. Глатёнок И. В.** Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., МГУ, М., 1958

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

9853. **Задача Коши для линейного уравнения с полиномиальными коэффициентами. Лере** (Le problème de Cauchy pour une équation linéaire à coefficients polynomiaux. Leray Jean), Colloq. internat. Centre nat. rech. scient. 71, Paris, 1956, 117—123. Discuss., 124 (франц.)

Пусть $x = (x_1, \ldots, x_l)$, $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_l)$, x_i, ξ_j — комплексные числа; $a(\xi, x)$ — полином степени $m + q$ по ξ и q по x; $s(x)$ — голоморфная функция; уравнение $s(x) = 0$ определяет кусок гиперповерхности в пространстве x; V — окрестность этого куска; $v(x)$ — функция, голоморфная в V. Задача Коши заключается в нахождении функции $u(x)$, удовлетворяющей уравнению $a\left(\frac{d}{dx}, x\right) u(x) = v(x)$, причем $u(x)$ имеет нуль порядка $m + q$ на $s(x) = 0$. Поверхность $s(x) = 0$ не должна быть характеристической. Решение задачи дается формулой $u(z) = J[w(\xi, x), v(x)]$, где J — оператор, определяемый как некоторый специальный интеграл в комплексном аналитическом пространстве, вид которого зависит лишь от $s(x)$, $w(\xi, x)$ — решение частной задачи Коши для другого уравнения с полиномиальными коэффициентами, порядок которого равен q. w зависит лишь от вида $a(\xi, x)$. Изложение конспективно. Автор высказал предположение, что развитый аппарат позволит доказать теорему: особенности решения задачи Коши для уравнения с аналитическими коэффициентами расположены лишь на характеристиках, проходящих через точки, в которых коэффициенты имеют особенность. А. А. Дезин

9854. **Свойства решений линейных дифференциальных уравнений в частных производных с особыми коэффициентами в окрестности сингулярной линии (сингулярной поверхности). Ван Гуан-инь,** Шусюэ сюэбао, Acta math. sinica, 1957, 7, № 4, 590—630 (кит.; рез. англ.)

В первой части статьи рассматривается уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} - \left(\frac{\beta'}{x-y} - a(x, y)\right)\frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\beta}{x-y} + b(x, y)\right)\frac{\partial u}{\partial y} + \left(\frac{\gamma}{(x-y)^2} + \frac{d(x, y)}{x-y} + c(x, y)\right)u = 0, \qquad (1)$$

где β, β' — постоянные, $a(x, y)$, $b(x, y)$, $c(x, y)$ и $d(x, y)$ — регулярные функции в смысле Адамара (т. е. функции, дифференцируемые до достаточно высокого порядка).

Автор рассматривает правильность постановки сингулярной задачи Коши (т. е. на сингулярной линии $x = y$ задана лишь функция u) для уравнения (1). При помощи изучения одного интегро-дифференциального уравнения автор доказывает существование решения этой задачи и указывает приближенный метод нахождения решения. Причем автор отмечает, что в случае $\beta + \beta' < 0$ задача Коши не единственна.

Во второй части статьи рассматривается уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \left(\frac{\beta}{t} + B_0(t)\right)\frac{\partial u}{\partial t} + \left(\frac{\rho}{t} + q(t)\right)u = A_\sigma u, \qquad (2)$$

где β, ρ_σ — постоянные. $B_0(t)$, $q(t)$ — регулярные функции. A — произвольный дифференциальный оператор второго порядка, зависящий только от $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$.

Автор указывает, что решение сингулярной задачи Коши для уравнения (2) можно представить с помощью решения задачи Коши для уравнения

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = A_\sigma v. \qquad (3)$$

Наконец, автор применяет этот метод к решению задачи Коши для пространственного уравнения Чаплыгина

$$K(t) A_\sigma u + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0. \qquad (4)$$

Сунь Хэ-шэн

9855. **Об аналитическом решении задачи Гурса для системы дифференциальных уравнений. Михайлов В. П.,** Докл. АН СССР, 1957, 115, № 3, 450—453

Рассматривается аналитическая система нелинейных уравнений, которая после разложения левых частей в ряд Тейлора имеет вид:

$$\frac{\partial u_k}{\partial t} = \sum_{j=1}^{n} b_{kj}\frac{\partial u_j}{\partial x} + \Phi_k\left(x, t, u_1, \ldots, u_n, \frac{\partial u_1}{\partial x} \ldots \frac{\partial u_n}{\partial t}\right),$$

$k = 1, \ldots, n$, где b_{kj} постоянны и действительны, а функции Φ_k не содержат $\frac{\partial u_s}{\partial x}$, $\frac{\partial u_s}{\partial t}$; $s = 1, \ldots n$ в первых степенях. Требуется найти аналитическое решение системы, удовлетворяющее условиям $u_i(x, t)|_{l_i} = 0$, где l_i — прямые $x = \mu_i t$ (задача Гурса).

Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ действительны. Тогда для того чтобы указанная задача имела единственное решение, необходимо и достаточно, чтобы точка $(\mu_1, \ldots, \mu_n)$ не лежала ни на одной из конечного числа алгебраических поверхностей, которые полностью определяются коэффициентами b_{ij}.

Автор предполагает, что система «регулярна», т. е. что соответствующая система специальных интегральных уравнений была бы типа Вольтерра (определение регулярности см. работу). Приведены достаточные условия регулярности. Далее рассмотрен случай, когда по крайней мере одно из $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ не является действительным. Пусть M — множество в пространстве коэффициентов b_{ij}, на котором по крайней мере одно из $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ не действительно. Тогда утверждается, что почти для всех $(\mu_1, \ldots, \mu_n)$ и для некоторого всюду плотного в M множества задача Гурса не имеет аналитического решения. В то же время существует всюду плотное множество меры нуль значений $(\mu_1, \ldots, \mu_n)$, такое, что на некотором всюду плотном в M множестве задача Гурса имеет единственное аналитическое решение. С. А. Гальперн

9856. **О неаналитических решениях задачи Гурса для системы дифференциальных уравнений с двумя независимыми переменными. Михайлов В. П.**, Докл. АН СССР, 1957, **117**, № 5, 759—762

Исследуется следующая задача: найти решения гиперболической системы уравнений

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x} + F_i(t, x), \quad i = 1, \ldots, n,$$

при условиях $u_i|_{l_i} = \varphi_i(t)$, где l_i — прямые $x = \mu_i t$; $-\infty < t < +\infty$, b_{ij}, μ_i — постоянные. Дается определение корректно поставленной задачи. Сначала рассматривается однородная система ($F_i(t, x) \equiv 0$). Пусть $\Delta(w) = \det \| s_{ij} \lambda_{ij}^{-iw} \|$, где $\| s_{ij} \|$ — такая, что $\| s_{ij} \| \times \| b_{ij} \| \| s_{ij} \|^{-1} = \begin{Vmatrix} \lambda_1 & 0 \\ \cdots & \cdots \\ 0 & \lambda_n \end{Vmatrix}$; $\lambda_{ij} = \lambda_j + \mu_i$, а w — комплексный параметр.

Тогда, если $\lambda_{ij} > 0$ (т. е. прямые l_i и характеристики системы не разделяют друг друга) и в полосе $\rho_0 \leqslant \operatorname{Im} w \leqslant \rho_1$ нет нулей $D(w)$, где

$$\rho_0 = \min_i \varlimsup_{x \to 0} \frac{\ln |\varphi_i(x)|}{\ln x};$$

$$\rho_1 = \max_i \varlimsup_{x \to \infty} \frac{\ln |\varphi_i(x)|}{\ln x},$$

то в классе функций

$$\max_i \varlimsup_{|x|+|t| \to \infty} \frac{\ln |u_i(x, t)|}{\ln |x| + |t|} \leqslant \rho_1;$$

$$\min_{i, j} \varlimsup_{s_i \to 0} \frac{\ln |u_j(x, t)|}{\ln s_i} \geqslant \rho_0;$$

где s_i — расстояние точки (x, t) от i-й характеристики. Задача поставлена корректно. Если же в упомянутой полосе есть нули $D(w)$, то задача поставлена некорректно.

Далее устанавливается, что область зависимости может быть

1) отрезком на каждой прямой l_i, содержащим начало координат;

2) состоять из части прямых l_i внешних к некоторым окрестностям начала координат и, наконец,

3) на одних прямых l_i имеет место 1-й случай, а на других — второй.

Рассмотрен случай, когда прямые l_i и характеристики системы разделяются; установлены условия корректной постановки задачи. Приведен пример того, что отказ от требования гладкости решений приводит к неединственности. Показано, что для неоднородной задачи при некоторых ограничениях роста свободных членов имеют место указанные выше результаты.

С. А. Гальперн

9857. **Обобщенные римановы инварианты. Лаффорд** (Generalised Riemann invariants. Ludford G. S. S.), Pacif J. Math., 1955, 5, № 3, 441—450 (англ.)

Известно, что рассмотрение некоторых вопросов, касающихся одномерного движения газа, связано с решением уравнения Монжа — Ампера

$$rt - s^2 + \lambda^2 = 0; \qquad \lambda = \lambda(x, y), \tag{1}$$

где $\lambda(x, y)$ определяется распределением энтропии. (РЖМат, 1955, 3786). Мартин нашел необходимые и достаточные условия существования промежуточных интегралов у уравнения (1) в предположении, что $\lambda(x, y) = X(x) Y(y)$ (РЖМат, 1953, 1207). В реферируемой статье этот вопрос решается без предположения о том, что $\lambda(x, y)$ имеет указанный вид.

Доказано, что уравнение (1) обладает промежуточными интегралами в двух и только в двух следующих случаях:

$$\lambda(x, y) = F(\alpha x + \beta y),$$

$$\lambda(x, y) = \frac{1}{(x + \alpha)(y + \beta)} F\left(\frac{x + \alpha}{y + \beta}\right), \tag{2}$$

где F — произвольная функция, α и β — произвольные постоянные.

Найдены промежуточные интегралы уравнения (1), при выполнении каждого из условий (2) (автор предлагает называть их обобщенными римановыми инвариантами) дана таблица промежуточных интегралов в аэродинамических переменных. Отмечается, что в некоторых случаях, когда функция $\lambda(x, y)$ не удовлетворяет ни одному из условий (2), ее можно аппроксимировать такой $\bar{\lambda}(x, y)$, для которой одно из (2) выполняется, и таким образом получить приближенное решение задачи. В. К. Иванов

9858. **Минимальные свойства областей. Ходырева В. М.**, Уч. зап. Казанск. гос. пед. ин-та, 1955, вып. 10, 113—136

9859. **О корректности одной смешанной задачи и о спектральной эквивалентности связанных с нею двух операторов. Александрян Р. А.**, Изв. АН АрмССР. Сер. физ.-матем. н., 1957, **10**, № 1, 69—83 (рез. арм.)

Пусть D — ограниченная область плоскости x, y, с гладкой границей Γ. В области $D \times [0 \leqslant t < \infty]$ рассматривается система

$$\frac{\partial^2 V_x}{\partial t^2} = -V_x + \frac{\partial P}{\partial x}; \quad \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2 V_y}{\partial t^2} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

при условиях:

$$\mathbf{V}(x, y, t)|_{t=0} = \mathbf{V}^0(x, y), \quad \mathbf{V} = (V_x, V_y),$$

$$\left.\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}\right|_{t=0} = \mathbf{V}'(x, y); \quad P(x, y, t)\Big|_{\Gamma} = 0 \text{ при всех } t > 0.$$

Одновременно с системой (1) в той же области рас-

сматривается уравнение

$$\frac{\partial^2 \Delta u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad (2)$$

при условиях $u|_{t=0} = \psi_0$, $\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi_1$; $u|_\Gamma = 0$ при всех $t > 0$.

С указанными задачами связываются операторы A и B (так, что система (1) записывается в виде $\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = AV$, а уравнение (2) — в виде $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = Bu$), изучаемые в соответствующим образом подобранных гильбертовых пространствах. Устанавливается связь между A и B и, в частности, их спектральная эквивалентность. Построение резольвенты оператора A сводится к решению некоторой эллиптической системы, для которой в явном виде выписывается фундаментальное решение.

А. А. Дезин

9860. **О соотношениях между решениями внутренних и внешних задач.** **Шиффер** (Sur les rapports entre les solutions des problèmes intérieurs et celles des problèmes extérieurs. Schiffer Menahem), C. r. Acad. sci., 1957, 244, № 22, 2680—2683 (франц.)

Пусть S — гладкая замкнутая поверхность, D — ограниченный ею объем, $\widetilde{D}$ — дополнение к $D+S$ в 3-мерном евклидовом пространстве. Рассматривается следующая задача: по заданной в D гармонической функции β построить в $\widetilde{D}$ гармоническую функцию $\widetilde{\beta}$ так, чтобы нормальные производные (или граничные значения) β и $\widetilde{\beta}$ совпадали на S. Вводя специальные метрики в многообразии гармонических функций, автор сводит эту задачу к некоторой вариационной. При этом устанавливается ряд неравенств, связывающих нормы β и $\widetilde{\beta}$ в различных метриках.

А. А. Дезин

9861. **О поляризации и виртуальной массе.** **Шиффер** (Sur la polarisation et la masse virtuelle. Schiffer Menahem), C. r. Acad. sci., 1957, 244, № 26, 3118—3121 (франц.)

Пусть ψ_i $(i = 1, 2, 3)$ — функции гармонические в $\widetilde{D}$ (реф. 9860.), $\vec{e} = (e_1, e_2, e_3)$ — постоянный вектор. Дается физическая интерпретация интеграла Дирихле для функции $\sum e_i \psi_i$, называемого «поляризацией» или «виртуальной массой» (различие в граничных условиях на поверхности S). Используя ранее полученные результаты (реф. 9860), автор устанавливает ряд неравенств (принадлежащих к так называемым изопериметрическим) для введенных количеств.

А. А. Дезин

9862. **Явления сингулярного возмущения.** **Юэ** (Phénomènes de perturbation singulière. Huet Denise), C. r. Acad. sci., 1957, 244, № 11, 1438—1440 (франц.)

Пусть A и B — эллиптические (в смысле Вишика — Лиона) (РЖМат, 1957, 1414) дифференциальные операторы. В соответствующих пространствах обобщенных функций изучается сходимость решений граничной задачи для оператора $\varepsilon A + B$ к решениям граничной задачи для оператора B. Рассмотрен пример, где $A = \Delta^2$, $B = -\Delta$. С помощью обобщенного преобразования Лапласа рассматриваются смешанные задачи для операторов вида $\varepsilon A + B + \partial/\partial t$; $\varepsilon A + B + \partial^2/\partial t^2$.

А. А. Дезин

9863. **О спектре несамосопряженного дифференциального оператора $-\Delta U + CU$ в трехмерном пространстве.** **Мартиросян Р. М.**, Изв. АН АрмССР. Сер. физ.-матем. н., 1957, 10, № 1, 85—111 (рез. арм.)

Пусть $L_2(E)$ — комплексное гильбертово пространство функций суммируемых с квадратом по всему трехмерному евклидову пространству. В $L_2(E)$ рассмотрим несамосопряженный оператор

$$Tu \equiv -\Delta u + c(Q)\,u; \quad c(Q) \in L_2(E).$$

Изучается спектр оператора T путем сведения задачи о собственных значениях к аналогичной задаче для некоторого интегрального оператора.

Получены следующие результаты: оператор T не может иметь остаточного спектра, а его непрерывный спектр совпадает с положительной полуосью; весь спектр лежит внутри некоторой параболы; дискретный спектр ограничен; если $c(Q)$ достаточно «мало», то дискретный спектр состоит лишь из конечного числа точек; резольвента T есть интегральный оператор с ядром $H(M, Q, \lambda)$ типа Карлемана, удовлетворяющим оценкам:

$$\int_E |H|^2\, dM < L(\lambda), \quad \int_E |H|^2\, dQ < L(\lambda),$$

где функция $L(\lambda)$ принимает конечные значения и зависит лишь от λ.

А. А. Дезин

9864. **О структуре семейства точных решений дифференциального уравнения в частных производных эллиптического типа $\Delta U = PU$.** **Кодзава**, Сугаку, 1955, 7, № 3, 9—21 (японск.)

9865. **О первой краевой задаче для одного эллиптического дифференциального уравнения с особым возмущением.** **Зламал** (Über die erste Randwertaufgabe für eine singulär perturbierte elliptische Differentialgleichung. Zlamal Milos), Чехосл. матем. ж., 1957, 7, № 3, 413—417 (нем.; рез. русск.)

Доказывается, что решение u_ε задачи Дирихле в области D для уравнения

$$-a(x, \varepsilon)\,\Delta u + u = F(x, \varepsilon),$$

где $a(x, \varepsilon) > 0$ и $a(x, \varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, сходится при $\varepsilon \to 0$ к $F(x, 0)$ равномерно в любой замкнутой области, лежащей внутри D. Ответим, что общее эллиптическое уравнение второго порядка с малым параметром ε при старших производных было ранее исследовано в работе С. Л. Каменомостской (РЖМат, 1956, 8821).

О. А. Олейник

9866. **О решении задачи Дирихле в полупространстве.** **Кшижанский** (O rozwiązaniu zagadnienia Dirichleta w półprzestrzeni. Krzyżański Mirosław), Zesz. nauk. Uniw. jagiell., 1957, № 14, 41—48 (польск.; рез. русск., франц.)

Известно что

$$u(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z\varphi(s, t)\, ds dt}{[(s-x)^2 + (t-y)^2 + z^2]^{3/2}} \qquad (1)$$

является непрерывным решением задачи Дирихле в трехмерном полупространстве $-\infty < x, y < \infty$, $z \geqslant 0$ для уравнения Лапласа и условия $u(x, y, 0) = \varphi(x, y)$, где $\varphi(x, y)$ — непрерывная ограниченная функция для $-\infty < x, y < \infty$.

Доказывается, что если непрерывная функция $\varphi(x, y)$ удовлетворяет неравенству

$$|\varphi(x, y)| < M(|x|^\alpha + |y|^\alpha)$$

(M, α — постоянные, $M > 0$, $0 < \alpha < 1$), то (1) дает непрерывное единственное решение задачи Дирихле в классе функций, удовлетворяющих неравенству $|u(x, y, z)| < M(|x|^\alpha + |y|^\alpha + z^\alpha)$.

Х. Л. Смолицкий

9867. **Теорема о снижении порядка.** **Дейвис** (A reduction-of-order theorem. Davis Robert B.), J. Math. and Phys., 1957, 36, № 2, 164-166 (англ.)

Утверждается, что метод Левинсона построения пограничного слоя (Levinson N., Ann. Math., 1950, 51, 428—445) для эллиптического уравнения второго порядка с малым параметром ε при старших производных может быть применен для получения асимптотического представления решения задачи Дирихле для этого уравнения по степеням ε при широких предположениях относительно коэффициентов уравнения. Это утверждение иллюстрируется на примере уравнения

$$\varepsilon^2 \Delta u + a u_\varepsilon = f(x, y), \quad a < 0,$$

для которого доказывается соответствующая теорема.

О. А. Олейник

9868. Исследование граничных задач для эллиптических систем дифференциальных уравнений на плоскости. Вольперт А. И., Докл. АН СССР, 1957, 114, № 3, 462—464

Для эллиптической в смысле И. Г. Петровского системы

$$\sum_{k+l \leqslant n} A_{kl}(z) \frac{\partial^{k+l} U}{\partial y^k \partial y^l} = F(z) \quad (z = x + iy \in D) \qquad (1)$$

исследуется граничная задача

$$\sum\nolimits_{k+l \leqslant n-1} [a_{kl}(t) U_{kl}^{+}(t) + \int_\Gamma b_{kl}(t, t_1) U_{kl}(t_1)\, ds] = f(t), \qquad (2)$$

$A_{kl}(z)$ — вещественные квадратные матрицы порядка p, непрерывные по Гёльдеру при $k + l < p$ и имеющие непрерывные в смысле Гёльдера производные первого порядка при $k + l = n$; $a_{kl}(t)$, $b_{kl}(t)$ матрицы размера $\left(\frac{np}{2} \times p\right)$ непрерывные по Гёльдеру; D — односвязная область, звездная относительно некоторого круга с гладкой в смысле Гёльдера границей.

Используя интегральное тождество С. Л. Соболева, автор с помощью подстановки $\frac{\partial^{n-1} U}{\partial x^{k-1} \partial y^{n-k}} = u_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ задачу (1) — (2) сводит к задаче

$$Lu = A(z) \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} + B(z) u + \iint_D R(z, \xi) u(\xi)\, d\xi d\eta = \widetilde{F}(z) + M(z) C, \qquad (3)$$

$$\Lambda u = a(t) u(t) + \int_\Gamma b(t, t_1) u(t_1)\, ds = \widetilde{f}(t) + N(t)\, C \qquad (4)$$

Здесь u — вектор размерности $2r = np$, C — постоянный вектор размерности $r(n-1)$.

С помощью методов И. Н. Векуа и фундаментальных матриц, построенных Я. Б. Лопатинским, задача (3)—(4) сводится к системе сингулярных интегральных уравнений.

Указывается формула для индекса системы и формулируются теоремы о разрешимости задачи (3)—(4).

В. С. Виноградов

9869. Добавление к методу Диаса—Гринберга. Николовиус (Beiträge zu Diaz-Greenberg—Methode. Nicolovius Rüdiger), Z. angew. Math. und Mech., 1957, 37, № 11—12, 449—457 (нем.; рез. англ., франц., русск.)

B — плоская конечная область; ее граница Γ кусочно-гладкая и состоит из частей Γ_i, $i = 1, 2, 3, 4$. В области B рассматривается уравнение

$$L[w] = \Delta\Delta w - (aw_x)_x - (aw_y)_y + bw = p, \quad a \geqslant 0, \; b \geqslant 0, \qquad (1)$$

при краевых условиях $\left(M[w] = \frac{\partial \Delta w}{\partial n} - a \frac{\partial w}{\partial n}\right)$

$$\left.\begin{aligned} w - sM[w] &= f \\ \frac{\partial w}{\partial n} + t\Delta w &= g \end{aligned}\right\} \text{ на } \Gamma_1, \qquad \left.\begin{aligned} M[w] &= f \\ \frac{\partial w}{\partial n} + t\Delta w &= g \end{aligned}\right\} \text{ на } \Gamma_3,$$

$$\left.\begin{aligned} w + q \frac{\partial w}{\partial n} - sM[w] &= f \\ \Delta w + qM[w] &= g \end{aligned}\right\} \text{ на } \Gamma_2, \qquad \left.\begin{aligned} M[w] &= f \\ \Delta w &= g \end{aligned}\right\} \text{ на } \Gamma_4$$

$s \geqslant 0$, $t \geqslant 0$; f, g, q, s, t — функции, определенные на Γ, соответственно Γ_i. Цель работы — построить приближенное решение этой задачи и оценить его погрешность. Автор применяет два способа, один из которых был применен ранее к более простым задачам Сингом, другой — Диасом и Гринбергом. По методу Синга строятся функции u, v, имеющие в $B + \Gamma$ непрерывные вторые производные и удовлетворяющие уравнениям $L[u] = P$,

$$\left.\begin{aligned} v - sM[u] &= f \\ \frac{\partial u}{\partial n} + t\Delta u &= g \end{aligned}\right\} \text{ на } \Gamma_1, \qquad \left.\begin{aligned} M[u] &= f \\ \frac{\partial v}{\partial n} + t\Delta u &= g \end{aligned}\right\} \text{ на } \Gamma_3,$$

$$\left.\begin{aligned} v + q \frac{\partial v}{\partial n} sM[u] &= f \\ \Delta u + qM[u] &= g \end{aligned}\right\} \text{ на } \Gamma_2, \qquad \left.\begin{aligned} M[u] &= f \\ \Delta u &= g \end{aligned}\right\} \text{ на } \Gamma_4.$$

Если ввести скалярное произведение

$$(\varphi, \psi) = \frac{1}{2} \iint_B \{\Delta\varphi\Delta\psi + a(\varphi_x\psi_x + \varphi_y\psi_y) + b\varphi\psi\}\, dxdy,$$

то в определяемой им норме

$$\left\| w - \frac{1}{2}(u + v) \right\| \leqslant \frac{1}{2} \| u - v \|.$$

Метод Диаса и Гринберга использует сингулярное решение уравнения (1) и дает возможность для любой точки $P \in B$ построить число $N \approx w(P)$ и оценить погрешность $|N - w(P)|$. В статье приведены некоторые численные примеры и дано применение метода Диаса — Гринберга к общему уравнению эллиптического типа второго порядка и к параболическому уравнению

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} - \frac{\partial}{\partial y}\left(a \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) = p, \quad a > 0,$$

с некоторыми смешанными краевыми условиями.

С. Г. Михлин

9870. Об одной краевой задаче для полигармонического оператора. Ефрон А. И. Тр. Ленингр. текстильн. ин-та, 1957, № 9, 319—328

9871. О сходимости интерполяционного метода для некоторых уравнений в частных производных эллиптического типа. Карпиловская Э. Б. В сб.: 15-я научн. конференция Ленингр. инж.-строит. ин-та, Л., 1957, 450—451

В качестве приближенного решения уравнения

$$\Delta u - \lambda p(x, y) u = q(x, y) \qquad (1)$$

при условии $u(x, y)|_\Gamma = 0$ ($\Gamma: y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$, $x = a$, $x = b$; λ — не собственное число) берется

$$u_n(x, y) = [y - \varphi_1(x)][\varphi_2(x) - y] \sum\nolimits_{k=1}^{n} y^{k-1} f_k(x),$$

где функции $f_k(x)$ определяются так, чтобы уравнение (1) удовлетворялось на линиях

$$y = m_i \varphi_2(x) + (1 - m_i) \varphi_1(x) \quad \begin{pmatrix} 0 \leqslant m_i \leqslant 1 \\ i = 1, 2, \ldots, n \end{pmatrix}$$

Утверждается, что при достаточно гладких контуре Γ и функциях $p(x, y)$ и $q(x, y)$ система обыкновенных дифференциальных уравнений, получающихся для $f_k(x)$, разрешима (начиная с некоторого n), если m_i суть узлы Чебышева или Гаусса. Даются оценки скорости сходимости метода. Доказательства не приводятся. Г. И. Натансон

9872. Об однозначной определенности решений дифференциального уравнения $\Delta U = F(x, U)$ по их поведению в одной точке. Хейн (Über die eindeutige Bestimmtheit von Lösungen der Differentialgleichung $\Delta U = F(x, U)$ durch ihr Verhalten in einem Punkt. Heyn Eugen), Math. Nachr., 1956, 15, № 4, 250—257 (нем.)

Исследуется единственность решения уравнения $\Delta U = F(x, U)$, где Δ — p-мерный лапласиан, x — точка в p-мерном евклидовом пространстве.

Доказана теорема: Пусть $U_1, U_2 \in C^2$ суть решения уравнения при $|x - x_0| \leqslant R_0$ и $F(x, U)$ удовлетворяет условию

$$|F(x, U) - F(x, U_1)| \leqslant C |x - x_0|^{-2} |U - U_1|,$$

где $|x - x_0| \leqslant R_0$, $|U(x) - U_1(x)| \leqslant \alpha$, $C = \text{const}$. Тогда, если $\int_{|x - x_0| = R} |U_1 - U_2|^2 ds = o(R^n)$ при $R \to 0$ и любом $n > 0$, то $U_1(x) \equiv U_2(x)$ при $|x - x_0| \leqslant R_0$.

Эта теорема обобщает результат К. Мюллера (РЖМат, 1955, 5036), полученный при более ограничительных условиях, налагаемых на $F(x, U)$.

Г. И. Натансон

9873. Об одной краевой задаче для волнового уравнения. Дун Гуан-чан (On a boundary value problem for the wave equation. Tong Kwang-chang), Sci. Rec., 1957, 1, № 5, 277—278 (англ.)

В области D, определяемой неравенствами $0 < z < 1/2$, $z < \sqrt{x^2 + y^2} < 1 - z$, ищется решение волнового уравнения $u_{xx} + u_{yy} = u_{zz}$, удовлетворяющее условиям

$$u(x, y, \sqrt{x^2 + y^2}) = \sigma(x, y);\ x + y^2 \leqslant 1/4,$$
$$u(x, y, 0) = \tau(x, y);\ x^2 + y^2 \leqslant 1,$$

где σ и τ — непрерывно дифференцируемые функции от x и y. Проттер (РЖМат, 1957, 5594) дал доказательство теорем существования и единственности для этой задачи. В статье строится пример, опровергающий теорему единственности Проттера. С. Г. Михлин

9874. Особые возмущения для одного линейного гиперболического уравнения второго порядка. Блондель (Perturbation singulière pour une équation du second ordre, linéaire et hyperbolique. Blondel Jean-Marie), C. r. Acad. sci., 1957, 245, № 18, 1496—1498 (франц.)

Рассматривается гиперболическое уравнение вида

$$\varepsilon\left(A\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) + a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} + cz = 0 \quad (1)$$

с достаточно гладкими коэффициентами, $\varepsilon > 0$. Предполагается, что $a \neq 0$, $b \neq 0$ и характеристики уравнения (1) не касаются интегральных кривых

$$dx/a = dy/b. \quad (2)$$

Исследуется поведение решений задачи Коши и задачи Гурса (с данными на двух характеристиках) для уравнения (1) при $\varepsilon \to 0$. Начальные условия в задаче Коши имеют вид: $z|_\Gamma = f(s)$, $\left.\frac{\partial z}{\partial n}\right|_\Gamma = g(s, \varepsilon)$, где Γ — некоторая гладкая неограниченная кривая, не касающаяся характеристик уравнения (1) и кривых (2), $g(s, \varepsilon)$ (—) равномерно ограничена по ε и s.

После перехода к характеристическим координатам (x_1, y_1) уравнение (1) принимает вид:

$$\varepsilon\frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial y_1} + (\varepsilon a_1 + a_2)\frac{\partial z}{\partial x_1} + (\varepsilon b_1 + b_2)\frac{\partial z}{\partial y_1} + c_2 z = 0.$$

Утверждается, что если $a_2 b_2 < 0$ или a_2 и b_2 отрицательны, то решение задачи Коши с такими начальными условиями не стремится к какому-либо пределу при $\varepsilon \to 0$, за исключением, быть может, случая некоторого специального выбора f и g.

Если a_2 и b_2 положительны, то при $\varepsilon \to 0$ решение $z_\varepsilon(x, y)$ задачи Коши для уравнения (1) равномерно на любом компактном множестве стремится к решению уравнения

$$a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} + cz = 0$$

с условием $z|_\Gamma = f(s)$. Аналогичные результаты формулируются для задачи Гурса. О. А. Олейник

9875. Априорные оценки в L_p и обобщенные решения эллиптических уравнений и систем. Кошелев А. И., Успехи матем. наук, 1958, 13, № 4, 29—88.

Для первой краевой задачи для линейной сильно эллиптической системы $Lu = f$ порядка $2m$, с помощью регуляризации тензора Грина этой задачи, построенной референтом, доказывается теорема существования решения в классе W_p^{2m} при любой $f \in L_p$. Результат распространяется на некоторые нелинейные системы.

О. В. Гусева

9876. Решения, удовлетворяющие начальным условиям и периодические по времени решения для нелинейного волнового уравнения. Фиккен, Флейшман (Initial value problems and time-periodic solutions for a nonlinear wave equation. Ficken F. A., Fleichman B. A.), Communs Pure and Appl. Math., 1957, **10**, № 3, 331—356 (англ.)

Рассматривается решение $u(x, t)$ уравнения

$$u_{xx} - u_{tt} - 2\varkappa u_t - \alpha u = \varepsilon u^3 + b(x, t), \quad (1)$$

определенное в области D_T $-\infty < x < \infty$ $0 \leqslant t \leqslant T \leqslant \infty$ ($T = \infty$, если $\varkappa > 0$, $\alpha > 0$) и удовлетворяющее начальным условиям

$$u(x, 0) = f(x),\ u_t(x, 0) = g(x). \quad (2)$$

Предполагается, что в D_T $b(x, t)$ — непрерывная ограниченная функция, имеющая первую производную по x, и что $f(x)$ и $g(x)$ имеют вторые производные. Введение некоторых интегральных операторов, содержащих функцию Бесселя J_0 нулевого порядка в качестве ядра, позволяет свести задачу (1)—(2) к решению интегрального уравнения. Методом последовательных приближений показано, что это уравнение, а тем самым и исходная задача имеет в D_T единственное решение $u(x, t)$, причем $\sup_{D_T} |u(x, t)| < R$ (R — некоторое число). Установлены соотношения, позволяющие судить о зависимости между R, T и величиной заданных функций и постоянных, входящих в (1)—(2). Если $\varkappa > 0$, $\alpha > 0$ и если для всякого решения, соответствующего рассматриваемым $f(x)$ и $g(x)$, мы имеем $\sup_{D_\infty} |u(x, t)| < \rho$, где ρ — число, выбранное надлежащим образом, то разность между любыми двумя такими решениями стремится к нулю при $t \to \infty$. Аналогичное справедливо для всех первых и вторых производных от этих решений. Если же, кроме указанного свойства, выполняется равенство $b(x, t + p) = b(x, t)$, то задача

(1), (2) имеет единственное решение $u(x, t)$ такое, что $u(x, t+p) = u(x, t)$. Г. Л. Мизернюк

9877. О нестационарном решении для скалярного потенциала в неограниченной среде. Фукумицу, Кюсю дайгаку когаку сюхо, Technol. Repts Kyushu univ. 1956, 28, № 4, 235—238 (японск.)

С помощью преобразования Лапласа дано решение трехмерного волнового уравнения в неограниченной среде с потерями при учете начальных условий.

9878. Волновое уравнение в конусе, усеченном концентрическими сферами. Белоносов С. М., Тр. Рязанск. радиотехн. ин-та, 1956, 1, 203—205

9879. Первая краевая задача для нелинейного параболического уравнения второго порядка. Пини (Sul primo problema di valori alcontorno per l'equazione parabolica non lineare del secondo ordine. Pini Bruno), Rend. Seminar. mat. Univ. Padova, Parte 1, 1957, 27, 149—161 (итал.)

Рассматривается первая краевая задача для уравнения

$$u_{xx}(P) - u_y(P) = f(P, u, u_x) \qquad (1)$$

в области $0 \leqslant x \leqslant 1$; $0 \leqslant y \leqslant h$. Левая часть уравнения (1) понимается в обобщенном смысле. Задача, с помощью функции Грина, сводится к интегро-дифференциальному уравнению. Условия (чрезвычайно громоздкие), налагаемые на f, обеспечивают применимость к интегро-дифференциальному уравнению одного из вариантов теоремы о неподвижной точке. Как следствие получается разрешимость исходной задачи. А. А. Дезин

9880. Первая краевая задача для квазилинейных параболических уравнений. Ладыженская О. А., Докл. АН СССР, 1956, 107, № 5, 636—639

Для параболического уравнения вида

$$L(u) \equiv \frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{ij=1}^{n} a_{ij}(x, t, u)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x, t, u)\frac{\partial u}{\partial x_i} + a(x, t, u) = 0 \qquad (1)$$

в цилиндре $Q_T = \Omega \times [0 \leqslant t \leqslant T]$ рассматривается задача с условиями

$$u|_{t=0} = \varphi_0(x),\ u|_S = 0, \qquad (2)$$

где S — боковая поверхность цилиндра Q_T, Ω — область в пространстве X, которую гладким образом можно отобразить на шар или шаровое кольцо. Предполагается, что

$$\frac{\partial a}{\partial u} \geqslant \beta_1,\ a = \min \sum a_{ij}\xi_i\xi_j \text{ при } \sum \xi_i^2 = 1,$$

$$\max\left|\frac{\partial a_{ij}}{\partial u}\right| \leqslant \frac{\alpha e\sqrt{3}}{12\, nC_1} \text{ при } |u| \leqslant C_1.$$

Для доказательства существования решения задачи (1), (2) применяется метод Роте, т. е. решение этой задачи получается как предел при $h \to 0$ решений u_h эллиптической системы уравнений, в которую переходит уравнение (1) при замене $\partial u/\partial t$ разностным отношением $[u(t+h, x) - u(t, x)]/h$. При некоторых слабых предположениях относительно коэффициентов (1) доказано существование обобщенного решения задачи (1), (2), т. е. функции $u(t, x)$, принадлежащей $L_2(Q_T)$, при любом фиксированном $t \subset [0, T]$ непрерывной по x в Ω и равной нулю на S, имеющей обобщенные ограниченные производные по x_k, обобщенные производные $\partial v/\partial t$, $\partial^2 u/\partial x_i \partial x_j$, принадлежащие $L_2(Q_T)$ и удовлетворяющей уравнению почти всюду. При более сильных предположениях на коэффициенты уравнения (1) получено решение задачи (1), (2), непрерывное в Q_T и имеющее внутри Q_T непрерывные производные, входящие в уравнение (1). Для входимости u_h устанавливаются равномерные оценки u_h и их производных до определенного порядка. При оценке первых производных u_h по x_i используются приемы, которые применялись ранее при решении первой краевой задачи для квазилинейного параболического уравнения в работе О. А. Олейник и Т. Д. Вентцель (РЖМат, 1955, 2204). Для интегральных оценок производных u_h по t и вторых производных по x_i, которые устанавливаются для построения обобщенного решения, используется неравенство, полученное автором для линейных параболических уравнений (РЖМат, 1956, 7371). Для равномерных оценок первой производной по t от u_h и более высоких производных по x_i в любой внутренней области по отношению к Q_T используются известные приемы С. Н. Бернштейна. Отметим, что в работе Т. Д. Вентцель (РЖМат, 1958, 6765) получено решение задачи (1), (2), непрерывное в Q_T вместе со всеми производными, входящими в уравнение (1). О. А. Олейник

9881. О задаче Коши с субгармоническими начальными данными. Вейнштейн (Sur un problème de Cauchy avec des données sousharmoniques. Weinstein Alexandre), C. r. Acad. sci., 1956, 243, № 25, 1993—1994 (франц.)

Пусть $u^k(x, t, f)$ — единственное решение сингулярной задачи Коши для уравнения Эйлера — Пуассона—Дарбу

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(t^k \frac{\partial u}{\partial t}\right) = t^k \sum_{1}^{m} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2};\ k \geqslant 0$$

при условиях $u = f(x)$, $u_t = 0$ при $t = 0$. Известно, что u^{m-1} выражается как среднее $M(x, t, f)$ от f по сфере радиуса t с центром в x. f называется p-субгармонической, если

$$\frac{\partial^i M(x, t, f)}{\partial t^i} \geqslant 0;\ i = 1, \ldots, p.$$

Устанавливаются свойства u при f p-субгармонической. Используется преобразование $s = t^{1-k}$ $(k \neq 1)$; $s = \ln t$, $(k = 1)$. А. А. Дезин

9882. Метод неполного разделения переменных в краевых задачах электростатики. Белоносов С. М., Тр. Рязанск. радиотехн. ин-та, 1956, 1, 187—202

9883. Общая теорема разложения по собственным функциям дифференциального оператора в частных производных эллиптического типа. Ито, Сугаку, 1955, 7, № 3, 1—9 (японск.)

9884. Поправка к статье Березанского «Обобщение теоремы Бохнера на разложение по собственным функциям уравнений в частных производных». Докл. АН СССР, 1957, 114, № 3, 454
РЖМат, 1957, 7065.

9885. О векторе Герца для цилиндрических волн. Ито, Хаяси, Кюсю дайгаку когаку сюхо, Technol. Repts Kyushu Univ., 1956, 28, № 4, 251—252 (японск.)

9886. Поправка к статье Маслова «Теория возмущений линейных операторных уравнений и проблема малого параметра в дифференциальных уравнениях». Докл. АН СССР, 1957, 114, № 5, 960
К РЖМат, 1957, 6364.

9887 К. **К проблеме уравнений смешанного типа. Бицадзе** (Zum Problem der Gleichungen vom gemischten Typus. Bizadse W. A. Übers. aus dem Russ. (Math. Forschungsber., Hrsg. von Prof. Dr. Heinrich Grell, V). Berlin, VEB dtsch. Verl. Wiss., 1957, 59 S., ill.) (нем.)

Перевод с русского, см. РЖМат, 1954, 2965. В книге переставлены инициалы автора: должно быть А. W. Bizadse.

ПРИЛОЖЕНИЯ К ФИЗИКЕ, ТЕХНИКЕ И ЕСТЕСТВЕННЫМ НАУКАМ

9888. **Принцип наименьшего принуждения в теории удара. Метелицын И. И.,** Изв. АН СССР, Отд. техн. н., 1957, № 11, 105—115

Выводится вариационное уравнение теории удара, из которого, как указывает автор, при различных предположениях о физических свойствах соударяющихся тел, можно получить все известные результаты теории удара. Полученное уравнение преобразуется к виду, содержащему возникающие при ударе внутренние импульсивные напряжения и относительные скорости деформаций более удобному для исследования различных конкретных случаев удара деформируемых тел.

В заключение преобразованное уравнение применяется к многочисленным задачам теории удара.

Э. Л. Блох

9889. **Об изменении собственных частот под действием малых связей. Даффин, Шилд** (On the change of natural frequencies induced by small constraints. Duffin R. J., Schild A.), J. Math. and Mech., 1957, 6, № 6, 731—758 (англ.)

Рассматриваются колебания линейной системы с малыми дополнительными связями. Если исходная система без связей S описывается функцией v и имеет потенциальную энергию $V(v)$, то при наложении связей невырожденные собственные значения изменяются на величину

$$\delta\lambda = \delta V, \qquad (1)$$

где δV — потенциальная энергия статистического отклонения, возникающего под действием сил, вызывающих дополнительные связи. Для вырожденных собственных значений получено соответствующее обобщение формулы (1).

Основные идеи работы заключаются в следующем. Пусть функции v, описывающие систему S, образуют действительное пространство $\widetilde{\mathscr{E}}$. Замыкая его с помощью положительно определенной метрики $V(v, w)$, построим действительное гильбертово пространство $\mathscr{E}$. Пусть $\widetilde{\mathscr{H}}$ (с замыканием $\mathscr{H}$) — подпространство $\widetilde{\mathscr{E}}$, порождаемое дополнительными связями, накладываемыми на S. Предполагается, что $\mathscr{H} = \mathscr{H}(\varepsilon)$ и $\mathscr{H}_1 \supset \mathscr{H}_2$ если $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$, где ε — параметр, характеризующий величину связей. Всякий вектор $v \in \mathscr{E}$ представляется в виде $v = v_s + w_s$, где $v_s \in \mathscr{H}_s$, а w_s ортогонален к $\mathscr{H}_s$. При $s \to \infty$ v_s сильно сходится к v_∞. Векторы v_∞ определяют пространство $\mathscr{H}_\infty$. Максимальные связи (соответствующие $\varepsilon = 0$) определяют подпространство $\mathscr{H}'$ ($\mathscr{H} \supset \mathscr{H}'$).

Вводится допущение (А): $\mathscr{H}' = \mathscr{H}_\infty$, тогда $\mathscr{H} = \mathscr{H}' \dotplus F$, где $V(\mathscr{H}', F) = 0$. Система S, характеризуемая подпространством $\mathscr{H}$, называется «системой без связей», система S', характеризуемая $\mathscr{H}'$, — «системой со связями». Пусть, далее кинетическая энергия системы дается полуопределенной квадратичной формой $T(v)$. Вводится допущение (Б): в пространстве $\mathscr{E}$ форма $T(v)$ вполне непрерывна относительно $V(v)$.

Для соботвенных значений λ_n' и собственных векторов q_n' системы S' справедливо

$$V(q_n', v') - \lambda_n' T(q_n', v') = 0, \; v' \in \mathscr{H}'. \qquad (2)$$

Выражение $V(q_n', v) - \lambda_n' T(q_n', v)$ определяет ограниченный линейный функционал в $\mathscr{H}$, поэтому существует вектор $\varphi_n \in \mathscr{H}$ такой, что

$$V(q_n', v) - \lambda_n' T(q_n', v) = V(\varphi_n, v).$$

Из (2) $0 = V(\varphi_n, v')$, т. е. $\dot{\varphi}_n \in F$. Вектор φ_n^* имеет смысл статистического отклонения системы под действием связей.

По предположению $T(v, w) = \sum_{n=1}^{\infty'} T(v, q_n) T(w, q_n)$ вполне непрерывна.

Отсюда следует, что

$$V(\varphi_n) = \frac{\lambda_n'}{\lambda_n'}(\lambda_n' - \lambda_n)\,[T(q_n', q_n)]^2 + \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^{\infty} \frac{\lambda_n' \lambda_m}{\lambda_n' - \lambda_m}\,[T(\varphi_n, q_m)]^2, \qquad (3)$$

где λ_n и q_n — собственные значения и собственные векторы системы S. Последний член в (3) имеет порядок $o[T(\varphi_n)]$. В силу предположения (А) нормированный вектор $\varphi_n / [V(\varphi_n)]^{1/2}$ слабо сходится к нулю и, следовательно, $T\left(\frac{\varphi_n}{[V(\varphi_n)]^{1/2}}\right) = \frac{T(\varphi_1)}{V(\varphi_n)} \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Отсюда и из (3) следует формула (1):

$$\lambda_n' - \lambda_n = V(\varphi_n) + o[V(\varphi_n)].$$

Во второй части работы рассматриваются приложения общего метода к задачам о колебании струны, мембраны и пластинки.

Примечания референта. 1) Для механических систем допущения (А) и особенно (Б) представляют собой самостоятельные проблемы и нуждаются в строгом обосновании. 2) Целый ряд возмущений колеблющихся систем (дополнительные нагрузки на систему, изменение границ электромагнитных резонаторов) не укладывается в рамки реферируемой работы, так как пространства $\mathscr{H}$ и $\mathscr{H}'$ оказываются не содержащимися друг в друге. 3) Результаты настоящей работы в области ее применимости совпадают с первым приближением метода последовательных приближений (см. работу референта: Докл. АН СССР, 1956, 111, № 1, 94). Ю. Н. Днестровский

9890. **Об уравнениях колебаний упруго-вязкой нити (каната) с переменной массой на конце. Ющенко** (Про рівняння коливань пружно-в'язкої нитки (каната) зі змінною масою на кінці. Ющенко О. А.). Доповіді АН УРСР, 1956, № 3, 235—237 (укр.; рез. русск.)

См. РЖМех, 1957, 12019.

9891. **Диффузия газа в окрестности пузырьков кавитации. Сюке** (Diffusion des gaz au voisinage d'une bulle de cavitation. Suquet P.), J. phys. et radium, 1957, 18, № 12, 676—680 (франц.; рез. англ.)

Рассматриваются задачи о сферически симметричной диффузии газа вне шара (пузырька) кавитации, внутри него, а также для сферического слоя в окрестности шара кавитации. Подсчитываются нормальные произ-

водные концентрации на поверхности шара и оценивается время его существования. Ю. Н. Днестровский

9892. **Постоянная времени переходных явлений. А в р а м е с к у А у р е л,** Ж. электротехн. и энергет. Акад. РНР, 1956, 1, № 2, 7—14

Для процессов с чисто экспоненциальным затуханием $f(t)=e^{-t/T}$ постоянная времени равна $T=S_0^\infty f(t)dt$. Предлагается использовать это выражение в качестве определения постоянной времени для более сложных процессов. Приводятся примеры (охлаждение шара, пластины, цилиндра), подтверждающие рациональность такого определения. Ю. Н. Днестровский

9893. **Малые колебания во вращающейся жидкости. О з е р** (Erzwungene Schwingungen in rotierenden Flüssigkeiten. O s e r Hansjörg), Arch. Ration. Mech. and Analysis, 1957, 1, № 1, 81—96 (нем.)

Несжимаемая невязкая жидкость вращается с угловой скоростью ω вокруг оси z_1. Диск радиуса r_0, перпендикулярный оси z_1 с центром на оси z_1, совершает малые гармонические колебания вблизи плоскости $z_1=0$. Проекции скорости u, v, w по направлениям r_1, φ, z_1 цилиндрической системы координат представляются в виде:

$$u=\frac{U(r_1, z_1)\sin\beta t}{m};\quad v=\frac{\beta V(r_1, z_1)\cos\beta t}{m2\omega};$$

$$w=W(r_1, z_1)\sin\beta t.$$

Функция W удовлетворяет уравнению

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r_1^2}+\frac{1}{r_1}\frac{\partial}{\partial r_1}+\frac{\beta^2-4\omega^2}{\beta^2}\frac{\partial^2}{\partial z_1^2}\right)W=0,$$

а функции U и V уравнению

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r_1^2}+\frac{1}{r_1}\frac{\partial}{\partial r_1}-\frac{1}{r_1^2}+\frac{\beta^2-4\omega^2}{\beta^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)(U, V)=0.$$

Все эти уравнения будут эллиптического или гиперболического типа в зависимости от знака $(\beta^2-4\omega^2)/\beta^2$. Рассматривается только гиперболический случай.

После замены переменных

$$r_1=rr_0;\quad z_1=zr_0m;\quad m^2=\frac{4\omega^2-\beta^2}{\beta^2}$$

решение уравнения для $W(r, z)$, удовлетворяющее граничным условиям, находится в виде:

$$W(r, z)=\int_0^\infty J_0(kr)\,J_1(k)\cos(kz)\,dk,$$

где $J_0(kr)$ и $J_1(k)$ — бесселевы функции. Аналогично для $U(r, z)$ и $V(r, z)$ получена формула

$$U=V=\int_0^\infty J_1(kr)\,J_1(k)\sin(kz)\,dk.$$

Произведен подробный анализ решения и числовые подсчеты $U=V$, W и давления. М. И. Гуревич

9894. **Медленное неустановившееся движение вязкой жидкости в полуплоскости. Р у с а н о в Б. В.,** Вестн. Ленингр. ун-та, 1956, № 13, 109—118
См. РЖМех, 1957, 8987.

9895. **Об установившемся потоке несжимаемой вязкой жидкости, допускающем семейство ортогональных плоскостей. А л е к с е е в Н. И.,** Тр. Моск. авиац. ин-та, 1956, вып. 61, 5—19
См. РЖМех, 1958, 725.

9896. **О возбуждении поверхностных волн потоками. М а й л с** (On the generation of surface waves by shear flows. M i l e s John W.), J. Fluid Mech., 1957, 3, № 2, 185—204 (англ.)
См. РЖМех, 1958, 8833.

9897. **Интегро-дифференциальные уравнения движения границы раздела двух жидкостей в пористой среде. Д а н и л о в В. Л.,** Изв. Казанск. фил. АН СССР. Сер. физ.-матем. и техн. н., 1957, вып. 11, 99—133

Дается теория движения границы раздела двух несмешивающихся жидкостей в пористой среде. Методами теории потенциала двумерная задача определения положения границы Г, определяемой уравнением $F(x, y, t)=0$, сведена к задаче Коши для нелинейного интегро-дифференциального уравнения

$$\left(\frac{\partial F}{\partial t}\Big/\frac{\partial F}{\partial n}\right)-\frac{\lambda}{\pi}\int_{(\Gamma)}\left(\frac{\partial F}{\partial t}\Big/\frac{\partial F}{\partial n}\right)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)d\sigma=$$

$$=\frac{2}{m}\,\frac{c_1c_2}{c_1+c_2}\,\frac{\partial\varphi}{\partial n},\qquad (A)$$

где

$$r=[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2]^{1/2},\quad (x, y;\ \xi, \eta\in\Gamma);$$

n — нормаль к искомому контуру, c_1, c_2 — коэффициенты текучести соответственно внутри и вне Г, $\lambda=\dfrac{c_1-c_2}{c_1+c_2}$, m — пористость, φ — известная функция, зависящая от интенсивности и положения скважин. Аналогичное уравнение получено для трехмерного случая. Как частные случаи, из уравнения (А) вытекают уравнения движения одножидкостной системы ($c_1=c_2$) и уравнение для схемы Л. С. Лейбензона ($c_2=\infty$).

Уравнение (А) для звездного контура Г автор записывает в полярных координатах, что позволяет избежать интегрирования по неизвестному контуру, и предлагает для него численный метод решения, сходный с «методом ломаных» для обыкновенного дифференциального уравнения. Для общего случая указано два графо-аналитических способа построения последовательных положений искомого контура. Получены уравнения движения частиц жидкости, прилегающих к границе раздела, для численного решения которых предложены аналогичные методы.

Далее задача о перемещении границы рассмотрена при наличии контура питания; в этом разделе задача исследуется также при заданных забойных давлениях. Получена формула для дебита, обобщающая формулу Дюпюи на случай двухжидкостной системы. Примеров, позволяющих оценить эффективность предложенных методов численного решения, в статье не приводится. М. Т. Нужин

9898. **К простейшей задаче управления контуром нефтеносности. П у д о в к и н М. А.,** Уч. зап. Казанск. ун-та, 1957, 117, № 2, 83—85

В одномерном пласте длины L, при упруговодонапорном режиме, под действием нагнетательной ($x=0$) и отборочной ($x=L$) галерей скважин происходит «поршневое» вытеснение нефти водой. Фильтрация неустановившаяся; задан закон продвижения вертикального водонефтяного контакта: $x_0(t)=A\sqrt{t}$.

Задача заключается в решении системы

$$a_1^2\frac{\partial^2p_1}{\partial x^2}=\frac{\partial p_1}{\partial t},\quad 0\leqslant x\leqslant x_0(t)\quad t>0,$$

$$a_2^2\frac{\partial^2p_2}{\partial x^2}=\frac{\partial p_2}{\partial t},\quad x_0(t)\leqslant x\leqslant L,\quad t>0,$$

при условиях

$$p_2(x, 0)=0,\quad p_1(x, t)=p_2(x, t),$$

$$c_1\frac{\partial p_1}{\partial x}=c_2\frac{\partial p_2}{\partial x},\quad x=x_0(t).$$

При этих условиях получены явные выражения для давлений $p_1(x, t)$, $p_2(x, t)$ в воде и нефти, откуда выте-

кают искомые режимы давлений (дебитов) галерей. Далее определено $p_2(x, t)$, если $p_1(0, t) = 0$, а начальным условием для $p_2(x, t)$ можно пренебречь. М. Т. Нужин

9899 Об одной задаче подземной гидромеханики. Расулов М. Л., Научн. зап. Львовск. политехн. ин-та, 1956 (1957), вып. 38, 66—89

Рассматривается нестационарная задача фильтрации к центральной скважине в круговом пласте. Пласт предполагается состоящим из двух однородных частей, заключенных между поверхностями вертикальных цилиндров, концентрических со скважиной.

Задача приводится к смешанной задаче для уравнений

$$\frac{\partial p_i}{\partial t} = \varkappa_i \left(\frac{\partial^2 p_i}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p_i}{\partial r} \right), \qquad (1)$$

где $p_i(x, y, t)$ — пластовое давление для i-й среды ($i = 1; 2$) в точке (x, y) в момент времени t, a — радиус скважины, b — радиус контура раздела, c — внешний радиус пласта, с граничными условиями

$$\left.\frac{\partial p_1}{\partial r} + \alpha \frac{\partial p_2}{\partial r}\right|_{r=a} = 0, \quad p_1 - p_2|_{r=b} = 0, \qquad (2)$$

$$\left.\frac{\partial p_1}{\partial r} + \beta \frac{\partial p_2}{\partial r}\right|_{r=b} = 0, \quad p_2|_{r=c} = p_k = \text{const};$$

и с начальными условиями

$$p_i(r, 0) = \varphi_i(r). \qquad (3)$$

При этом предполагается, что $\varphi_2(c) = p_k$, $\varphi_1(b-0) = \varphi_2(b+0)$, где $\varphi_i(r)$ непрерывны в области движения вместе с производными до 2-го порядка, α, β, $\varkappa_i$ — постоянные числа (по физическому смыслу $\varkappa_i > 0$; α, $\beta < 0$).

Поставленная задача сводится к двум следующим:

А. Задача нахождения решений уравнений (1) при неоднородных граничных условиях (2) и нулевых начальных условиях (3).

В. Задача нахождения решений уравнений (1) при однородных граничных условиях (2) и при ненулевых начальных условиях (3).

При помощи вычетного метода доказывается существование решений для вспомогательных задач А и В при следующих условиях:

Теорема 1. Задача А при всяком $\beta \neq |\sqrt{\varkappa_2/\varkappa_1}|$ имеет в области движения непрерывное при $0 \leqslant t \leqslant T$ решение $u_i(r, t)$, представимое формулой

$$u_i^{(1)}(r, t) = -\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \lim_{N\to\infty} \int_{T_N} \frac{y_i(r, \lambda)}{\lambda} e^{\lambda^2 t} d\lambda,$$

где λ — комплексный параметр.

Теорема 2. Задача В при всяком $\beta \neq |\sqrt{\varkappa_2/\varkappa_1}|$ имеет в области движения непрерывное при $0 \leqslant t \leqslant T$ решение $U_i(r, t)$, представимое формулой

$$U_i^{(2)}(r, \lambda) = -2 \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \lim_{N\to\infty} \int_{T_N} y_i(r, \lambda) \lambda e^{\lambda^2 t} dt.$$

Библ. 4 назв. П. Ф. Фильчаков

9900. Об обратных задачах теории фильтров и λ зон устойчивости. Крейн (On the inverse problem of filter theory and the λ zones of stability. Krein M. G. West Concord, Mass., 1955,, 7 pp., 3.50 doll.) (англ.)

Перевод с русского см. РЖМат, 1954, 4414.

9901. Решение плоской динамической задачи теории упругости. Гладуэлл (On the soeution of problems of dynamic plane elasticity. Gladwell G. M. L.), Mathematika, 1957, 4, № 8, 166—168 (англ.)

На основании комплексных выражений для перемещений $D = u + iv$ и представлений Г. В. Колосова для напряжений $\Theta = \widetilde{xx} + \widetilde{yy}$, $\Phi = \widetilde{xx} - yy + 2i\widetilde{xy}$ показано, что результаты Радока (РЖМат, 1957, 3218) по плоской динамической задаче теории упругости могут быть получены проще, если систематически применять при выводе основных уравнений задачи теорию функций комплексного переменного. Далее, в случае распространения возмущения параллельно оси Ox со скоростью c для функций Θ, Φ и D получены представления:

$$\Theta = \frac{A\rho c^2(\lambda+\mu)}{2\mu(\lambda+2\mu)} \{\Omega_1'(z_1) + \overline{\Omega_1''(z_1)}\}, \qquad (1)$$

$$4\mu D = A[(1-\beta_1)\Omega_1'(z_1) + (1+\beta_1)\overline{\Omega_1''(z_1)}] + B[(1-\beta_2)\Omega_2'(z_2) + (1+\beta_2)\overline{\Omega_2'(z_2)}], \qquad (2)$$

$$\Phi = 4\mu \frac{\partial D}{\partial z}, \qquad (3)$$

где $z = x + iy$; $\bar{z} = x - iy$; A и B — действительные произвольные постоянные; $\Omega_j(i = 1, 2)$ — аналитические функции комплексных переменных:

$$z_1 = \xi + i\beta_1\eta; \quad z_1 = \xi + i\beta_2\eta; \qquad (4)$$

$$\beta_1 = \sqrt{1 - \frac{\rho c^2}{\lambda + 2\mu}}; \quad \beta_2 = \sqrt{1 - \frac{\rho c^2}{\mu}};$$

функция $\overline{\Omega_j(z_j)}$ — сопряженная функции $\Omega_j(z_j)$; ρ — плотность среды; λ и μ — упругие постоянные Ламе.

Указывается также, что к виду (1) и (2) при условии (4) сводится плоская задача теории упругости для ортотропной среды. Г. Н. Савин

9992. Решение плоской задачи теории упругости для прямоугольника в перемещениях. Абрамян Б. Л., Манумян М. М., Докл. АН АрмССР, 1957, 25, № 4, 177—184 (рез. арм.)

Рассматривается плоская задача теории упругости для прямоугольника при заданных перемещениях $u(x, y)$ и $v(x, y)$ на его контуре, которые предполагаются кусочно-непрерывными, имеющими ограниченное изменение функции в соответствующих интервалах. Функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ ищутся в виде бесконечных разложений по тригонометрическим и гиперболическим функциям.

Решение поставленной задачи сводится к определению коэффициентов этих разложений из граничных условий, что в конечном итоге приводит к решению бесконечных систем линейных уравнений.

Доказывается, что полученные системы вполне регулярны (для $\nu \leqslant 0{,}367$) имеют ограниченные сверху свободные члены, что позволяет оценить неизвестные коэффициенты с любой точностью, а с помощью этих оценок определить верхние и нижние границы для перемещений и напряжений. Г. Н. Савин

9903. Смешанная задача теории потенциала для пространства с круглой щелью. Онищенко (Змішана задача теорії потенціалу для простору з плоскою круглою щілиною. Онищенко В. І. Доповіді АН УРСР, 1958, № 1, 21—28 (укр.; рез русск., англ.)

Рассматривается смешанная задача теории упругости для пространства, ослабленного круглой плоской щелью, на одной стороне которой заданы компоненты внешнего напряжения, а на другой перемещения.

Поставленная задача сводится к решению осесимметричной смешанной задачи и теории потенциала для

двух гармонических функций в пространстве с плоской круглой щелью, на сторонах которой заданы значения функций и их нормальных производных. Решение поставленной задачи дано в квадратурах. Г. Н. Савин

9904. **О поперечных колебаниях пологих сферических оболочек. Джонсон, Рейснер** (On transverse vibrations of shallow spherical shells. Johnson Millard W., Reissner Eric), Quart. Appl. Math., 1958, 15, № 4, 367—380 (англ.)

Исследуются, с учетом продольной жесткости, типы свободных колебаний упругой тонкой оболочки, имеющей форму полого сферического сегмента, край которого свободен. Основное допущение состоит в том, что нормальные смещения точек серединной поверхности полагаются параллельными оси сегмента. Разделением переменных в цилиндрических координатах находятся точные решения соответствующей краевой задачи. Произведено детальное сравнение спектра свободных колебаний оболочки со спектром плоской пластинки той же толщины и со спектром мембраны. Даны оценки доли энергии деформаций удлинения в общей энергии колебаний. Н. А. Ростовцев

9905. **Приложение теории пластинок для определения термоупругих напряжений. Треммель** (Über die Anwendung der Plattentheorie zur Bestimmung von Wärmespannungsfeldern. Tremmel E.), Österr. Ingr-Arch., 1957, 11, № 3, 165—172 (нем.)

Изучается плоская задача термоупругости для односвязной области со свободной границей. Температурное поле задается распределением источников $W(x, y, t)$, а также начальным распределением температуры $\vartheta(x, y, 0)$ и условиями на границе области. При этом напряжения выражаются через функцию Эри Ψ, которая удовлетворяет уравнению

$$\Delta\Delta\Psi = \frac{1+\nu}{1-\nu}\,\alpha\left(-\frac{1}{a}\frac{\partial\vartheta}{\partial t}+\frac{W}{\lambda}\right)$$

(ν — коэффициент Пуассона, α — коэффициент линейного расширения, а a и λ — коэффициенты температуро- и теплопроводности) и граничным условиям: $\Psi = 0$, $\partial\Psi/\partial n = 0$.

Подчеркивается аналогия между этой задачей и задачей о прогибе конгруэнтной пластинки под действием нагрузки, перпендикулярной к ее плоскости. С. С. Дымков

9906. **Задача о частичном обжатии. Спаренберг** (On a shrink-fit problem. Sparenberg J. A.), Appl. Scient. Res., 1958, A7, № 2-3, 109—120(англ.)

Рассматривается задача о распределении упругих напряжений в бесконечной трубе, надетой на полубесконечный жесткий круглый стержень. Толщина стенки трубы предполагается всюду постоянной. Трение на контактной поверхности не учитывается. Задача сводится к линейному интегральному уравнению первого рода с разностным ядром

$$\vartheta = \int_0^\infty u_0(x-\xi)\,\sigma_r(a, \xi)\,d\xi.$$

Используя уравнения теории упругости, автор строит по методу Лява функцию напряжений, через которую выражается нормальное напряжение $\sigma_r(r, x)$ и ядро интегрального уравнения. При помощи преобразования Винера—Хопфа ядро найдено в форме

$$u_0(x) = -\frac{1-\nu^2}{\pi E}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x}\,\frac{N(a, b, \lambda)}{\lambda D(a, b, \lambda)}\,d\lambda.$$

Здесь $N(a, b, \lambda)$ и $D(a, b, \lambda)$ обозначают некоторые аналитические выражения, содержащие функции Бесселя: $K_0(z)$, $K_1(z)$, $I_0(z)$, $I_1(z)$. В. П. Пилатовский

9907. **Нестационарная задача дифракции звуковых волн. Каспарьянц А. А.**, Научн. ежегодник. Одесск. ун-т, 1956, Одесса, 1957, 136—140

Рассматривается нестационарная задача о дифракции на абсолютно жестком теле T с границей S волн, возбуждаемых точечным источником $\sim e^{i\omega t}$, расположенным в точке I вне тела и включаемым при $t = 0$. Решение поставленной задачи дается в виде

$$\varphi(t, M) = e^{i(\omega t+\varepsilon)}\iint_{S_i}\rho(N)\,\frac{e^{-ikr_{MN}}}{r_{MN}}\,ds_N,$$

где S_i — часть поверхности S, лежащая внутри эллипсоида вращения $r^* + r = ct$ с фокусами в точках M и I, r^* — расстояние до точки I, а $\rho(N)$ является решением интегрального уравнения

$$\rho(N_0) = -\frac{1}{2\pi}\widetilde{f}(N_0) + \frac{1}{2\pi}\iint_S \rho(N)\,\frac{\partial}{\partial n_0}\left(\frac{e^{-ikr_0}}{r_0}\right)ds,$$

где $r_0 = N_0N$, а $\widetilde{f}(N_0)$ — граничные значения на поверхности S решения соответствующей стационарной задачи дифракции. Ю. Н. Днестровский

9908. **Решение уравнения Гельмгольца для определенного класса цилиндрических и аксиальных координатных систем, в которых переменные не разделяются. Уэстон** (Solutions of the Helmholtz equation for a class of non-separable cylindrical and rotational coordinate systems. Weston Vaughan H.), Quart. Appl. Math., 1958, 15, № 4, 420—427 (англ.)

Пусть $F(w) = \xi_1(u_1, u_2) + i\xi_2(u_1, u_2)$ — аналитическая функция w. Рассматриваются цилиндрические координатные системы, для которых $x = \xi_1(u_1, u_2)$, $y = \xi_2(u_1, u_2)$, $z = u_3$, а также координатные системы с осью вращения, для которых $x = \xi_1\cos\varphi$, $y = \xi_1\sin\varphi$, $z = \xi_2$ или $x = \xi_2\cos\varphi$, $y = \xi_2, \sin\varphi$, $z = \xi_1$. Доказывается теорема: Если в координатной системе с осью вращения существует координата u_i ($i \neq 3$) такая, что для коэффициентов Ляме h_i выполняются соотношения

$$\frac{\partial h_3}{\partial u_1} = \sum_{s=N_1}^{M_1} f_s(u_i)\,[h_3(u_1, u_2)]^s \text{ и}$$

$$h_1^2 = \sum_{s=N_2}^{M_2} c_s(u_i)\,[h_3(u_1, u_2)]^s,$$

где $N_1 \leqslant M_1$, $N_2 \leqslant M_2$ — целые числа, а $f_s(u_i)$ и $c_s(u_i)$ — некоторые функции, требования на которые в работе не сформулированы, тогда

$$\psi(u_1, u_2, \varphi) = e^{i\mu\varphi}\sum_r a_r(u_i)\,[h_3(u_1, u_2)]^r$$

есть решение уравнения $\Delta\varphi + k^2\varphi = 0$, где $a_2(u_i)$ удовлетворяют системе уравнений

$$\frac{d^2a_r}{du_i^2} + \sum_{q=r+1-N_1}^{r+1-M_1}\frac{da_q}{du_i}(2q+1)\,f_{r+1-q}(u_i) +$$

$$+ \sum_{q=r+2-N_2}^{r+2-M_2}(q^2-\mu^2)\,a_q(u_i)\,C_{r+2-q}(u_i) +$$

$$+ k^2\sum_{q=r-N_2}^{r-M_2} a_q(u_i)\,c_{r-q}(u_i) = 0.$$

Доказывается также теорема более общего вида. Аналогичные результаты получены и для цилиндри-

ческих координатных систем. В качестве примеров рассмотрены биполярные, бисферические и тороидальные системы координат. Ю. Н. Днестровский

9909. Функция Грина для периодических структур в теории дифракции с приложением к среде из параллельных пластин. II. Хейнс (The Green's function for periodic structures in diffraction theory with an application to parallel plate media. II. Heins Albert E.), J. Math. and Mech., 1957, 6, № 5, 629—639 (англ.)

В части I работы (РЖМат, 1958, 7781) построена функция Грина уравнения $\Delta\varphi + k^2\varphi = 0$ для периодической структуры в виде бесконечной системы параллельных полуплоскостей с граничными условиями первого рода ($\varphi = 0$). Часть II посвящена задаче с граничными условиями второго рода. Формальное проведение метода первой части работы приводит к интегральному уравнению с неинтегрируемым ядром. Эта трудность устраняется специальным приемом. Построенное уравнение решается методом Винера—Хопфа. Последний параграф посвящен вычислению коэффициентов отражения и преломления системы параллельных полуплоскостей при падении на нее плоской волны. Ю. Н. Днестровский

9910. О групповой скорости в проводящей среде. Нардини (Sulla velocità di gruppo nei mezzi elettricamente conduttori. Nardini Renato), Boll. Unione mat. ital., 1957, 12, № 4, 523—525 (итал.; рез. англ.)

Рассматривается распространение плоских электромагнитных волн вида

$$e^{i\omega(t-\alpha x)-\beta\omega z}\ (\omega,\ \alpha,\ \beta > 0)$$

в среде с диэлектрической постоянной ε, магнитной проницаемостью μ и проводимостью γ. На основании уравнений Максвелла для постоянных α и β получены выражения

$$\alpha^2 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\varepsilon^2\mu^2 + \frac{\gamma^2\mu^2}{\omega}} + \varepsilon\mu\right),$$

$$\beta^2 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\varepsilon^2\mu + \frac{\gamma^2\mu^2}{\omega^2}} - \varepsilon\mu\right). \qquad (1)$$

Тогда значение групповой скорости V_g определяется формулой

$$V_g = \frac{1}{d\alpha\omega / d\omega} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha^3} = \left(1 + \frac{\beta^2}{\alpha^2}\right) V_f,$$

где $V_f = 1/\alpha$ — фазовая скорость. Отсюда и из (1) следует, что

$$V_f \leqslant V_g < 2V_f.$$

Ю. Н. Днестровский

9911 Д. Смешанная задача теории потенциала и теории упругости для пространства с плоской круглой щелью. Онищенко В. И. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Днепропетр. ун-т, Днепропетровск, 1958

См. также: 9731, 9965, 9968, 9979, 10283, 10284, 10285, 10288.

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Редактор *В. В. Немыцкий*

9912. Достаточные условия равномерной полной непрерывности. Го Да-цзюнь, Сычуань дасюэ сюэбао (цзыжань кэсюэ), Acta scient. natur. Univ. szechuan., 1957, № 2, 197—211 (кит.; рез. русск.)

Устанавливаются достаточные условия равномерной полной непрерывности линейных интегральных операторов (Го Да-цзюнь, Сычуань дасюэ сюэбао, 1957, № 1, 79—96).

Пусть $\mathfrak{M}$ — множество ядер $K(s, t) \in L^q(\Delta \times \Delta)$, где $q > 1$ и Δ — отрезок числовой оси; $K_h(s, t)$ — функция Стеклова функции $K(s, t)$. Тогда, если: а) существует такое $M \geqslant 0$, что $\|K(s, t)\|_{L^q} \leqslant M$ для всех $K(s, t) \in \mathfrak{M}$, и б) норма $\|K_h(s, t) - K(s, t)\|_{L^q}$ стремится к нулю равномерно относительно $K(s, t) \in \mathfrak{M}$ при $h \to 0$, то операторы

$$Kx = \int_\Delta K(s, t)\, x(t)\, dt,\ K(s, t) \in \mathfrak{M},$$

действующие из $L^p(\Delta)$ $(p^{-1} + q^{-1} = 1)$ в $L^q(\Delta)$, равномерно вполне непрерывны. Это утверждение остается справедливым, если условие б) заменить условием в): норма $\|K(s+\sigma, t+\tau) - K(s, t)\|_{L^q}$ стремится к нулю равномерно относительно $K(s, t) \in \mathfrak{M}$ при $(\sigma, \tau) \to (0, 0)$. Для случая, когда $\Delta = (-\infty, \infty)$, равномерная полная непрерывность указанных выше операторов имеет место, если $\sup_{K(s,t)\in\mathfrak{M}} \{\int_\Delta |K(s, t)|^q\, dt\}^{1/q} \in L^q$ и выполняется условие б) или в). С помощью этих признаков устанавливаются достаточные условия равномерной полной непрерывности операторов следующих видов:

$$y_m = \sum_{n=1}^{\infty} a_{m,n} x_n,\ \{x_n\} \in l^p,\ \{y_n\} \in l^q;$$

$$y(s) = \sum_{n=1}^{\infty} K_n(s)\, x_n,\ \{x_n\} \in l^p,\ y(s) \in L^q(-\infty, \infty);$$

$$y_m = \int_{-\infty}^{\infty} K_m(t)\, x(t)\, dt,\ x(s) \in L^p(-\infty, \infty),\ \{y_n\} \in l^q.$$

Здесь всюду $p > 1$ и $p^{-1} + q^{-1} = 1$.

Примечание референта. На протяжении всей работы вместо q ошибочно напечатано 2.

И. В. Шрагин

9913. Некоторые вопросы, связанные с уравнениями типа свертки. Яновский С. В., Уч. зап. Ростовск.-н/Д. гос. пед. ин-та, 1957, вып. 4, 79—88

Изучаются некоторые свойства системы интегро-дифференциальных уравнений типа свертки

$$\sum_{\substack{j=1,\ n\\ k=0,\ m}} \left[\lambda_{ijk} f_j^{(k)}(x) + \int_0^\infty K'_{ijk}(x-t)\, f_j^{(k)}(t)\, dt + \int_{-\infty}^0 K''_{ijk}(x-t)\, f_j^{(k)}(t)\, dt + \int_{-\infty}^{\infty} K_{ijk}(x-t)\, f_j^{(k)}(t)\, dt\right] = q_i(x),$$

$$-\infty < x < \infty;\ i = 1, \ldots, n.$$

Вопрос о существовании решений приведенной системы интегро-дифференциальных уравнений не рассматривается. Я. В. Быков

9914. Сингулярные интегральные уравнения. Михлин С. Г., Шусюэ цзиньчжань, 1958, 4, № 1, 55—122 (кит.)

Перевод из журнала «Успехи матем. наук», 1948, 3, № 3, 29—112.

9915. О резольвенте сингулярного интегрального уравнения. Берг (Über die Resolvente einer singulären Integralgleichung. Berg Lothar), Math. Nachr., 1956, 15, № 5—6, 339—352 (нем.)

В предыдущей статье автора (РЖМат, 1957, 6695) было введено понятие резольвенты $\Gamma(t, \tau)$ сингулярного интегрального уравнения с ядром Коши

$$K\varphi \equiv a(t)\varphi(t) + \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{K(t,\tau)}{\tau - t}\varphi(t)\,d\tau = f(t) \qquad (1)$$

и получены для нее два интегральных уравнения, представляющих собою обобщение аналогичных уравнений, известных в теории Фредгольма. На основе этих уравнений в настоящей работе устанавливается следующее.

1. Выводятся некоторые свойства резольвенты; в частности, изучаются собственные функции резольвенты, рассматриваемой как ядро сингулярного интегрального уравнения типа (1).

2. Вводится понятие сингулярного решения уравнения (1). Так называется решение, обращающееся в некоторой точке t_1 в бесконечность первого порядка, т. е. имеющее вид

$$\varphi(t) = \frac{1}{\pi i}\frac{\varphi_1(t, t_1)}{t - t_1}, \qquad (2)$$

где $\varphi_1(t, t_1)$ — функция, удовлетворяющая условию Гёльдера. Выводятся необходимые и достаточные условия существования решения вида (2). Оказывается, что точками t_1 могут быть только корни коэффициента $a(t)$. Кроме того, доказывается, что $\varphi_1(t_1, t_1) \neq 0$, т. е. устанавливается, что уравнение (1), в котором $a(t)$, $K(t, \tau)$ удовлетворяют условию Гёльдера, не может иметь решений вида $\dfrac{\varphi_2(t, t_1)}{|t - t_2|^\lambda}$ при $0 < \lambda < 1$, $\varphi_2(t_1, t_1) \neq 0$.

Ф. Д. Гахов

9916. Теоремы существования и единственности для системы нелинейных сингулярных интегральных уравнений с ядром Гильберта. Абдинова А. Б., Элми әсәрләр Азәрб. унив., Уч. зап. Азерб. ун-та, 1957, № 11, 19—37 (рез. азерб.)

Решается следующая система:

$$u_i(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_i[x, s, u_1(s), \ldots, u_n(s); v_1(s), \ldots, v_n(s);$$

$$w_1(s), \ldots, w_n(s); \lambda]\operatorname{ctg}\frac{s - x}{2}\,ds \quad (i = 1, \ldots, n), \qquad (1)$$

где $v_j(s) = -\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u_j(\sigma)\operatorname{ctg}\dfrac{\sigma - s}{2}\,d\sigma$, $w_j(s) =$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} F_i[s, \sigma, u_1(\sigma), \ldots, u_n(\sigma)]\operatorname{ctg}\frac{\sigma - s}{2}\,d\sigma.$$

Доказывается теорема:

Если удовлетворяются условия

$$F_j[\tilde{x}, \tilde{s}, \tilde{u}_1, \ldots, \tilde{u}_n] - F_j[x, s, u_1, \ldots, u_n] =$$

$$= a|\tilde{x} - x|^{\delta_1} + a_0|\tilde{s} - s|^{\delta} + \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu|\tilde{u}_\nu - u|,$$

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial u_j} = \frac{\partial \Phi_i}{\partial v_j} = \frac{\partial \Phi_i}{\partial w_j} = 0 \text{ при } \lambda = 0$$

$$|\Phi_i(\tilde{x}, \tilde{s}, \tilde{u}_1, \ldots, \tilde{u}_n, \tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_n, \tilde{w}_1, \ldots, \tilde{w}_n) -$$

$$- \Phi_i(x, s, u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots v_n;$$

$$w_1, \ldots, w_n)| < q_1|\tilde{x} - x|^{\delta_1} + q_2|\tilde{s} - s|^{\delta} +$$

$$+ q_3\sum[|\tilde{u}_\nu - u_\nu| + |\tilde{v}_\nu - v_\nu| + |\tilde{w}_\nu - w_\nu|],$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial\lambda}\Phi_i(\tilde{x}, \tilde{s}, \tilde{u}_1, \ldots, \tilde{u}_n, \tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_n, \tilde{w}_1, \ldots, \tilde{w}_n, \lambda) -\right.$$

$$\left. - \frac{\partial}{\partial\lambda}\Phi_i(x, s, u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_n, w_1, \ldots, w_n, \lambda)\right| <$$

$$< q_1|\tilde{x} - x|^{\delta_1} + q_2|\tilde{s} - s|^{\delta} +$$

$$+ q_3\sum_{\nu=1}^{n}[|\tilde{u}_\nu - u| + |v_\nu - v| + |w_\nu - w|],$$

то для достаточно малого λ существует, по крайней мере, одно решение системы (1), удовлетворяющее условию Гёльдера.

При некоторых дополнительных ограничениях доказывается, что решение может быть найдено способом последовательных приближений.

Исследование проведено методами, указанными А. И. Гусейновым (Матем. сб. 1947, 20 (62): 2; 1950, 26 (68): 2).

Примечание референта. Применяя методы, использованные Б. И. Гехтом (РЖМат, 1958, 3821) при решении несколько более частной, чем (1), системы, можно было бы значительно ослабить ограничения, достаточные для существования решения и возможности получения его способом последовательных приближений. Ф. Д. Гахов

9917. Об уравнении Винера — Хопфа. Кейс (On Wiener-Hopf equations. Case K. M.), Ann. Phys. (USA), 1957, 2, № 4, 384—405 (англ.)

Рассматривается интегральное уравнение с разностным ядром, исследованное впервые Винером и Хопфом

$$\rho(z) - \int_0^\infty K(z - z')\rho(z')\,dz' - q(z) = 0. \qquad (1)$$

В первой части работы при помощи некоторых преобразований уравнение (1) записывается в нелинейной форме

$$H(p) = 1 - \frac{H(p)}{2\pi i}\int_{-\beta-i\infty}^{-\beta+i\infty}\frac{k(p')H(p')}{p + p'}\,dp', \qquad (2)$$

где $H(p)$ — новая искомая функция, определенным образом выражающаяся через функцию ρ, k — преобразование Лапласа ядра K, $0 < \beta < 1$. Относительно ядра предполагалось $K(-z) = K(z)$ и $|K(z)|e^{|z|}$ интегрируемо на оси абсцисс.

Из уравнения (2) путем разложения $H(p)$ в степенной ряд выводятся некоторые соотношения между коэффициентами этого разложения. Из этих соотношений не делается никаких применений, поэтому смысл и назначение их не вполне ясны.

Во второй части работы уравнение (1) решается методом Хопфа и Винера. Здесь не содержится новых результатов по сравнению, например, с работой В. А. Фока (Матем. сб., 1944, 14 (56): 1—2). Все три примера, приводимые для иллюстрации теории, встретившиеся ранее в физических задачах, разбирались в упомянутой работе В. А. Фока. Ф. Д. Гахов

9918. Об одной системе сингулярных интегро-дифференциальных уравнений и ее приложения в граничных задачах линейного сопряжения. В е к у а Н. П., Тр. Тбилисск. матем. ин-та, АН ГрузССР, 1957, 24, 135—147

В области D, ограниченной простой замкнутой кривой Ляпунова L, отыскивается два мероморфных вектора $\varphi(z)=(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$, $\psi(z)=(\psi_1, \ldots, \psi_n)$, удовлетворяющих на L краевому условию $\varphi[\alpha(t)]=\sum_{k=1}^{m} A_k(t)\,\psi^{(k)}(t)+g(t)$.

Краевая задача при помощи специального интегрального представления аналитических функций сводится к системе особых интегро-дифференциальных уравнений

$$\sum_{k=0}^{m} a_k(t)\,\rho^{(k)}(t)+\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{\pi i}\int\frac{\Gamma_k(t,\tau)\,\rho^{(k)}(\tau)}{\tau-t}\,d\tau=f(t).$$

Последнее приводится к особому интегральному уравнению относительно старшей производной $\rho^{(m)}(t)$.

Ф. Д. Гахов

9919. Об одной системе интегро-дифференциальных уравнений, встречающихся в технике. Д ё й ч (Asupra unui sistem de ecuaţii integro-diferenţiale ce se întîlneşte în tehnică. D e u t s c h E m e r i c), Bul. ştiinţ. şi tehn. Inst. politehn. Timişoara, 1956, **1**, № 2, 13—17 (рум.; рез. франц., русск.)

Методом разложения по степеням параметра решается система интегро-дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered} a\frac{\partial T}{\partial\theta}+b\frac{\partial T}{\partial x}-t(\theta)+T(x,\theta)=0,\\ ct'(\theta)-lt(\theta)=-\int_0^l T(\xi,\theta)\,d\xi \end{gathered} \tag{1}$$

с граничными условиями

$$T(0,\theta)=T^*,\quad t(0)=t^*, \tag{2}$$

где a, b, c, l, T^* и t^* — известные постоянные, причем например λ вводится следующим образом:

$$\begin{gathered} a\frac{\partial T}{\partial\theta}+b\frac{\partial T}{\partial x}-\lambda t(\theta)+T(x,\theta)=0,\\ ct'(\theta)-lt(\theta)=-\lambda\int_0^l T(\xi,\theta)\,d\xi. \end{gathered} \tag{3}$$

Решение системы (3) ищется в виде

$$T(x,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n T_n(x,\theta),\quad t(\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n t_n(\theta), \tag{4}$$

где на функции $T_n(x,\theta)$ и $t_n(\theta)$ налагаются условия

$$\begin{gathered} T_0(0,\theta)=T^*,\quad t_0(0)=t^*,\\ T_n(0,\theta)=0,\quad t_n(0)=0\ (n=1,2,3,\ldots). \end{gathered} \tag{5}$$

Если функции $T(x,\theta)$ и $t(\theta)$ из (4) подставить в систему (3) и сравнить коэффициенты при одинаковых степенях λ, то получится две системы уравнений относительно T_0, t_0 и T_n, t_n, которые при условиях (5) решаются в конечном виде. Так находятся коэффициенты рядов (4). Эти ряды будут формально удовлетворять системе (3), а при $\lambda=1$ — системе (1). Затем доказывается (методом мажорант) абсолютная и равномерная сходимость рядов (4) при $\lambda=1$ и что функции $T(x,\theta)$ и $t(\theta)$, определяемые этими рядами, удовлетворяют исходной системе. Результаты автора были получены более сложным путем Василаке (Vasilache S., Bul. ştiinţ. Acad. R. P. R. Sec. math. şi fiz., 1951, **3**, № 3, 311).

В. В. Васильев

9920. Интегро-дифференциальные уравнения типа свертки. Г о в о р у х и н а А. А., Докл. АН СССР, 1958, 118, № 5, 866—869

Рассматривается интегро-дифференциальное уравнение

$$\sum_{m=0}^{n}\left[\lambda_m f^{(m)}(x)+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty}k_{1m}(x-t)\,f^{(m)}(t)\,dt+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0}k_{2m}(x-t)\,f^{(m)}(t)\,dt\right]=g(x). \tag{A}$$

Пусть $g(x)\in L_p$, $k_{im}(x)\in L$; $i=1,2$; $m=0,1,\ldots,n$, и решение отыскивается в классе $f^{(m)}(x)\in L_p$. На основе теории преобразования Фурье доказывается

Т е о р е м а 1. Уравнение (A) равносильно краевой задаче Римана

$$\Phi_n^+(x)=A(x)\,\Phi_n^-(x)+B(x),\qquad -\infty<x<\infty,$$

с дополнительными условиями

$$\left.\frac{d^m\Phi_n^{\pm}(z)}{dz^m}\right|_{z=0}+\frac{m!\,(-i)^m}{\sqrt{2\pi}}\,f^{(n-m-1)}(0)=0,\quad m=0,1,\ldots,n-1,$$

где $A(x)$, $B(x)$ — функции, определенным образом выражающиеся через преобразования Фурье ядер и правой части уравнения (A).

Далее проводится исследование в классах функций, имеющих на бесконечности рост типа показательной функции. Обозначив $f_+(f_-)$ функции, тождественно равные нулю для $x<0$ $(x>0)$, $f(x)=f_+(x)-f_-(x)$. Если $f_+(x)\,e^{-yx}\in L_p$ для $y>\alpha$, $f_-(x)\,e^{-yx}\in L_p$ для $y<\beta$, то говорят, что $f(x)\in\{\alpha,\beta\}$.

Т е о р е м а 2. Пусть $k_{im}(x)\in(a_{im},\ b_{im})_1$, тогда для правой части максимально допустимым классом будет

$$g(x)\in\{\max[\max(a_{1m},\min b_{1k}),\ \max b_{2k}],\ \min[(b_{2m},\max a_{2k}),\ \min b_{1k}]\}_p,$$

а решение можно искать в максимальном классе

$$f^{(m)}(x)\in\{\min b_{1,m},\ \max a_{2k}\}_p,\quad m=0,1,\ldots,n.$$

Т е о р е м а 3. Уравнение (A) не может содержать более четырех слагаемых, имеющих различные показательные оценки.

С л е д с т в и е. Уравнение (A) равносильно краевой задаче с контуром, состоящим не более чем из четырех прямых, параллельных оси абсцисс.

Обозначим $b_1=\min b_{1m}$, $b_2=\max a_{2m}$. Уравнения (A) делятся на два класса: 1) $b_1\geqslant a_2$; в этом случае уравнение (A) сводится к некоторой краевой задаче Римана; 2) $b_1<a_2$. При решении уравнения (A) возникают так называемые «площадные» задачи.

Исследуются достаточные условия, при которых решение уравнения (A) приводится к решению краевой задачи Римана на одной или двух параллельных прямых и может быть дано в замкнутой форме.

В заключение указывается, что аналогичными свойствами обладают парные уравнения

$$\sum\left[\lambda_m f^{(m)}(x)+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty}k_{1m}(x-t)\,f^{(m)}(t)\,dt\right]=g_1(x),\ x>0 \tag{Б}$$

$$\sum\left[\mu_m f^{(m)}(x)+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}k_{2m}(x-t)f^{(m)}(t)\,dt\right]=$$

$$=g_2(x),\ x<0.$$

Ф. Д. Гахов

9921. Асимптотическое поведение собственных значений и собственных функций интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра. Л а н д о Ю. К., Уч. зап. Минск. гос. пед. ин-та, 1957, вып. 7, 21—34

Рассматриваются интегро-дифференциальные уравнения вида

$$u^{(n)}(x)+\sum_{i=0}^{n-2}a_i(x)\,u^{(i)}(x)+\sum_{i=0}^{n-1}\int_0^x A_i(x,t,\rho)\,u^{(i)}(t)\,dt+$$

$$+\rho^{n+1}\int_0^x u(t)\,dt=0,\quad 0\leqslant x,\ t\leqslant 1, \tag{1}$$

где $a_i(x)$ — непрерывные функции, ядра A_i — аналитические функции параметра ρ и для достаточно больших значений ρ удовлетворяют условию

$$|A_i(x,t,\rho)|\leqslant C\,|e^{\omega_1\rho t}|\quad (i=0,1,\ldots,n-1).$$

Для указанного уравнения исследуется при стремлении параметра ρ к бесконечности: а) асимптотическое поведение решений уравнения (1); б) асимптотическое поведение собственных значений и собственных функций краевой задачи $R_i(u)=0$ $(i=1,2,\ldots,n)$, где R_i — линейные формы относительно u и ее последовательных производных до $n-1$-го порядка на концах интервала.

Исследование ведется по схеме М. А. Наймарка (Линейные дифференциальные операторы, М., ГИТТЛ, 1954, гл. VII, РЖМат, 1957, 1614 К). Ф. Д. Гахов

9922. Общее решение одного класса интегро-дифференциальных уравнений с частными производными. Л и х т а р н и к о в Л. М., Уч. зап. Иркутского гос. пед. ин-та, 1957, вып. 13, 105—113

Отыскание решения интегро-дифференциального уравнения

$$M(u)=f(x,y)+\lambda\int\int_D k(x,y,z,t)\,u(z,t)\,dz\,dt,$$

где $M(u)$ — линейный дифференциальный оператор гиперболического типа, автор приводит к решению интегрального уравнения. Я. В. Быков

9923. Краевые задачи интегро-дифференциальных уравнений. О Ч е н Х е н, Сухак ка мулли, Математика и физика, 1957, 1, № 1, 5—15 (кор.; рез. русск.)

Изучаются условия существования и единственности решений уравнений

$$u=\lambda Ku+\Phi u, \tag{1}$$

$$u=\lambda K^*u+\Psi u, \tag{2}$$

где K — вполне непрерывный линейный оператор, отображающий пространство Банаха E на себя; $\Phi(\Psi)$ — нелинейный оператор, определенный на выпуклом замкнутом множестве $\omega(\bar{\omega})$ пространства $E(\bar{E})$.

Доказываются теоремы существования решений соответственно следующих краевых задач:

$$y^{(n)}(x)=\lambda\,[l_{n-1}(y)+K_n(y)]+$$

$$+f\{x,\ \mu_i y^{(i)}(x)\}\ (i=0,\ldots,n-1),\ \int\limits_{a'}^{b}H[x,t,v_i y^{(i)}(t)\times$$

$$\times\ (i=1,\ldots,n)]\,dt; \tag{3}$$

$$U_j(y)\equiv\sum_{k=0}^{n-1}[\alpha_{ik}y^{(k)}(a)+\beta_{ik}y^k(b)]=\gamma_j\ (j=1,\ 2,\ldots,n),$$

где

$$l_k(y)\equiv\sum_{i=0}^{k}a_i(x)\,y^{(i)}(x);\ K_n(y)\equiv\sum_{i=0}^{n}\int_{a_i}^{b_i}K_i(x,t)y^{(i)}(t)dt;$$

$$\det\left(U_j(x^{i-1})\right)_{i,j=1,\ldots,n}\neq 0;\ a',\ b',\ a_i,\ b_i\in(a;\ b),$$

$$\Delta^n u=f(x);\ x=\{x_1,\ x_2,\ x_3\},$$

$$\Delta^i u\,|_S=0,\ i=\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ldots \tag{4}$$

$$\left(\frac{d\Delta^i u}{dn}+h\Delta^i u\right)\Big|_S=0\ (h>0),\ i=\beta_1,\ \beta_2,\ldots,$$

$$\frac{d\Delta^i u}{dn}\Big|_S=0,\ i=\gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_3,\ldots,$$

где граница S области A есть поверхность Ляпунова

$$\Delta^n u=\lambda\,[l_{n-1}(u)+K_n(u)]+f\{x,\ \mu_{ij}\Delta_j^i u\times$$

$$\times\begin{pmatrix}i=0,\ldots,n-1\\ j=1,\ 2,\ 3\end{pmatrix},$$

$$\iiint\limits_{(A)}H[x,\ t,\bar{\mu}_{ij}\Delta_j^i u(t)\begin{pmatrix}i=0,\ldots,n-1\\ j=1,\ 2,\ 3\end{pmatrix},\ \bar{\mu}_{n0}u(t)]\,dt\}, \tag{5}$$

где

$$\Delta_j^i u=\frac{\partial\Delta^i u}{\partial x_j};\ l_{n-1}(u)\equiv\sum_{\substack{i=0,\ n-1\\ j=1,\ 2,\ 3,}}a_{ij}\Delta_j^i u;$$

$$K_n(u)\equiv\sum_{\substack{i=0,\ n-1\\ j=1,\ 2,\ 3}}\iiint\limits_{(A_{ij})}K_{ij}(x,\ t)\,\Delta_j^i u(t)\,dt+$$

$$+\iiint\limits_{(A_{n0})}K_{n0}(x,\ t)\,\Delta^n u(t)\,dt;\quad A_{ij},\ A_{n0}\subset A,$$

при тех же граничных условиях, что и в задаче (4).

Пользуясь соответствующими функциями Грина, перечисленные выше краевые задачи автор приводит к уравнениям вида

$$u=\lambda Ku+\Phi u$$

и, применяя результаты п. 2, доказывает теоремы существования решений краевых задач (3), (4) и (5). Я. В. Быков

9924. О задаче Коши для одного класса нелинейных уравнений в функциональных пространствах. А х м е д о в К. Т., Докл. АН СССР, 1957, 115, № 1, 9—12

Изучаются условия существования голоморфного относительно $t=t_0$ решения дифференциального уравнения

$$\frac{du}{dt}=A\left(t,\ u,\ \frac{du}{dt}\right)+B(t,\ u) \tag{1}$$

в пространстве Банаха, где A, B — аналитические операторы, причем оператор A линейно зависит от du/dt.

Доказывается, что интегро-дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \int_0^1 K(t, x, s, u(s, t)) \frac{\partial u}{\partial t} ds + f(t, x, u(x, t)) \quad (2)$$

обладает следующими свойствами:

1) задача Коши

$$u|_{t=t_0} = u_0(x) \quad (3)$$

для уравнения (2) имеет единственное голоморфное решение, если единица не является собственным числом ядра $M(x, s) \equiv K^{00}_{t_0 u_0}(x, s)$;

2) если единица является собственным числом ядра $M(x, s)$ ранга 1 и $\int_0^1 f(t_0, x, u_0(x)) q(x) dx = 0$, где $q(x)$ — собственная функция ядра $M(x, s)$, отвечающая собственному значению единица, то задача Коши (2), (3) имеет, вообще говоря, два голоморфных решения;

3) если уравнение $\frac{\partial u}{\partial t} = \int_0^1 K(t, x, s, u(s, t)) \frac{\partial u}{\partial t} ds$ имеет решение, для которого $u(x, t)|_{t=t_0} = u_0(x)$; единица — собственное число ядра $M(x, s)$ и $\int_0^1 f(t_0, x, u_0(x)) \times q(x) dx \neq 0$; $K^{01}_{t_0 u_0}(x, s) \not\equiv 0$, то в окрестности точки $t = t_0$ уравнение (2) не имеет голоморфных решений.

Предполагается, что

$$K^{0n}_{t_0 u_0}(x, s) \equiv \frac{1}{n!} \frac{\partial^n K(t_0, x, s, u_0)}{\partial u_0^n}.$$

Я. В. Быков

См. также: 9697, 9784, 9854, 9879, 9935, 10009, 10015, 10046

ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Редактор *М. К. Керимов*

9925. О периодической задаче вариационного исчисления в целом. Альбер С. И., Успехи матем. наук, 1957, № 4, 57—124

Обзорная статья по работам, оценивающим минимальное число замкнутых геодезических линий на различных многообразиях, содержащая, в частности, подробное изложение работ автора.

В гл. I «Сингулярно-спектральная теория гомологий» в оригинальном изложении сообщаются необходимые для дальнейшего сведения из теории гомологий и когомологий. В гл. II «Когомологический метод Л. А. Люстерника» изложены основные методы оценки числа замкнутых геодезических линий. В гл. III «Пространство окружностей» вычисляется «длина» многообразия больших кругов и «длина» псевдомногообразия окружностей на n-мерной сфере. В гл. IV «Гомологии пространства замкнутых кривых на сфере» строится базис когомологий некоторого специального комплекса в пространстве замкнутых кривых на сфере. Часть базисных циклов была найдена Л. А. Люстерником, а остальные автором статьи. В гл. V «Оценка числа замкнутых геодезических и экстремалей» на многообразиях, гомеоморфных n-мерной сфере, оценивается число алгебраически различных и число геометрически различных замкнутых геодезических. Оценка алгебраически различных замкнутых геодезических совпадает с оценкой М. Морса, но получена более простым методом.

В заключение формулируется несколько нерешенных вопросов периодической задачи вариационного исчисления в целом.

Библ. 38 назв. Л. Э. Эльсгольц

9926. Теоремы типа Штурма для самосопряженных систем дифференциальных уравнений высшего порядка. Халанай А., Шандор Ш., Докл. АН СССР, 1957, 114, № 3, 506—507

Рассматривается система

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{d^i}{dt^i}\left(\theta_{n-i} \frac{d^i y}{dt^i}\right) = 0, \ \theta_0 > 0, \quad (1)$$

где θ_i — симметрические матрицы порядка p, y — p-мерный вектор.

Точки t_1 и t_2 оси t называются сопряженными ($t_1 \gtrless t_2$), если существует решение $y(t)$ системы (1) такое, что

$$y(t_1) = y'(t_1) = \cdots = y^{(n-1)}(t_1) = 0,$$
$$y(t_2) = y'(t_2) = \cdots = y^{(n-1)}(t_2) = 0,$$

и если на сегменте $[t_1, t_2]$ точка t_2 — ближайшая к t_1 с указанным свойством.

Последовательность точек

$$\ldots < t_{-k-1} < t_{-k}, \ldots < t_{-1} < t_0 < t_1 < \ldots$$
$$\ldots < t_k < t_{k+1} < \ldots,$$

в которой t_0 — произвольная точка, и всякие две точки t_s и t_{s+1}, а также t_{-s} и t_{-s-1} являются сопряженными, называется системой сопряженных точек.

В терминах систем сопряженных точек на системы уравнений вида (1) переносятся теорема Штурма о перемежаемости нулей и теорема сравнения. Приведем для примера аналог теоремы о перемежаемости: Две системы сопряженных точек, которые не совпадают, разделяются, т. е. между двумя последовательными точками одной системы существует одна и только одна точка другой. Кроме того, формулируется аналог осцилляционной теоремы о нулях собственных функций для краевой задачи, связанной с системой рассматриваемого вида. Формулируются некоторые другие результаты. В. Б. Лидский

9927. Изгиб анизотропной треугольной пластинки. Федосьев Р.-Е. В., Уч. зап. Кишиневск. ун-та, 1957, 29, 77—88

Задача решается приближенно методом Ритца (минимальное значение энергии определяется с помощью подстановки

$$w = \sum_m \sum_n A_{mn} W_{mn}(x, y),$$

где функции W_{mn} подбираются так, чтобы выполнялись граничные условия, а постоянные A_{mn} определяются из условия экстремальности энергии). Рассматриваются три случая закрепления границ: 1) все стороны защемлены, 2) две стороны защемлены, одна

сторона оперта, 3) одна сторона защемлена, две других оперты. Нагрузка предполагается равномерно распределенной, нормальной к плоскости пластинки. В первом случае получено первое приближение, во втором — первое и второе, а в третьем случае — первое, второе и третье приближения. Отмечаются частные случаи для изотропной пластинки (на стр. 88, 14 строка сверху, пропущена формула). Приводятся численные данные для авиационной фанеры. И. С. Аржаных

9928. **Некоторые случаи определения частоты собственных колебаний треугольной ортотропной пластинки. Федосьев Р.-Е. В.**, Уч. зап. Кишиневск. ун-та, 1957, 29, 89—92

Методом Релея-Ритца определяется основная частота поперечных колебаний пластинки в форме равнобедренного треугольника, сделанного из ортотропного материала. Рассматриваются три случая граничных условий, такие же, как и в предыдущей статье (реф. 9937). Прогиб представляется в виде

$$w = q(t)\,W(x, y),$$

где W — статический прогиб. Приближенное значение наименьшей частоты определено в явном виде для всех трех случаев закрепления. Как частный случай получаются формулы для изотропной пластинки. Приводится таблица численных значений для авиационной фанеры. И. С. Аржаных

9929. **Общековариантный вариационный принцип в теории тензорных полей произвольного целого ранга. Пугачев Я. И.**, Тр. Краснодарск. ин-та пищ. пром-сти, 1957, вып. 16, 27—31

Рассматриваются поля, определяемые вариационным принципом с функцией Лагранжа, зависящей от составляющих потенциалов поля (тензоров целого ранга). Допускаются калибровочные преобразования первого рода. Ставится вопрос об условиях, вытекающих из общей ковариантности относительно преобразования координат (пространство произвольного числа измерений). Показано, что независимо от уравнений Эйлера-Лагранжа должны выполняться n тождественных равенств, а если учесть уравнения поля, то должны выполняться n^{r-1} тождеств (r — ранг тензорного потенциала, n — размерность пространства). Рассмотрены, в частности, случаи $r = 1$ и $r = 0$. В заключение подчеркивается, что выбор дополнительных условий (типа условия Лоренца в электродинамике) к уравнениям поля не имеет никакого отношения. Библ. 7 назв. И. С. Аржаных

9930. **Экстремальные свойства решений задачи о контактном сжатии упругих тел. Кильчевский** (Екстремальні властивості розв'язань задачі про контактне стиснення пружних тіл. Кільчевський М. О.), Доповіді АН УРСР, 1958, № 1, 17—20 (укр.; рез. русск., англ.)

Рассматривается теория сжатия тел по Герцу. Уравнения этой теории, связывающие искомые функции, автор рассматривает как связи. Вычисляется принуждение Гаусса и формулируется вариационная задача со связями на основании принципа наименьшего принуждения. И. С. Аржаных

См. также: 9860, 9861, 9925, 10305

АНАЛИЗ (ДРУГИЕ ВОПРОСЫ)

Редактор *В. В. Немыцкий*

9931. **Простой пример непрерывной функции из элементарной геометрии. Амман** (Ein einfaches Beispiel für eine unstetige Funktion aus der Elementargeometrie. Ammann P. H.), Math. und naturwiss. Unterr., 1958, 10, № 10, 462 (нем.)

9932. **О пределе $\lim_{\theta\to 0}\cos\theta$. Паскуаль** (On the $\lim_{\theta\to 0}\cos\theta$. Pascual M. J.), Amer. Math. Monthly, 1955, 62, № 4, 252—253 (англ.)

9933. **Обобщенная аппроксимация факториала. Эртель** (Generalisierte Approximation der Fakultät. Ertel H.), Naturwissenschaften, 1958, 45, № 3, 53—54 (нем.)

9934. **Тригонометрические функции. Иейтс** (The trigonometric functions. Yates Robert C.), Math. Teacher, 1958, 51, № 3, 191—193 (англ.)

9935. **К вопросу существования и приближенного представления неявных функций. Зубов В. И.**, Вестн. Ленингр. ун-та, 1956, № 19, 48—54

Пусть дана система уравнений

$$f_j(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n) = 0, \quad j = 1, \ldots, n, \qquad (1)$$

левые части которых обращаются в нуль при $x_1 = \ldots = x_m = y_1 = \ldots = y_n = 0$ и имеют непрерывные частные производные первых двух порядков в замкнутой области $\sum_{i=1}^{m} |x_i| \leqslant a$, $\sum_{j=1}^{n} |y_j| \leqslant b$. При некоторых условиях, наложенных на частные производные первого порядка функции f_j, указывается некоторая замкнутая выпуклая область в пространстве x-в, симметричная относительно начала координат и такая, что в ней существует ровно одна система непрерывных функций $y_j = \varphi_j(x_1, \ldots, x_m)$, $j = 1, \ldots, n$, удовлетворяющая условиям $\varphi_j(0, \ldots, 0) = 0$, $j = 1, \ldots n$, и удовлетворяющая тождественно относительно x-в уравнениям (1).

Указывается некоторая система (вообще говоря, нелинейных) интегральных уравнений, которым эта система функций удовлетворяет. Автор рекомендует численное решение этой системы интегральных уравнений для приближенного вычисления соответствующей системы неявных функций.

Примечание референта. Референт находит недостаточно обоснованным сделанное на стр. 52 утверждение, относящееся к случаю, когда якобиан функций f_j по y-м может обращаться в нуль.

С. М. Лозинский

9936. **Обобщение арифметико-геометрического среднего. Левин В. И.**, Матем. просвещение, вып. 2, 1957, 195—204

Известные понятия арифметико-геометрического среднего двух положительных чисел x и y обобщается следующим образом:

Пусть $0 < x < y$. Под средним этих величин понимается функция $S(x, y)$, непрерывная внутри угла, образованного прямыми $x = 0$ и $y = x$, и на последней из них однородная первой степени однородности: $S(\lambda x, \lambda y) = \lambda S(x, y)$ $(\lambda > 0)$, возрастающая по каждому из переменных при фиксированном втором, удовлетворяющая соотношению $x < S(x, y) < y$. Функция $\sigma(z) = \sigma(y/x) = S(1, y/x) = S(x, y)\cdot\frac{1}{x}$ называется приведенным средним.

Для двух различных средних $S(x, y)$ и $T(x, y)$ удовлетворяющих условию $S(x, y) < T(x, y)$, образуются

последовательности

$x_n = S(x_{n-1}, y_{n-1})$, $y_n = T(x_{n-1}, y_{n-1})$, $(n = 1,2\ldots)$,

где $x_0 = x$, $y_0 = y$. Общий предел этих последовательностей $ST(x, y)$, существование которого доказывается, называется ST-средним x и y. Доказывается, что функция $ST(x, y)$, при некотором дополнительном условии, обладает всеми свойствами среднего, являясь таким образом средним $ST(x, y) = u(x, y)$, удовлетворяющим функциональному уравнению

$$u(x, y) = u\{S(x, y), T(x, y)\}.$$

Пользуясь этим функциональным уравнением и применяя понятие приведенного среднего, автор показывает, что гармонико-арифметическое среднее есть геометрическое среднее. Это приводит к нахождению быстро сходящихся рациональных приближений квадратных иррациональностей вида $\sqrt{R}$:

$$a_n = \left\{\frac{a_{n-1}^{-1} + b_{n-1}^{-1}}{2}\right\}^{-1}; \quad b_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2},$$

$n = 1, 2, 3, \ldots$, где $a_0 = a$, $b_0 = b$, $ab = R$.

И. П. Макаров

9937. О математических основах теории «физически наблюдаемых функций». Гхош (On the mathematical foundations of physically observable functions. Ghosh P. K.), Bull. Calcutta Math. Soc., 1957, 49, № 1, 25—28 (англ.)

Показывается, что предложенная Хоземаном и Багчи (РЖМат, 1955, 5920) теория «физически наблюдаемых функций» (точнее — функций, допускающих измерение при помощи заданной совокупности измерительных приборов) при определенном выборе статистических характеристик этих приборов (плотностей распределения соответствующих ошибок наблюдения) практически совпадает с теорией обобщенных функций в том виде, который был ей придан в работах Микусинского и Темпля.

А. М. Яглом

9938. Об одном функциональном уравнении. Байрактаревич (Sur une équation fonctionnelle. Bajraktarević Mahmud), Glasnik mat.-fiz. i astron., 1957, 12, № 3, 201—205 (франц.; рез. сербо-хорв.)

Доказано существование определенного класса решений функционального уравнения

$$\varphi(z) = f\{z, \varphi[g_1(z)], \ldots, \varphi[g_q(z)]\} \qquad (1)$$

и дана конструкция решений этого класса. Результат сформулирован в виде теоремы: Пусть S и S^1 — два евклидова пространства, $E, E_j \subseteq S$ $(j = 1, \ldots, q)$, $\overline{E} = E \cup (\cup E_j)$, $F \subseteq S'$, F компактно; пусть g_i — отображение E на $E_j = g_j(E)$, f — отображение $\overline{E} \times F^q$ в F, удовлетворяющее условию

$$\| f(z, t) - f(z, t') \| \leqslant M \| t - t' \| \quad (t, t' \in F^q;\ z \in \overline{E}),$$

где $\| t - t' \| = \sum_{j=1}^{q} \| t_j - t_j' \|$ $(0 < M_q < 1)$. Тогда функциональное уравнение (1) допускает единственное решение φ, определенное в E при $\varphi(E) \subseteq F$, если удовлетворяется условие $E \supseteq UE_j$. Если последнее условие не выполняется, уравнение (1) допускает по крайней мере одно решение φ_α, удовлетворяющее не $\overline{E} \setminus E$ другому функциональному уравнению вида (1).

Для того чтобы все решения φ_α уравнения (1) были тождественны между собой, необходимо и достаточно, чтобы они удовлетворяли соотношениям

$$\varphi_\alpha(z) = f(z, t) \quad (z \in \cup E_j \setminus E;\ t \in \{\cup_\alpha [\varphi_\alpha(\cup E_j)]\}^q)$$

для каждого t, каким бы ни было решение φ_α.

Э. А. Чернышенко

9939. О монотонном решении функционального уравнения. Байрактаревич (Sur une solution monotone d'une équation fonctionnelle. Bajraktarević M.), Publs Inst. math. Acad. serbe sci., 1957, 11, 43—52 (франц.)

Теорема. Если $f(z, t)$ $(z \in I,\ -\infty < t < +\infty)$ — непрерывная функция, строго возрастающая по z и t, удовлетворяет условиям:

1) $t_0^{(1)}$ и $T_0^{(1)}$, $t_0^{(2)}$ и $T_0^{(2)}$ — два близких решения $t = \varepsilon^{(1)} f(a_1, t)$, соответственно уравнения $t = \varepsilon^{(2)} f(a_2, t)$, такие, что $t_0^{(1)} < T_0^{(1)} < T_0^{(2)} < t_0^{(2)}$ и между $T_0^{(1)}$ и $T_0^{(2)}$ не существует никаких других решений рассматриваемого уравнения, $\varepsilon^{(1)} f(z, t) > t$ при $z \in I$, $t_0^{(1)} \leqslant t \leqslant T_0^{(1)}$; $\varepsilon^{(2)} f(z, t) < t$ при $z \in I$, $T_0^{(2)} \leqslant t \leqslant t_0^{(2)}$, где $(z - a_i)^2 + (t - t_0^{(2)})^2 > 0$, $(z - a_i)^2 + (t - T_0^{(i)})^2 > 0$, $i = 1,2$;

2) $$\frac{\varepsilon(i+1)}{\varepsilon(i)} \geqslant \frac{f\{h(i, a_2), T_0^{(2)}\}}{f\{h(i, a_2), T_0^{(1)}\}} \qquad (i = 0,1, \ldots, N-1),$$

$$f\{h(0, a_2), T_0^{(1)}\} > 0,$$

тогда функциональное уравнение $F(z) = \varepsilon_0 f\{z, F[g(d_0, z)]\}$ $\left(z \in I;\ t_0^{(1)} < F(z) < t_0^{(2)}\right)$ допускает единственное решение $F(z) = \xi(z)$, строго монотонное, определенное в I и находящееся на $\left(t_0^{(1)}, t_0^{(2)}\right)$. Это решение возрастает от значения $\xi(a_1) = T_0^{(1)}$ до значения $\xi(a_2) = T_0^{(2)}$.

Э. А. Чернышенко

9940. Формула Тейлора-Коши. Танци-Каттабьянки (La formula di Taylor-Cauchy. Tanzi Cattabianchi Luigi), Riv. mat. Univ. Parma, 1956, 7, № 3—5, 359—362 (итал.)

Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ дифференцируемы и $\varphi'(x) \neq 0$, то $\varphi(x)$ допускает однозначное обращение и $f(x)$ можно рассматривать как функцию от $\varphi(x)$ и говорить о производной $f(x)$ относительно функции $\varphi(x)$. Если у $f(x)$ и $\varphi(x)$ существуют производные k-го порядка (и $\varphi'(x) \neq 0$), то существуют производные соответствующих порядков $f(x)$ относительно $\varphi(x)$, которые могут быть последовательно вычислены по формулам

$$f'_\varphi(x) = f' / \varphi',$$

$$f''_{\varphi^2}(x) = f''\varphi' - f'\varphi'' / \varphi'^3, \qquad \text{и т. д.}$$

Эти производные используются при установлении формулы

$$f(x) = f(x_0) + f'_\varphi(x_0)\{\varphi(x) - \varphi(x_0)\} + \frac{1}{2!} f''_{\varphi^2}(x_0) \times$$
$$\times \{\varphi(x) - \varphi(x_0)\}^2 + \cdots + \frac{1}{(n-1)!} f^{(n-1)}_{\varphi^{n-1}}(x_0) \times$$
$$\times \{\varphi(x) - \varphi(x_0)\}^{n-1} + T_n(x), \qquad (1)$$

представляющей обобщение формулы Тейлора, в которую (1) переходит при $\varphi(x) \equiv x$. Остаточный член $T_n(x)$ получен в формах — аналогах форм Пеано и Шлемильха:

$$T_n(x) = \frac{1}{n!}\left\{f^{(n)}_{\varphi^n}(x_0) + \varepsilon(x - x_0)\right\}\{\varphi(x) - \varphi x_0)\}^n,$$

$$T_n(x) = \frac{1}{(n-1)!} f_{\varphi^n}^{(n)}(x_0 + \theta(x - x_0)) \{\varphi(x) - \varphi(x_0 + \theta(x - x_0))\}^{n-s} \{\varphi(x) - \varphi(x_0)\}^s. \quad (2)$$

Из (2), при $s = n$ и $s = 1$, получаются аналоги форм Лагранжа и Коши. А. Г. Школьник

9941. **О разложении в степенные ряды тригонометрических, гиперболических и экспоненциальных функций. Грёмер** (Zur Herleitung der Potenzreihendarstellungen für die Winkel-, Hyperbel- und Exponentialfunktionen. Grömer H.), Elem. Math., 1958, 13, № 2, 39—40 (нем.)

9942. **Теоремы о среднем для функций с левой и правой производными. Уц** (Mean value theorems for functions with left and right derivatives. Utz W. R.), Amer. Math. Monthly, 1955, 62, № 3, 178—179 (англ.)

9943. **Ряды степеней и логарифмов от одной матрицы. Кантони** (Serie di potenze e logaritmo di una matrice. Cantoni Lionello), Boll. Unione mat. ital., 1955, 10, № 3, 376—381 (итал.)

9944. **О доказательстве теоремы Лопиталя при преподавании дифференциального исчисления. Страшевич** (O dowodzie twierdzenia de l'Hospitala w wykładach rachunku różniczkowego. Straszewicz S.), Roczn. Polsk. towarz. mat., 1956, Ser. 2, 1, № 2, 230—233 (польск.)

9945. **Специальные ряды. Родеро-Карраско** (Series especiales. Rodero Carrasco Julian), Gac. mat., 1957, 9, № 6—7, 170—180 (исп.)

В первой главе вводятся определения. Функция $f(z)$ действительного или комплексного переменного имеет асимптотическое разложение в области R

$$f(z) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k,$$

если существуют конечные пределы

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - \sum_{k=0}^{n} a_k (z - z_0)^k}{(z - z_0)^{n+1}} = a_{n+1}$$

при $n = 0, 1, 2, \ldots$ и $z, z_0 \in R$.

Функция $f(z)$ действительного переменного имеет асимптотическое разложение при $z \to \infty$

$$f(z) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k / z^{k+1},$$

если существуют конечные пределы

$$\lim_{z \to \infty} z^{n+1} \left[f(z) - \sum_{k=0}^{n} a_k / z^{k+1} \right] = a_{n+1}.$$

В работе новых результатов не содержится; дается изложение вопроса о единственности асимптотических разложений и операций над асимптотическими рядами. И. П. Макаров

9946. **Об одном обобщении ряда Тейлора. Алапашвили Г. Д.**, Докл. АН БССР, 1957, 1, № 2, 43—47

Пусть функции $f(x)$ и $\varphi_0(x)$ определены в (a, b) и являются аналитическими в точке $x_0 \in (a, b)$, $\varphi(x_0) \neq 0$. Если

$$\varphi_n(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{(x - t)^{n-1}}{(n-1)!} \varphi_0(t)\, dt,$$

то в некоторой окрестности точки x_0

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(x),$$

где коэффициенты a_n определяются по рекуррентным формулам. В частности, если $\varphi_0(x) \equiv 1$, то $\varphi_n(x) = (x - x_0)^n / n!$ и мы получаем обычный ряд Тейлора. К. М. Слепенчук

9947. **Интеграл вероятности. Коулеман** (The probability integral. Coleman A. J.), Amer. Math. Monthly, 1954, 61, № 10, 710—711 (англ.)

9948. **Некоторые формулы типа Стокса. Гутман** (Citeva formule Stokiene. Gutmann M.), Bul. Inst. politehn. Bucureşti, 1956, 18, № 3-4, 119—128 (рум.; рез. русск., франц.)

Даются векторные доказательства формул типа Стокса для интегралов вида

$$(\alpha) \oint_c \bar{u}\,(\bar{v}\,d\bar{r});\ (\beta) \oint_c \bar{u} \times (\bar{v} \times d\bar{r});\ (\gamma) \oint_c \bar{v} \times d\bar{r}$$

и типа Остроградского для интегралов вида

$$(\delta) \oint_s \bar{u}\,(\bar{v}\,d\bar{S});\ (\varepsilon) \oint_s \bar{u} \times (\bar{v} \times d\bar{S}).$$

Например,

$$(\alpha) \oint_c \bar{u}\,(\bar{v}\,d\bar{r}) = \int_S \left[\frac{\partial \bar{u}}{\partial \lambda} + \bar{u}\,(\bar{n}\,\mathrm{rot}\,\bar{v}) \right] dA,$$

где $\frac{\partial}{\partial \lambda} = (\bar{v} \times \bar{n}) \cdot \nabla$, $dA = |d\bar{S}|$, $d\bar{S} = \bar{n}\,dA$, C — граница S.

Формулы (δ) и (ε) можно найти в книге Н. Е. Кочина (Кочин Н. Е., Векторное исчисление и начала тензорного исчисления, ГОНТИ, 1938). А. А. Нудельман

9949. **О криволинейных интегралах на плоскости. Крал Йосеф**, Чехосл. матем. ж., 1957, 7, № 4, 584—598 (рез. англ.)

Доказываются некоторые утверждения, относящиеся к теоремам Грина и Коши — Гурса. Пусть f_1 и f_2 — непрерывные вещественные функции с ограниченным изменением в промежутке $<a, b>$ и $f = f_1 + if_2$. Обозначая через v_1, v_2, g_1, g_2 непрерывные вещественные функции от комплексного аргумента, определенного на множестве $f(<a, b>)$, полагаем

$$\int_f v_1 dx + v_2 dy = \int_a^b v_1(f(t))\, df_1(t) + \int_a^b v_2(f(t))\, df_2(t)$$

и

$$\int_f g\, d\zeta = \int_f g_1 dx - g_2 dy + i \int_f g_2 dx + g_1 dy,$$

где $g = g_1 + ig_2$.

Пусть $v_0(a, b)$ будет система функций f указанного вида, для которых $f(a) = f(b)$. Если $f \in V_0(a, b)$, то полагаем по определению

$$\mathrm{ind}_f z = \frac{1}{2\pi i} \int_f \frac{1}{\zeta - z}\, d\zeta$$

для каждой точки z из дополнения к множеству $f(<a, b>)$. Наконец, если K — квадрат, обозначим H_k функцию из $V_0(a, b)$, которая даст параметрическое представление контура K (описываемого в положительном направлении при изменении параметра от a до b). Основная теорема состоит в следующем:

Пусть $f^k \in V_0(a_k, b_k)$, $k = 1, 2, \ldots, m$. Положим $C = \bigcup_{k=1}^{m} f^k < (a_k, b_k) >$ и определим на дополнении к C функцию $\omega(z) = \sum_{k=1}^{m} \mathrm{ind}_{f^k} z$. Пусть $G = E[z;\ \omega(z) \neq 0]$, v_1 и v_2 — непрерывные функции в множестве $G \cup C$ и

γ — такая функция, определенная в G, что равенство

$$\int_k \gamma\, d\mu = \int_{H_k} v_1 dx + v_2 dy$$

(μ здесь — плоская лебегова мера) справедливо для каждого квадрата $K \subset G$. Предположим, далее, что для $p \neq 0$ существуют интегралы

$$\int_{G_p} \gamma\, d\mu, \text{ где } G_p = E[z;\ z \in E_2 - C,\ \omega(z) = p].$$

Тогда имеет место соотношение

$$\sum_{k=1}^{m} \int_{f^k} v_1 dx + v_2 dy = \sum_{l=1}^{\infty} \left(\sum_{p \geqslant l} \left(\int_{G_p} \gamma\, d\mu - \int_{G_{-p}} \gamma\, d\mu \right) \right).$$

Правую часть здесь можно заменить суммой $\sum_{p=1}^{\infty} p \times \left(\int_{G_p} \gamma\, d\mu - \int_{G_{-p}} \gamma\, d\mu \right)$ (если этот ряд сходится, хотя бы и не абсолютно) или интегралом $\int_G \omega\gamma\, d\mu$ (если он существует в смысле Лебега). Г. М. Фихтенгольц

9950 К. Математический анализ. IV. Пейович (Математичка анализа. IV. Пејовић Т. Београд, «Грађевинска књига», 1957, 308 с., ил.), Bibliogr. Jugosl., 1957, 8, № 8, 321 (сербо-хорв.)

9951 К. Избранные примеры на дифференцирование и интегрирование. 3-е изд. Хемнициус (Differentiation und Integration ausgewählter Beispiele. Eine Sammlg von 407 ausgew. vollst. durchgerechneten Beisp., unter Berücks. d. Zusammenhänge zwischen Differential-und Integralrechng. 3. Aufl. Chemnitius Fritz. Berlin, Verl. Technik, 1957, XII, 215 S., 12.— DM), Dtsch. Nationalbibliogr., 1957, A, № 43, 2963 (нем.)

9952 К. Сборник математических задач. I. С приложением и числовыми таблицами. Митринович (Zbornik matematičkih problema. I. Sa prilozima i numeričkim tablicama. Mitrinović Dragoslav S. Beograd, «Nolit», 1957, XII, 271 s., il.), Bibliogr. Jugosl., 1957, 8, № 20, 840 (сербо-хорв.)

9953 К. Математический анализ для школы и университета. Максуэлл (An analytical calculus for school and university. Vol. 4. Maxwell Edwin Arthur. New York, Cambridge Univ. Press, 1957, 297 pp., ill., 4 doll.), Publishers' Weekly, 1957, 172, № 21, 74 (англ.)

9954 К. Элементы дифференциального и интегрального исчисления. 9-е изд. Годьо (Eléments de calcul différentiel et intégral. 9e éd. Gaudiot Paul. Paris, Eyrolles, 1956, 94 p., ill., 460 fr. Multigr.), Bibliogr. France, 1957, 146, № 46, 1048 (франц.)

9955 К. Повышенный курс прикладной математики. 3-е изд. Грин (Advanced level applied mathematics. 3rd ed. Green Stanley Lawson. London, Univ. Tutorial Press, 1957, 329 pp., ill., 13 sh. 6 d.), Brit. Nat. Bibliogr., 1958, № 421, 10 (англ.)

9956 К. Неявные функции. Еругин Н. П. Л., Ленингр. ун-т, 1956, 59 стр., 2 руб.

В § 1 формулируются теоремы о неявных функциях, встречающиеся в курсах анализа, а также приводятся более общие теоремы. Затем кратко даются сведения об алгебраических функциях и доказывается теорема Вейерштрасса, на основании которой получены теоремы о существовании в определенном аналитическом виде двух неявных функций от одной независимой переменной, определенных двумя уравнениями. В §§ 2—8 рассматривается вопрос о существовании и фактическом построении двух неявных функций от одной независимой переменной. Доказывается, что при аналитическом продолжении неявных функций не встречается особых точек неопределенности в той области, где голоморфны функции, определяющие эти неявные функции. Этот факт установлен и для более общих уравнений.

Пусть D есть область сходимости рядов

$$F(x, y, z) = \sum_{k \geqslant m} P_k(x, y, z),\ \Phi(x, y, z) = \sum_{k \geqslant m} Q_k(x, y, z),$$

где P_k и Q_k — однородные формы степени k относительно (x, y, z).

Теорема 1. При аналитическом продолжении функций $x(z)$ и $y(z)$, определенных уравнениями $F(x, y, z)=0$ и $\Phi(x, y, z) = 0$, для всякой точки $z = z^*$ из области D при $z \to z^*$ имеем: или $[z, x(z), y(z)] \to [z^*, x^*, y^*]$ из области D, или $[z, x(z), y(z)] \to$ к границе области D. Если функции $F(x, y, z)$ и $\Phi(x, y, z)$ целые, то последнее соотношение надо заменить $|x(z)| + |y(z)| \to +\infty$. Пусть z^* особая точка функций $x(z)$ и $y(z)$, такая, что $(z^*, x^*, y^*) \in D$ где $x^* = \lim_{z \to z^*} x(z)$, $y^* = \lim_{z \to z^*} y(z)$. Тогда показано, что z^* является алгебраической особой точкой, что позволяет указать радиус сходимости рядов, определяющих неявные функции. § 9 посвящен отысканию радиусов сходимости рядов, представляющих неявные функции. Приведем теорему § 10.

Теорема 2. Пусть D_1 — область, содержащая окрестность точки (x_0, y_0, z_0), в которой $F(x, y, z)$ и $F'_z(x, y, z)$ непрерывны и $F'_z \neq 0$, $F(x_0, y_0, z_0) = 0$. Если $(x, y) \to (x_1, y_1)$, где (x_1, y_1) из области D_1, то либо $z(x, y) \to z_1$, где z_1 из области D_1, либо $z(x, y) \to$ к границе области D_1. Здесь, по принятому автором обозначению, $(x_1, y_1) \in D$ означает, что прямая $x = x_1$, $y = y_1$, $-\infty < z < \infty$ имеет общие точки с D_1, а $z_1 \in D_1$ означает, что $(x_1, y_1, z_1) \in D_1$. Д. И. Зубов

ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

9957. О подстановке корня одного ряда в другой. Залгаллер В. А., Матем. просвещение, вып. 2, 1957, 181—185

В статье получено выражение значения функции $\psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ в точке x_1, являющейся наименьшим по абсолютной величине корнем функции $\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ [выражение для x_1 найдено Уиттекером (Whittaker E., Proc. Edinburgh Math. Soc, 1918, 36)], в виде

$$\psi(x_1) = \lim_{n \to \infty} \frac{(-1)^n}{D_n} \begin{vmatrix} b_n & a_1 a_2 \cdots a_n \\ b_{n-1} & a_0 a_1 \cdots a_{n-1} \\ \cdots & \cdots \\ b_0 & 0\ 0 \cdots a_0 \end{vmatrix},$$

где

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 a_2 a_3 \ldots a_n \\ a_0 a_1 a_2 \ldots a_{n-1} \\ 0\ a_0 a_1 \ldots a_{n-2} \\ \cdots \\ 0\ 0 \quad \ldots a_1 \end{vmatrix},$$

и в виде ряда

$$\psi(x_1) = b_0 - \sum_{n=1}^{\infty} a_0^n \frac{\nabla_n}{D_{n-1}D_n}, \text{ где } \Delta_n = \begin{vmatrix} b_1 b_2 \dots b_n \\ a_1 a_2 \dots a_n \\ a_0 a_1 \dots a_{n-1} \\ \dots\dots\dots \\ 0\,0 \dots a_2 \end{vmatrix}$$

В качестве примера полученные результаты используются при интегрировании с помощью рядов одного уравнения регулирования. А. Г. Школьник

9958. **Ряды Дирихле для преобразований. Ханна** (The Dirichlet series transformation. Hanna J. Ray), Amer. Math. Monthly, 1957, 64, № 8, Part 1, 576—581 (англ.)

Пусть $F(t)$ определена для всех натуральных чисел и имеет порядок $O(k^t)$, где $k > 0$. Образом (transformation) функции назовем ряд

$$D\{F(t)\} = f(s) = \sum_{t=0}^{\infty} a^{-st} F(t), \quad a > 1.$$

Он сходится абсолютно для $a^\sigma > k$, $\sigma = \mathrm{Re}(s)$. Автор доказывает следующие свойства образов.

Дифференцирование образов:

$$D\{t^n F(t)\} = [(-1)^n / (\mathrm{Ln}\, a)^n] \left(\frac{d^n}{ds^n} f(s)\right) \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Сдвиг независимой переменной:

$$f(s+\sigma) = D\{a^{-\sigma t} F(t)\}, \text{ если } \mathrm{Re}(s+\sigma) > (\lg a)^{-1} \lg k.$$

Конволюция двух функций:

$$f(s)\, g(s) = D\{F(t) * G(t)\},$$

где $g(s) = D\{G(t)\}$, $F(t) * G(t) = \sum_{\tau=0}^{t} F(\tau)\, G(t-\tau)$.

Например,

$$a^{ns} (a^s - 1)^{-n} f(s) = D\left\{\sum_{\tau=0}^{t} \sum_{\sigma=0}^{\tau} \dots \sum_{\alpha=0}^{\beta} F(\alpha)\right\}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Далее автор доказывает теорему обращения образов.

а) Пусть $f(s)$ такова, что $f(-\mathrm{Ln}\, w / \mathrm{Ln}\, a)$ — функция аналитическая и однозначная внутри круга с центром $w = 0$, тогда

$$F(t) = \lim_{s \to \infty} (t!)^{-1} \frac{d^t}{dw^t} [f(-\mathrm{Ln}\, w / \mathrm{Ln}\, a)]_{w=a}\, a^{-s}.$$

б) Пусть $f(s)$ такова, что $f(\mathrm{Ln}\, z / \mathrm{Ln}\, a)$ — функция аналитическая и однозначная вне круга с центром в $z = 0$, тогда $F(t) = (2\pi i)^{-1} \int_c z^{t-1} f(\mathrm{Ln}\, z / \mathrm{Ln}\, a)\, dz$ ($\mathrm{Ln}\, z$ — главная ветвь логарифма).

Автор применяет полученные результаты к решению разностных уравнений типа

$$\sum_{\tau=0}^{t} \tau^{(k)} F(t-\tau) = (t+n)^{(m)}, \quad 1 \leqslant n \leqslant m-k,$$

где $t^{(q)} = t(t-1)\dots(t-q+1)$.

Решение этого уравнения дается в виде

$$F(t) = m!\, (k!\, (m-k-1)!)^{-1} (t+n-1)^{(m-k-1)}.$$

Далее теорема обращения образов позволяет получить тождество

$$\sum_{\tau=0}^{t} \sum_{\sigma=0}^{\tau} \dots \sum_{\alpha=0}^{\beta} F(\alpha) = D^{-1}\{a^{ns} (a^s - 1)^{-n} f(s)\},$$

где D^{-1} — операция обращения. В качестве примера автор получает тождество

$$\sum_{\tau=0}^{t} \sum_{\sigma=0}^{\tau} \sigma^2 = \frac{1}{12} (t+1)(t+2)^{(3)}.$$

В конце работы приведена таблица образов некоторых элементарных функций. Н. Г. Чудаков

9959. **Аппроксимирующие последовательности гармонических последовательностей. Балаш Э. Э.**, Матем. просвещение, вып. 2, 1957, 173—179

Ставится задача построения такой рекуррентной последовательности $\{u_k\}$ n-го порядка

$$u_k = a_1 u_{k-1} + a_2 u_{k-2} + \dots + a_n u_{k-n}, \quad (1)$$

чтобы $2n$ первых ее членов совпадали с $2n$ первыми членами гармонической последовательности

$$u_0 = 1,\ u_1 = 1/2,\ u_2 = 1/3,\ \dots,\ u_{2n-1} = 1/2n. \quad (2)$$

Решение дается в виде

$$u_k^{(n)} = \alpha_1 \lambda_1^k + \alpha_2 \lambda_2^k + \dots + \alpha_n \lambda_n^k, \quad (3)$$

где $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ определяются как корни характеристического уравнения

$$C_{2n}^n \lambda^n - C_n^{n-1} C_{2n-1}^{n-1} \lambda^{n-1} + C_n^{n-2} C_{2n-2}^{n-2} \lambda^{n-2} + \dots$$
$$\dots + (-1)^{n-1} C_n^1 C_{n+1}^1 \lambda + (-1)^n = 0. \quad (4)$$

Доказывается, что все корни уравнения (4) вещественны, различны, лежат в интервале (0,1) и симметричны относительно $1/2$: $\lambda_1 = 1 - \lambda_n$, $\lambda_2 = 1 - \lambda_{n-1}$, и т. д. Коэффициенты α_i в (3) находятся из начальных условий (2), полагая в (3) $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$. При этом симметрическим корням λ_i и λ_j $(i + j = n+1)$ отвечают равные коэффициенты $\alpha_i = \alpha_j$. А. Г. Школьник

9960. **О сильной суммируемости по Риссу. Глатфелд** (On strong Rieszian summability. Glatfeld Martin), Proc. Glasgow Math. Assoc., 1957, 3, № 3, 123—131 (англ.)

Говорят, что ряд $\Sigma_{n=1}^{\infty} c_n$ суммируем по Риссу порядка $k \geqslant 0$ типа λ, где $0 \leqslant \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots$, $\lambda_n \to \infty$, $n \to \infty$, к сумме c, и пишут

$$\sum c_n = c(R, \lambda, k),$$

если при $\omega \to \infty$ $C_\lambda^k(\omega) = c\omega^k + o(\omega^k)$, где $C_\lambda^k(\tau) = \Sigma_{\lambda_n < \tau} c_n (\tau - \lambda_n)^k$.

Говорят, что ряд $\Sigma_{n=1}^{\infty} c_n$ абсолютно суммируем по Риссу порядка $k \geqslant 0$ типа λ к сумме c, и пишут $\Sigma c_n = c\,|R, \lambda, k|$, если существует $A > 0$ такое, что

$$\int_A^{\infty} \left| d \frac{C_\lambda^k(\tau)}{\tau^k} \right| < \infty.$$

Говорят, что ряд $\Sigma_{n=1}^{\infty} c_n$ сильно суммируем по Риссу порядка $k > -1/p$ индекса p, $0 < p < \infty$, типа λ к сумме c, и пишут $\Sigma c_n = c\ |R, \lambda, k|^p$, если при $\omega \to \infty$

$$\int_0^{\omega} |C_\lambda^k(\tau) - c\tau^k|^p\, d\tau = o(\omega^{kp+1}).$$

Ряд $\Sigma_{n=1}^{\infty} c_n$ суммируем $|R, \lambda, k|^\infty$ порядка $k > 0$ типа λ к сумме c, если

$$\lim_{p \to \infty} \left\{\int_0^{\omega} C_\lambda^k(\tau) - c\tau^k|^p\, d\tau\right\}^{1/p} = o(\omega^k).$$

Ряд суммируем $|R, \lambda, 0|^\infty$ к сумме c, если он сходится к c.

Среди доказанных теорем отметим следующие.

I. Если $0 < p' < p$, то из $\Sigma c_n = c\,|R, \lambda, k|^p$ следует $\Sigma c_n = c\,|R, \lambda, k|^{p'}$.

2. Если $p \geqslant 1$ и $k' > k$, то из $\Sigma c_n = c\,|R, \lambda, k|^p$ следует $\Sigma c_n = c\,|R, \lambda, k'|^p$.

3. Утверждения $\Sigma c_n = c\,|R, \lambda, k|^\infty$ и $\Sigma c_n = c\,(R, \lambda, k)$ — эквивалентны.

4. Всякий суммируемый $|R, \lambda, k+1|$ ряд будет суммируемым $|R, \lambda, k|^1$.

5. Пусть $k' = k + \mu$, $\mu > 0$. Тогда из $\Sigma c_n = c\,|R, \lambda, k|^p$ следует $\Sigma c_n = c\,|R, \lambda, k'|^{p'}$ при условиях $1 < p < \infty$; $\mu = 1/p - 1/p'$, $p' < \infty$, или $\mu > 1/p - 1/p'$, $p' \leqslant \infty$; $p = 1$; $\mu = 1 - 1/p'$, $p' < \infty$, или $\mu \geqslant 1$, $p' \leqslant \infty$.

М. Д. Калашников

9961. Экстремальные свойства эрмитовых матриц. Маркус, Мак-Грегор (Extremal properties of Hermitian matrices. Marcus M., McGregor J. L.), Canad. J. Math., 1956, 8, № 4, 524—531 (англ.)

Пусть V — n-мерное унитарное пространство, A — эрмитово положительное преобразование в V с собственными числами

$$0 < \alpha_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant \cdots \leqslant \alpha_n.$$

Пусть $V^{(r)}$ — грассмановское пространство r-векторов, порождаемое пространством V, и пусть $C_r(A)$ — преобразование, индуцируемое A в $V^{(r)}$.

Основной результат работы состоит в доказательстве следующих двух равенств:

$$\max \sum_{\omega \in Q_{kr}} (C_r(A)\, x_\omega, x_\omega) = E_r(\alpha_n, \ldots, \alpha_{n-k+1}), \quad (1)$$

$$\min \sum_{\omega \in Q_{kr}} (C_r(A)\, x_\omega, x_\omega) = E_r(\alpha_1, \ldots, \alpha_k). \quad (2)$$

Через $E_r(a_1, \ldots, a_k)$ обозначена r-я элементарная симметрическая функция аргументов $a_1, a_2, \ldots, a_k$, а через Q_{kr} — совокупность C_k^r наборов целых чисел, удовлетворяющих неравенству $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_r \leqslant k$. Max и min в (1) и (2) берутся по всевозможным ортонормированным системам k векторов из V: $x_1, x_2, \ldots, x_k$.

Равенства (1) и (2) являются обобщением результата Фана (Ky Fan, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1949, 35, 652—655), полученного для случая эрмитова преобразования A в V.

В. Б. Лидский

9962. Произведение методов суммирования и мерсеровы преобразования. Пати (Products of summability methods and Mercerian transformations. Pati T.), Proc. Nat. Inst. Sci. India, 1957, A23, № 6, 514—521 (англ.)

Пусть A и B — регулярные матрицы, $\sigma_n = B(s_n)$, $t_n = A(\sigma_n)$. Обозначим через AB (произведение матрицы A на матрицу B) матрицу, преобразующую s_n в t_n. Мерсеровым преобразованием последовательности s_n является преобразование s_n матрицей $\alpha E + (1-\alpha) B$, $-\infty < \alpha < \infty$ (E — тождественное преобразование).

Пусть (H, χ) — матрица метода суммирования Хаусдорфа (Харди, Расходящиеся ряды, Изд-во ин. лит., 1951, стр. 311).

Теорема. Если $U_\alpha = \alpha E + (1-\alpha)(H, \chi)$ и метод суммирования с матрицей U_α эквивалентен сходимости, то метод суммирования, соответствующий матрице AU_α, эквивалентен методу суммирования A.

Упомянутый в теореме метод суммирования A определяется следующим образом: последовательность s_n суммируется методом A к s, если $\lim\limits_{x \to \rho} A(s_n, x) = s$, где

$$A(s_n, x) = \frac{\Sigma p_n x^n s_n}{\Sigma p_n x^n},$$

ρ — радиус сходимости ряда $\Sigma p_n x^n$, и $p_n = (-1)^n \binom{-k}{n}$, $k > 0$ или $p_n = 1/n!$. Справедлив также непрерывный аналог этой теоремы. И. И. Огиевецкий

9963. Некоторые вопросы линейных матричных преобразований. Волков И. И., Матем. сб., 1958, 44, № 1, 85—112

В своей предыдущей статье (РЖМат, 1957, 562) автор определил понятие суммируемости последовательности $\{s_n\}$ матрицей $A = (a_{mn})$, не требуя сходимости рядов $\Sigma_{n=0}^\infty a_{mn} s_n$, и без доказательств сформулировал несколько свойств этой суммируемости. В реферируемой статье излагаются подробные доказательства некоторых из этих свойств (необходимые и достаточные условия для регулярности матрицы A, а также для того, чтобы регулярная матрица A была вполне эквивалентна сходимости) и, сверх того, изучаются некоторые дальнейшие свойства введенных автором в названной статье T_∞-матриц, в частности, их связь с вполне регулярными матрицами.

Примечание референта. Доказательство теоремы 1, в которой устанавливаются необходимые и достаточные условия для регулярности A, значительно упрощается, если иметь в виду, что при регулярной A существует такое натуральное число m_0, что $\Sigma_{n=0}^q a_{mn} s_n$ ограничена относительно q при каждом $m > m_0$ и каждой сходящейся последовательности $\{s_n\}$.

Г. Ф. Кангро

9964. Одна универсальная тауберова теорема. Кьо, Питерсен (A universal Tauberian theorem. Keogh F. R., Petersen G. M.), J. London Math. Soc., 1958, 33, № 1, 121—123 (англ.)

Поставим в соответствие подпоследовательности $\{S_{k_n}\}$ последовательности $\{S_n\}$ точку x в промежутке (0,1], в двоичной записи которой на двоичных местах с индексами k_n стоят единицы, а на остальных местах — нули. Множество подпоследовательностей последовательности $\{S_n\}$ называется множеством второй категории, если соответствующее ему множество точек $\{x\}$ является множеством второй категории в промежутке (0,1]. Доказывается, что действительная последовательность $\{S_n\}$ сходится, если существует регулярный матричный метод суммирования, который суммирует все подпоследовательности последовательности $\{S_n\}$, составляющие некоторое множество второй категории. Этот результат является обобщением одной теоремы Бака (Buck R. C., Bull. Amer. Math. Soc., 1943, 49, 898—899).

Г. Ф. Кангро

9965 К. О поведении в бесконечности интегралов однородных и неоднородных суммационных уравнений. Паше (Über das Verhalten der Integrale homogener und inhomogener Summengleichungen in Unendlichen. Paasche Ivan, München, Düsseldorf: Oldenbourg, 1954, 59 S., 5.90 DM) (нем.)

Суммационным уравнением (Die Summengleichung), следуя Хорну и Перрону, автор называет уравнение

$$\sum_{\mu=0}^\infty a_{\nu\mu} x_{\nu+\mu} = c_\nu, \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots \quad (1)$$

относительно функции целочисленного аргумента x_ν,

$\nu = 0, 1, 2, \ldots$ или, подробно, систему уравнений

$$a_{00}x_0 + a_{01}x_1 + a_{02}x_2 + \ldots = c_0,$$
$$a_{10}x_1 + a_{11}x_2 + \ldots = c_1,$$
$$a_{20}x_2 + \ldots = c_2.$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

Автор всегда предполагает, что элементы на главной диагонали матрицы коэффициентов отличны от нуля,

$$a_{\nu 0} \neq 0; \qquad (2)$$

при этом каждый из рядов (1) должен сходиться абсолютно.

Уравнения типа (1) появляются, если искать решение бесконечной системы линейных дифференциальных уравнений в виде степенного ряда $\Sigma_{\nu=0}^{\infty} x_\nu z^\nu$. В связи с этим автора интересуют лишь решения уравнения (1), для которых конечен $\overline{\lim}_{\nu\to\infty} \sqrt[\nu]{|x_\nu|}$. Значение этого предела автор называет главным порядком (die Größenordnung) решения x_ν.

Обрывая каждый из рядов (1) на n-м слагаемом, получим уравнение

$$a_{\nu 0}x_\nu + a_{\nu 1}x_{\nu+1} + \ldots + a_{\nu n}x_{\nu+n} = c_\nu, \ \nu = 0, 1, 2, \ldots, \qquad (3)$$

которое является линейным уравнением в конечных разностях порядка n. Таким образом суммационное уравнение (1) можно рассматривать как уравнение в конечных разностях бесконечного порядка.

Суммационные уравнения исследовались Хорном (Horn J., Crelles J., 1911, **140**, 120—174; Arch. Math. und Phys., 1918, **26**, 132—145), Перроном (Perron O., Math. Z., 1920, 8, 159—170; Math. Ann., 1921. 84, 1—15), Шеффером (Sheffer, Amer. J. Math., 1950, **72**, 835—848); в книге указана и другая литература. В §§ 1—2 автор кратко излагает их результаты; в дальнейшем, однако, он ими не пользуется. Некоторые результаты Перрона доказываются заново.

В § 3 исследуются суммационные уравнения с постоянными коэффициентами

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} a_\mu x_{\nu+\mu} = c_\nu, \ \nu = 0, 1, 2, \ldots \qquad (4)$$

В предположении

$$\overline{\lim}_{\nu\to\infty} \sqrt[\nu]{|c_\nu|} \equiv c < \frac{1}{\overline{\lim}_{\nu\to\infty} \sqrt[\nu]{|a_\nu|}} \qquad (5)$$

доказано, что уравнение (4) не имеет решений, для которых

$$\overline{\lim}_{\nu\to\infty} \sqrt[\nu]{|x_\nu|} < c$$

и имеет по крайней мере одно решение, такое, что

$$\overline{\lim}_{\nu\to\infty} \sqrt[\nu]{|x_\nu|} = c.$$

Далее, вслед за Перроном, показано, что при определенных предположениях решение суммационного уравнения (4) сводится к решению некоторого уравнения в конечных разностях.

В 4 рассматриваются суммационные уравнения со «слабо переменными» коэффициентами — суммационные уравнения Перрона. Именно, предполагается, что в уравнении (1) коэффициенты $a_{\nu\mu}$ могут быть представлены в виде $a_{\nu\mu} = a_\mu + b_{\nu\mu}$, так, что: 1) функция $F(z) = \Sigma_{\mu=0}^{\infty} a_\mu z^\mu$ регулярна в круге $|z| \leqslant q$ и исчезает там в $n \geqslant 0$ не обязательно различных точках $\rho_1, \ldots, \rho_n$, II) $|b_{\nu\mu}| \leqslant b_\nu Q^{-\mu}$, Q — постоянная, $Q > p$, $\lim_{\nu\to\infty} b_\nu = 0$.

Тогда, в предположениях (5) и (2), уравнение (1) не имеет решений главного порядка $< c$ и имеет по крайней мере одно решение главного порядка равного c. Это решение зависит от l_0 параметров, где l_0 — число нулей ρ_j (с учетом кратности), для которых $|\rho_j| \leqslant c$. Корню ρ_τ, $c < |\rho_\tau| \leqslant p$, отвечает l_τ-параметрическое семейство решений уравнения (1) главного порядка $\overline{\lim}_{\nu\to\infty} \sqrt[\nu]{|x_\nu|} = |\rho_\tau|$, где l_τ — число нулей ρ_j, лежащих внутри и на границе круга $|z| \leqslant |\rho_\tau|$. В частности, уравнение (1) имеет n-параметрическое семейство решений главного порядка $\leqslant q$.

Наконец, в последнем § 5 рассматриваются суммационные уравнения с «сильно переменными» коэффициентами. От уравнений со «слабо переменными» коэффициентами» они отличаются тем, что условие $\lim_{\nu\to\infty} b_\nu = 0$ в II) заменено на $\overline{\lim}_{\nu\to\infty} b_\nu \leqslant B$, где B некоторым образом зависит от чисел $a_{\mu\nu}$ и Q. Получены аналогичные результаты, которые, однако, формулируются гораздо сложнее. В. А. Якубович

9966 К. Аксиоматические вопросы теории суммирования. Эрве (Axiomatische Fragen der Limitierungstheorie. Erwe Friedhelm: Bonn. math. Schr., 1957, № 4, 70 S., ill.) (нем.)

Одной из важнейших задач общей теории суммирования последовательностей является определение на возможно более широких множествах последовательностей функционалов L, которые разумно обобщали бы понятие предела последовательности. Для этого требуется от функционалов L выполнение известных аксиом, например аксиом линейности, ограниченности, регулярности, транслятивности и т. д. В связи с этим возникают следующие основные вопросы: 1) Существуют ли функционалы L, удовлетворяющие данной системе аксиом? 2) Каково множество (в частности, область изменения) функционалов L, удовлетворяющих данной системе аксиом? 3) Какие последовательности суммируемы данной системой аксиом, т. е. при каких последовательностях $\mathfrak{A}$ значение $L(\mathfrak{A})$ не зависит от выбора функционала L, удовлетворяющего данной системе аксиом? Исследования по таким вопросам в случае множества $\mathfrak{B}$ ограниченных действительных последовательностей и составляют содержание реферируемой книги.

Разделы I (Об истории. Введение) и 2) (Обозначения, основные понятия и некоторые основные теоремы) имеют вводный характер.

В разделе 3 (Требования линейности, ограниченности и регулярности) показывается, что область изменения линейных функционалов L на $\mathfrak{B}$, удовлетворяющих условию ограниченности

$$L(\mathfrak{A}) \geqslant -\alpha \text{ для } \mathfrak{A} \in \mathfrak{B}_0 \qquad (1)$$

($\mathfrak{B}_0$ — множество последовательностей $\mathfrak{A} = \{a_k\} \, c \, 0 \leqslant a_k \leqslant 1$), характеризуется соотношениями

$$L(\mathfrak{N})\underline{\mathfrak{A}} - \alpha(\overline{\mathfrak{A}} - \underline{\mathfrak{A}}) \leqslant L(\mathfrak{A}) \leqslant L(\mathfrak{N})\overline{\mathfrak{A}} + \alpha(\overline{\mathfrak{A}} - \underline{\mathfrak{A}})$$

где $\overline{\mathfrak{A}} = \sup_k a_k$, $\underline{\mathfrak{A}} = \inf_k a_k$, $\mathfrak{N} = \{1, 1, 1, \ldots\}$. Рассматривается также частный случай, когда L регулярен. Если условие (1) отбросить, то область изменения $L(\mathfrak{A})$ составляет при расходящейся $\mathfrak{A}$ всю действительную ось.

Раздел 4 (Аксиомы вида $L(\vartheta \times \mathfrak{A}) = L(\vartheta)\,L(\mathfrak{A})$) посвящен изучению множества $\mathfrak{T}$ линейных регулярных функционалов L, удовлетворяющих условию (1) при

$\alpha = 0$. Пусть последовательность ϑ дуальна, т. е. имеет своими элементами лишь нули и единицы. Под произведением $\vartheta \times \mathfrak{A}$ понимается последовательность, которая получается из последовательности ϑ, если заменить ее единицы соответственно элементами $a_1, a_2, \ldots$ последовательности $\mathfrak{A}$. Рассматриваются функционалы $L \in \mathfrak{T}$, при которых $L(\mathfrak{A})$ не изменяется, если вместо $\mathfrak{A}$ поставить последовательность, получаемую из ϑ заменой единиц соответственно элементами $a_1, a_2, \ldots$, а нулей — числом $L(\mathfrak{A})$. Такие функционалы удовлетворяют условию

$$L(\vartheta \times \mathfrak{A}) = L(\vartheta) L(\mathfrak{A}) \text{ для } \mathfrak{A} \in \mathfrak{B}, \quad (2)$$

которая при $\vartheta = \{0, 1, 1, \ldots\}$ обращается в

$$L(\{0, a_1, a_2, \ldots\}) = L(\mathfrak{A}) \text{ для } \mathfrak{A} \in \mathfrak{B}. \quad (3)$$

Функционал $L \in \mathfrak{T}$, удовлетворяющий условию (3), называется банаховым.

Доказывается существование функционала $L \in \mathfrak{T}$, удовлетворяющего условию (2) при фиксированной ϑ. В случае $L(\vartheta) = 1$ (ϑ не нуль-последовательность) дается точная область изменения функционалов $L \in \mathfrak{T}$, удовлетворяющих условию (2). Случай $\vartheta = \{0, 1, 1, \ldots\}$ изучал Банах (Банах С., Курс функціонального аналізу, Киев, 1948, гл. II). Автор также излагает известный результат Лоренца (Lorentz G. G., Acta math., 1948, 80, 167—190), согласно которому последовательность $\mathfrak{A}$ суммируема банаховыми функционалами L тогда и только тогда, когда последовательность $\{(a_{k+1} + a_{k+2} + \ldots + a_{k+n})/n\}$ равномерно сходится при $k = 1, 2, \ldots$.

Наконец, поднимается вопрос, существуют ли функционалы $L \in \mathfrak{T}$, удовлетворяющие условию (2), для нескольких независимых дуальных последовательностей ϑ. В этом направлении доказывается, что существует банахов функционал L, удовлетворяющий условию (2) при $\vartheta = \{1, 0, 1, 0, \ldots\}$.

Раздел 5 (Упрощение аксиом) посвящен трактовке вопроса о том, в какой мере функционалы L на $\mathfrak{B}$, удовлетворяющие системам аксиом разделов 3 и 4, определены уже заданием их значений на множестве всех дуальных последовательностей. Вполне удовлетворительный ответ получается всегда, когда рассматриваемая система аксиом содержит условие ограниченности.

В разделе 6 (Заключительные замечания) поднимаются некоторые нерешенные вопросы, а также выясняются перспективы дальнейшего развития аксиоматического направления в общей теории суммирования последовательностей. Г. Ф. Кангро

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

9967. Ортогональные полиномы с экстремумом в концах интервала ортогональности. Аткинсон (On orthogonal polynomials with extrema at the ends of the orthogonality interval. Atkinson F. V.), Monatsh. Math., 1955, 59, № 4, 323—330 (англ.)

Рассматривается множество ортогональных полиномов $\{q_n(x)\}$. Главный член в $q_n(x)$ есть cx^{n+2}, $c > 0$ для $n \geqslant 1$ и $c > 0$ для $n = 0$. Кроме того, $\int_{-1}^{+1} q_n(x)\, q_m(x)\, dx = \delta_{nm}$ и $q_n'(\pm 1) = 0$. Нетрудно представить $q_n(x)$ через полиномы Лежандра. Устанавливается асимптотическая формула

$$q_n(\cos\theta) = \left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\right)^{-1/2} \cos\left[\left(n + \frac{5}{2}\right)\theta - \frac{\pi}{4}\right] + O\left[n^{-1}(\sin\theta)^{-3/2}\right],$$

где $n \sin\theta > A > 0$. Все нули $q_n(x)$, за исключением двух нулей $\pm y_n$, $y_n > 1$, расположены в $-1 < x < 1$. Показывается, что $\lim_{n\to\infty} n^2(y_n - 1)$ существует и совпадает только с положительным корнем функции Бесселя $(1 - 6D + 12D^2) I_0[(2\eta)^{1/2}]$ $(D = d/d\eta)$. G. Szegö.

Перевод из Math. Revs, 1956, 17, № 6, 607—608.

9968. Континуальные аналоги предложений о многочленах ортогональных на единичной окружности. Крейн М. Г., Докл. АН СССР, 1955, 105, № 4, 637—640

Пусть задано некоторое эрмитово ядро $H(t-s)$ $(0 \leqslant t, s \leqslant r)$; рассматривается некоторое условие, из которого вытекает существование для этого ядра резольвенты

$$\Gamma_r(t, s) + \int_0^r H(t-u)\, \Gamma_r(u, s)\, du = H(t-s) \quad (0 \leqslant s, t \leqslant r).$$

Для $\Gamma_r(t, s)$ справедливо соотношение $\Gamma_r(t, s) = \Gamma_r(r-s, r-t)$. Если теперь положить

$$P(r; \lambda) = e^{i\lambda r}\left(1 - \int_0^r \Gamma_r(s, 0)\, e^{-i\lambda s}\, ds\right),$$

$$P_*(r; \lambda) = 1 - \int_0^r \Gamma_r(0, s)\, e^{i\lambda s}\, ds,$$

то окажется, что P и P_* удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\frac{dP(r; \lambda)}{dr} = i\lambda P(r; \lambda) - \overline{A(r)}\, P_*(r; \lambda),$$

$$\frac{dP_*(r; \lambda)}{dr} = -A(r) P(r; \lambda), \text{ где } A(r) = \Gamma_r(0, r).$$

Оказывается, что для любой финитной функции $f(r) \subset L_2(0, \infty)$ имеет место равенство

$$\int_0^\infty |f(r)|^2\, dr = \int_{-\infty}^\infty |F(\lambda)|^2\, d\sigma(\lambda),$$

где

$$F(\lambda) = \int_0^\infty f(r) P(r; \lambda)\, dr,$$

а $\sigma(\lambda)$ — некоторая спектральная функция.

Соответствие $f(r) \to F(\lambda)$ порождает отображение, которое будет унитарным отображением всего $L_2(0, \infty)$ на все $L_2(\sigma)$ в том и только в том случае, когда расходится (равен $-\infty$) интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln \sigma'(\lambda)}{1 + \lambda^2} d\lambda$. Утверждение, что этот интеграл конечен, эквивалентно утверждению (III): хотя бы для одного λ ($\operatorname{Im}\lambda > 0$) функция $P_*(r; \lambda)$ $(0 \leqslant r < \infty)$ ограничена, и (IV): на любом ограниченном замкнутом множестве точек λ на полуплоскости $\operatorname{Im}\lambda > 0$ интеграл сходится равномерно (существует равномерно сходящийся предел $\Pi(\lambda) = \lim_{r\to\infty} P_*(r; \lambda)$).

В этих предложениях автор усматривает аналоги некоторым теоремам об ортогональных полиномах. В заметке содержатся и другие утверждения. Нет даже намеков на доказательство сформулированных предложений. В. В. Немыцкий

9969. Бесконечные интегралы, содержащие произведения функций Лежандра. Шарма (Infinite integrals involving products of Legendre functions. Sharma K. C.), Proc. Glasgow Math. Assoc., 1957, 3, № 3, 111—118 (англ.)

Вычисляются интегралы

$$A\left(\begin{matrix}m\ \mu\\ n\ \nu\end{matrix}\middle|\ p\right)=\int_1^\infty (x^2-1)^{-\mu/2}(p^2x^2-1)^{-m/2}Q_n^m(px)P_\nu^\mu(x)\,dx$$

и

$$B\left(\begin{matrix}\alpha\ \mu\\ \gamma\ \nu\end{matrix}\middle|\ p\right)=\int_1^\infty (x^2-1)^{-\mu/2}(p^2x^2-1)^{-\alpha/2}P_\gamma^{-\alpha}(px)P_\nu^\mu(x)\,dx,$$

где P и Q — присоединенные функции Лежандра первого и второго рода, причем $\mathrm{R}(m+n+1)>0$, $\mathrm{R}(m+n+\mu\pm\nu)>0$, $\mathrm{R}(\alpha+\gamma+1)>0$, $\mathrm{R}(\alpha\pm\gamma+\mu\pm\nu)>0$; $\mathrm{R}(p)>1$ в интеграле A, а в интеграле B $\mathrm{R}(p)>-1$, $|1-p^{-2}|<1$ и $\mathrm{R}(\mu)<1$. В основе вычислений лежит соотношение

$$\varphi(p)=p^{1-\mu}\int_0^\infty (x^2-1)^{-\mu/2}x^{-1}P^\mu_{\nu-1/2}(x)\,\psi(px)\,dx \qquad (1)$$

между изображением Лапласа $\psi(p)=p\int_0^\infty e^{-px}f(x)\,dx$ любой функции $f(x)$ и видоизмененным изображением Ганкеля

$$\varphi(p)=\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}p\int_0^\infty (px)^{1/2}K_\nu(px)x^{\mu-1}f(x)\,dx$$

функции $x^{\mu-1}f(x)$, где K — функция Макдональда.

Имеем:

$$A\left(\begin{matrix}m\ \mu\\ n\ \nu\end{matrix}\middle|\ p\right)=B_2p^{-n-m-1}\times$$

$$\times{}_2F_1\left(\frac{\mu+m+n+\nu+1}{2},\ \frac{\mu+m+n-\nu}{2};\ n+\frac{3}{2};\ p^{-2}\right), \qquad (2)$$

где

$$B_2=\frac{2^{\mu+m-2}\Gamma\left(\frac{\mu+m+\nu+n+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu+m-\nu+n}{2}\right)}{\Gamma(n+3/2)}.$$

При $\nu=n$ формула (2) принимает вид

$$A\left(\begin{matrix}m\ \mu\\ n\ n\end{matrix}\middle|\ p\right)=B_3p^{\mu-\frac{1}{2}}(p^2-1)^{-\frac{m+\mu}{2}}P^{-n-\frac{1}{2}}_{-\frac{m+\mu}{2}}\left(\frac{p^2+1}{p^2-1}\right),$$

где $B_3=2^{m+\mu-2}\,\Gamma\left(\frac{m+\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m+\mu}{2}+n+\frac{1}{2}\right)$.

Имеет место также равенство

$$B\left(\begin{matrix}\alpha\ \mu\\ \gamma\ \nu\end{matrix}\middle|\ p\right)=C_1p^{-\alpha-\gamma-1}\times$$

$$\times{}_2F_1\left(\frac{\mu+\alpha+\nu+\gamma+1}{2},\ \frac{\mu+\alpha-\nu+\gamma}{2};\ \mu+\alpha;\ 1-p^{-2}\right),$$

где

$$C_1=\frac{2^{\mu+\alpha-2}\Gamma\left(\frac{\mu+\alpha+\nu+\gamma+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu+\alpha-\nu+\gamma}{2}\right)}{\pi\Gamma(\mu+\alpha)\Gamma(\alpha-\gamma)}\times$$

$$\times\frac{\Gamma\left(\frac{\mu+\alpha+\nu-\gamma}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu+\alpha-\nu-\gamma-1}{2}\right)}{\Gamma(\alpha+\gamma+1)}$$

Ю. Л. Рабинович

9970. Одно свойство гамма-функции. Анастасиадис (Une propriété de la fonction gamma. Anastassiadis Jean), Bull. sci. math., 1957, 81, № 3, 116—118 (франц.)

Доказывается, что функция $(e/x)^x\Gamma(x)$ является убывающей в интервале $0<x<\infty$ и что этим свойством может быть заменено требование логарифмической выпуклости, предъявляемое к решению функционального уравнения, определяющего гамма-функцию (Artin E., Einführung in die Theorie der Gammafunktion, Hamb. math. Einzelsch., 1931, 11, Leipzig), а именно доказывается, что функция $f(x)$, определенная для $x>0$ и удовлетворяющая условиям: 1) $f(x+1)=xf(x)$, 2) $f(1)=1$ и 3) $(e/x)^xf(x)$, убывает при $x>0$ (достаточно при $x>M$), совпадает с $\Gamma(x)$.

А. Г. Школьник

9971. О некоторых соотношениях между произведениями двусторонних гипергеометрических рядов. Шукла (On certain relations between products of bilateral hypergeometric series. Shukla Harishanker), Proc. Glasgow Math. Assoc., 1957, 3, № 3, 141—144 (англ.)

Вводятся обозначения

$$(a;\ n)=(1-a)(1-aq)\dots(1-aq^{n-1}),\ (a;\ 0)=1;$$

$$(a;\ -n)=(1-aq^{-1})^{-1}(1-aq^{-2})^{-1}\dots(1-aq^{-n})^{-1},\ |q|<1;$$

$$(a)_n=a(a+1)\dots(a+n-1);\ (a)_0=1;$$

$$(a)_{-n}=(a-1)^{-1}(a-2)^{-1}\dots(a-n)^{-1};$$

$${}_r\Psi_r\left[\begin{matrix}a_1,a_2,\dots,a_r;\\ b_1,b_2,\dots,b_r\end{matrix}\ z\right]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(a_1;\ n)(a_2;\ n)\dots(a_r;\ n)}{(b_1;\ n)(b_2;\ n)\dots(b_r;\ n)}z^n;$$

$${}_rH_r\left[\begin{matrix}a_1,a_2,\dots,a_r;\\ b_1,b_2,\dots,b_r\end{matrix}\ z\right]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(a_1)_n(a_2)_n\dots(a_r)_n}{(b_1)_n(b_2)_n\dots(b_r)_n}z^n;$$

$$\prod\left[\begin{matrix}a_1,a_2,\dots,a_r\\ b_1,b_2,\dots,b_r\end{matrix}\right]=$$

$$=\prod_{n=0}^{\infty}\frac{(1-a_1q^n)(1-a_2q^n)\dots(1-a_rq^n)}{(1-b_1q^n)(1-b_2q^n)\dots(1-b_rq^n)};$$

$$\Gamma\left[\begin{matrix}a_1,a_2,\dots,a_r\\ b_1,b_2,\dots,b_r\end{matrix}\right]=\frac{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)\dots\Gamma(a_r)}{\Gamma(b_1)\Gamma(b_2)\dots\Gamma(b_r)}.$$

Знак $\mathrm{idem}\,(a;\ b)$ обозначает повторение предшествующего ему выражения с заменой a на b.

Доказывается следующая теорема:

$$A_{1M}\Psi_M\left[\begin{matrix}\frac{qc_1}{a_1},\dots,\frac{qc_M}{a_1};\\ \frac{qb_1}{a_1},\dots,\frac{qb_M}{a_1}\end{matrix}\ zt\right]{}_N\Psi_N\left[\begin{matrix}\frac{a_1}{c_1},\dots,\frac{a_1}{c_N}\\ \frac{qa_1}{b_1},\dots,\frac{qa_1}{b_N}\end{matrix}\right]+$$

$$+\,\mathrm{idem}\,(a_1;\ a_2,\dots,a_M)=0,$$

где

$$A_1=a_1\prod\left[\begin{matrix}\frac{a_1}{c_1},\dots,\frac{a_1}{c_M};\ \frac{a_1q}{b_1},\dots,\frac{a_1q}{b_N};\ \frac{b_1q}{a_1},\dots,\frac{b_Mq}{a_1}\\ \frac{a_1}{a_2},\dots,\frac{a_1}{a_M};\ \frac{a_1}{c_1},\dots,\frac{a_1}{c_N};\ \frac{a_2q}{a_1},\dots,\frac{a_Mq}{a_1}\end{matrix}\right],$$

$$t=\frac{a_1a_2\dots a_{M'}}{qc_1c_2\dots c_M}:|z|<1,\ |zt|<1,\left|\frac{q^Nc_1c_2\dots c_N}{b_1b_2\dots b_Nz}\right|<1,$$

$$\left|\frac{qb_1b_2\dots b_M}{a_1a_2\dots a_Mz}\right|<1,\ M>1,\ N>0.$$

$$A^*_{1M}H_M\left[\begin{matrix}1+c_1-a_1,\dots,1+c_M-a_1;\\ 1+b_1-a_1,\dots,1+b_M-a_1\end{matrix}\ z\right]\times$$

$$\times {}_NH_N\left[\begin{matrix}a_1-b_{M+1},\dots,a_1-b_{M+N};\ z\\ a_1-c_{M+1},\dots,a_1-c_{M+N}\end{matrix}\right]+$$
$$+\operatorname{idem}(a_1;\ a_2,\ a_3,\dots,a_{M+N})=0,$$

где

$$A_1^*=\Gamma\left[\begin{matrix}1+a_2-a_1,\dots,1+a_{M+N}-a_1,\\ 1+b_2-a_1,\dots,1+b_{M+N}-a_1,\\ a_1-a_2,\dots,a_1-a_{M+N}\\ a_1-c_1,\dots,a_1-c_{M+N}\end{matrix}\right],\ |z|=1.$$

Ю. Л. Рабинович

9972. **О некоторых следствиях теоремы сложения цилиндрических функций. Феньё** (A hengerfüggvények addiciós tételének néhány következményéről. Fenyö István), Magyar tud. akad. alkalm. mat. int. közl., 1953, 2, 345—360 (венг.; рез. русск., нем.)

Дается обобщение интегральной формулы Агостинелли, относящейся к коэффициентам Фурье некоторых функций. Среди других выведена формула для коэффициентов ряда Фурье по функциям Гегенбауэра.

A. Szilvay

9973. **Соотношения между сферическими и эллипсоидальными гармониками и их некоторые приложения. Арскотт** (Relations between spherical and ellipsoidal harmonics and some applications. Arscott F. M.), J. London Math. Soc., 1958, 33, № 1, 39—49 (англ.)

Предметом статьи является установление соотношений между сферическими и эллипсоидальными гармониками $E_n^m(\alpha)$, $E_n^m(\beta)$.

Для сферических гармоник сохраняются стандартные обозначения $P_n^m(\cos\theta)\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}m\varphi$, а для эллипсоидальных гармоник автор вводит свои обозначения, заключающиеся в следующем: так как полином Ламе $E(\alpha)$ представляется в виде $\mathrm{sn}^r\alpha\cdot\mathrm{cn}^s\alpha\cdot\mathrm{dn}^t\alpha F(\mathrm{sn}^2\alpha)$, где числа r, s, t, имеют значения либо 0, либо 1, а F означает полином, то существует восемь типов полиномов Ламе, сводящихся в схему

$$uE,\ sE,\ cE,\ dE,\ scE,\ sdE,\ cdE,\ scdE \qquad (1)$$

в зависимости от того, какой множитель стоит при $F(\mathrm{sn}^2\alpha)$.

Автор рассматривает полиномы Ламе типа uE, когда множитель равен единице (unity). Произведение двух одинаковых функций типа (1) обозначается символом Ep, так что $uE_n^p(\alpha)\,uE_n^p(\beta)\equiv uEp_n^p(\alpha\beta)$. Так как известно, что любая гармоника (сферическая или эллипсоидальная) выражается в виде линейной комбинации (эллипсоидальных или сферических) гармоник, то существует восемь типов преобразований, заключающихся в схеме (2), где

$$\begin{aligned}
&uEp_{2n}^p(\alpha,\beta)\ \text{соответствует}\ P_{2n}^{2m}(\cos\theta)\cos 2m\varphi,\\
&sEp_{2n+1}^p(\alpha,\beta)\ \text{»}\ P_{2n+1}^{2m}(\cos\theta)\cos 2m\varphi,\\
&cEp_{2n+1}^p(\alpha,\beta)\ \text{»}\ P_{2n+1}^{2m+1}(\cos\theta)\sin(2m+1)\varphi,\\
&dEp_{2n+1}^p(\alpha,\beta)\ \text{»}\ P_{2n+1}^{2m+1}(\cos\theta)\cos(2m+1)\varphi,\\
&csEp_{2n+2}^p(\alpha,\beta)\ \text{»}\ P_{2n+2}^{2m+1}(\cos\theta)\sin(2m+1)\varphi,\\
&sdEp_{2n+2}^p(\alpha,\beta)\ \text{»}\ P_{2n+2}^{2m+1}(\cos\theta)\cos(2m+1)\varphi,\\
&cdEp_{2n+2}^p(\alpha,\beta)\ \text{»}\ P_{2n+2}^{2m+2}(\cos\theta)\sin(2m+2)\varphi,\\
&scdEp_{2n+3}^p(\alpha,\beta)\ \text{»}\ P_{2n+3}^{2m+2}(\cos\theta)\sin(2m+2)\varphi.
\end{aligned} \qquad (2)$$

Как было сказано, автор занимается преобразованиями первого типа схемы (2). Так, полагая

$$C^m=P_{2n}^{2m}(\cos\theta)\cos 2m\varphi,\ E^p=uEp_{2n}^p(\alpha,\beta)$$

имеем равенства

$$C^m=\sum_{p=0}^n {}_mg_pE^p\ (m\ \text{от}\ 0\ \text{до}\ n),$$

$$E^p=\sum_{m=0}^n {}_pf_mC^m\ (p\ \text{от}\ 0\ \text{до}\ n)$$

или в матричных обозначениях

$$C=\{C^m\},\ E=\{E^p\},$$
$$G=[{}_mg_p],\ F[{}_pf_m],$$

так что $C=GE$, $E=FC$.

Для определения матрицы F полагают в формуле преобразования

$$uE_{2n}^p(\alpha)\,uE_{2n}^p(\beta)=\sum_m {}_pf_mP_{2n}^{2m}(\cos\theta)\cos 2n\varphi$$

переменную β, равной K, что дает

$$uE_{2n}^p(\alpha)=\{uE_{2n}^p(K)\}^{-1}\sum_m {}_pf_mP_{2n}^{2m}(k\,\mathrm{sn}\,\alpha),$$

откуда коэффициенты ${}_pf_m$ находятся с помощью известных формул Эрдейи.

В качестве одного из приложений рассматриваются характеристические числа для интегрального уравнения полиномов Ламе, так, например, для уравнения

$$uE_{2n}^p(\alpha)=\lambda_{2n}^p\int_{-2K}^{2K}P_{2n}(k\,\mathrm{sn}\,\alpha\,\mathrm{sn}\,\beta)\,uE_{2n}^p(\beta)\,d\beta.$$

Подставляя сюда разложение

$$P_{2n}(k\,\mathrm{sn}\,\alpha\,\mathrm{sn}\,\beta)=\sum_{p'} {}_0g_puEp_{2n}^{p'}(\alpha,\beta)$$

и пользуясь свойством ортогональности функций $uE_{2n}^p(\beta)$, находим

$$uE_{2n}^p(\alpha)=\lambda_{2n0}^p{}_0g_puE_{2n}^p(\alpha)\int_{-2K}^{2K}\{uE_{2n}^p(\beta)\}^2\,d\beta,$$

откуда вытекает известная формула Айнса

$$(\lambda_{2n}^p)^{-1}={}_0g_p\int_{-2K}^{2K}\{uE_{2n}^p(\beta)\}^2\,d\beta.$$

Н. С. Кошляков

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

9974. **Полугруппы линейных операторов и задача представления и обращения для преобразований Лапласа. Бутцер** (Halbgruppen von linearen Operatoren und das Darstellungs- und Umkehrproblem für Laplace-Transformationen. Butzer P. L.), Math. Ann., 1957, 134, № 2, 154—166 (нем.)

Зависящее от параметра $\zeta\geqslant 0$ семейство ограниченных линейных операторов $T(\zeta)$, преобразующих элементы x банахова пространства X с нормой $\|x\|$ в элементы $T(\zeta)x$ того же пространства, называется полугруппой, если $T(\zeta_1+\zeta_2)=T(\zeta_1)T(\zeta_2)$, а $T(0)=I$ — единичный оператор. Если для любого $x\in X$ элемент $T(\zeta)x$ измерим и $\lim_{\zeta\to 0}T(\zeta)x=x$, то полугруппа принадлежит классу C_0. Бесконечно малый производящий оператор A полугруппы определяется равенством

$$\lim_{\eta\to 0}\frac{1}{\eta}[(T\eta)-I]x=Ax.$$

Сопряженным с X пространством X^* называется пространство всех линейных функционалов $x^*(x)$ пространства X, причем норма $\|x^*(x)\|$ определяется равенством

$$\|x^*(x)\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} |x^*(x)|.$$

Если $(X^*)^* = X$, то X называется рефлексивным пространством. Например, свойством рефлексивности обладает пространство $L_p(a, b)$ функций $x(t)$ с нормой $\|x(t)\| = \int_a^b |x(t)|^p\, dt$. Переходя к интегралу Лапласа

$$y(\sigma) = \int_0^\infty e^{-\sigma u} x(u)\, du, \qquad (1)$$

образуем полугруппу операторов $l_{\zeta,\,t}$ таких, что

$$l_{\zeta,\,\tau}[y(\sigma)] = \sum_{n=0}^\infty l_n L_n(t)\, e^{-n\zeta},\ \zeta \geqslant 0,$$

где $L_n(t) = e^{-t/2}\overline{L}_n(t) = \frac{e^{t/2}}{n!}\frac{d^n}{dt^n}(e^{-t}t^n)$, причем $L_n(t)$ — нормированные функции Лагерра, $\overline{L}_n(t)$ — полиномы Лагерра, а коэффициенты l_n определяются равенством $l_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}\frac{1}{k!}\, y^{(k)}\left(\frac{1}{2}\right)$.

Необходимое и достаточное условие представимости $y(\sigma)$ в виде интеграла Лапласа (1), где $x(t) \in L_1(0, \infty)$, гласит

$$\lim_{\zeta\to 0,\ \xi\to 0} \int_0^\infty |l_{\zeta,\,t}[y(\sigma)] - l_{\xi,\,t}[y(\sigma)]|\, dt = 0.$$

Если потребовать, чтобы $x(t) \in L_p(0, \infty)$, где $p > 1$, то необходимое и достаточное условие представимости $y(\sigma)$ в виде интеграла Лапласа с помощью такой функции $x(t)$ примет вид

$$\int_0^\infty |l_{\zeta,\,t}[y(\sigma)]|^p\, dt \leqslant M, \quad \zeta \geqslant 0.$$

Полиномы Эрмита также порождают подгруппу операторов $T(\zeta)$, определяемую следующим образом:
Пусть

$$H_n(t) = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi}\, 2^n n!}}\,(-1)^n e^{t^2/2}\,\frac{d^n}{dt^n}(e^{-t^2})$$

— нормированные ортогональные функции Эрмита. Если при любом целом положительном n

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-t^2/2}|t|^n |x(t)|\, dt < \infty,$$

то ряд $h(t; r) = \sum_0^\infty h_n H_n(t)\, r^n$, где $h_n = \int_{-\infty}^\infty x(t) H_n(t)\, dt$ сходится, если $0 \leqslant r < 1$, причем

$$h(t; r) = \int_{-\infty}^\infty K(t; u; r)\, x(u)\, du,$$

$$K(t; u; r) = \sum_0^\infty H_n(t) H_n(u) r^n =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi(1-r^2)}}\, e^{\frac{t^2-u^2}{2} - \frac{(t-ru)^2}{1-r^2}}$$

Заменив r на $e^{-\zeta}$ и положив

$$T(\zeta)[x(t)] = \sum_{n=0}^\infty e^{-n\zeta} h_n H_n(t),$$

получим полугруппу операторов $T(\zeta)$, для которой бесконечно малый производящий оператор A_H определяется равенством $A_H x(t) \sim -\sum_1^\infty n h_n H_n(t)$. Из уравнения Эрмита — Вебера $H_n''(t) + (2n + 1 - t^2) H_n(t) = 0$ следует

$$A_n x(t) = \frac{1}{2}(x''(t) + (1 - t^2)\, x(t)] = \frac{1}{2}\, k(t).$$

С помощью основных положений теории полугрупп доказывается, что для того чтобы выполнялось требование

$$\int_{-\infty}^\infty |h(t, r) - x(t)|^p\, dt = O\left(\ln\frac{1}{r}\right), \text{ где } p > 1,$$

необходимо и достаточно, чтобы $k(t)$ удовлетворяло условию

$$\int_{-\infty}^\infty |k(t)|^p\, dt < \infty.$$

Ю. Л. Рабинович

9975. Изображение некоторых соотношений посредством двумерных преобразований Лапласа. Станкович (Abbildung gewisser Operationen durch die zweidimensionale Laplace — Transformation. Stanković Bogoljub), Publs Inst. math. Acad. serbe sci., 1957, 11, 1—8 (нем.)

Обозначим конечный прямоугольник $u_0 \leqslant u \leqslant u_1$; $v_0 \leqslant v \leqslant v_1$, u_0, u_1, v_0; $v_1 > 0$ через $D(u_0, u_1; v_0, v_1)$. Прямоугольник $D(0, \infty; 0, \infty)$ будем обозначать также R^{+2}. По определению

$$\iint_{R^{+2}} G(x, y)\, dxdy = \lim_{X,\,Y\to\infty} \int_0^X \int_0^Y G(x, y)\, dxdy.$$

Обозначим через $\Phi(\mu, \nu; z)$ функцию Райта $\Phi(\mu, \nu; z) = \sum_{k=0}^\infty \frac{z^k}{\Gamma(k+1)\,\Gamma(\mu + \nu k)}$. Используются также обозначения $\Phi(\mu, \nu; -z^\nu) = \Phi(-z^\nu)$, $\Phi(\beta, \rho; -z^\rho) = \Phi(-z^\rho)$, причем или $\nu > 0$ ($\rho > 0$) и $\mu > 0$ ($\beta > 0$), или $-1 < \nu < 0$ ($-1 < \rho < 0$) и μ (β) — любое. Будем говорить, что функция $h(\xi, \eta; x, y)$ удовлетворяет условию (*), если она определена в области $\xi \geqslant \xi_1$, $\eta \geqslant \eta_1$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, интеграл $\iint_{R^{+2}} h(\xi, \eta; x, y)\, dxdy$ сходится, имеют место неравенства $H_1(\xi, \eta; x, y) \leqslant h(\xi, \eta; x, y) \leqslant H_2(\xi, \eta; x, y)$ и в интегралах $\iint_{R^{+2}} H_1(\xi, \eta; x, y)\, dxdy$, $\iint_{R^{+2}} H_2(\xi, \eta; x, y)\, dxdy$ можно перейти к пределу при $\xi, \eta \to \infty$ под знаком интеграла.

Теорема 1. Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна в R^{+2}, интеграл $\iint_{R^{+2}} e^{-ux-vy} f(x, y)\, dxdy = \varphi(u, v)$ для всех точек (u, v) из $D(u_0, u_1; v_0, v_1)$ сходится, функция $e^{-ux-vy} g(x, y, \xi_0, \eta_0)$,

$$e^{-ux-vy} g(x, y; \xi_0, \eta_0) =$$

$$= e^{-ux-vy} \int_0^{\xi_0}\int_0^{\eta_0} \Phi(-\xi x^\nu)\, x^{\mu-1}\Phi(-\mu y^\rho)\, y^{\beta-1} f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta$$

удовлетворяет условию (*), тогда

$$\iint_{R^{+2}} e^{-ux-vy} g(x, y; \infty, \infty)\, dxdy =$$

$$= \frac{1}{u^\mu v^\beta}\varphi\left(\frac{1}{u^\nu}, \frac{1}{v^\rho}\right) \text{ для } (u, v) \subset D(u_0^{1/\nu}, u_1^{1/\nu}; v_0^{1/\rho} v_1^{1/\rho}).$$

Теорема 2. Если, при соблюдении двух первых условий предыдущей теоремы, функции $e^{-ux-vy} g_1(x, y; \xi_0)$, $e^{-ux-vy} g_2(x, y; \eta_0)$, где

$$e^{-ux-vy} g_1(x, y; \xi_0) =$$

$$= e^{-ux-vy} \int_0^{\xi_0} \Phi(-\xi x^\nu)\, x^{\mu-1} f(\xi, y)\, d\xi,$$

$$e^{-ux-vy}g_2(x, y; \eta_0) =$$
$$= e^{-ux-vy}\int_0^{\eta_0}\Phi(-\eta y^\rho)\,y^{\beta-1}f(x, \eta)\,d\eta,$$

удовлетворяют условию (*), то

$$\iint_{R^{+2}} e^{-ux-vy}g_1(x, y; \infty)\,dxdy = \frac{1}{u^\mu}\varphi\left(\frac{1}{u^\nu}, v\right);$$

$$\iint_{R^{+2}} e^{-ux-vy}g_2(x, y; \infty)\,dxdy = \frac{1}{v^\beta}\varphi\left(u, \frac{1}{v^\rho}\right),$$

для всех (u, v) из $D(u_0^{1/\nu}, u_1^{1/\nu}; v_0, v_1)$ соответственно из $D(u_0, u_1; v_0^{1/\rho}, v_1^{1/\rho})$. Л. Я Цлаф

9976. Замечание к теории преобразований Ганкеля. Феньё (Megjegyzés a Hankel-transzformáció elméletéhez. Fenyö István), Magyar tud. akad. alkalm. mat. int. közl., 1953, 2, 335—343 (венг.; рез. русск., нем.)

Если существует n-кратное преобразование Фурье для $f(x)$, тогда также существует преобразование Ганкеля для $x^{(n-2)/2}f(x)$ и

$$y^{(n-1)/2}F(y) = \int_0^\infty \xi\,(\xi^{(n-2)/2}f(\xi))\,J_{\frac{n-2}{2}}(y\xi)\,d\xi,$$

где $F(y)$ — n-кратное преобразование Фурье $f(x)$.

В качестве приложения теоремы определены собственные значения кратного преобразования Фурье. В случае обычного преобразования Фурье (не кратного) получается известный результат. A. Szilvay

9977. Простая иллюстрация операционных методов. Робинсон (A simple illustration of operational methods. Robinson D. W.), Amer. Math. Monthly, 1958, 65, № 2, 115—116 (англ.)

9978. Происхождение и особенности операционного исчисления. Казнав (Origines et particularités du calcul opérationnel. Cazenave René), Ann. télécommuns, 1958, 13, № 1-2, 35—38 (франц.)

ПРИЛОЖЕНИЯ ОБЩИХ МЕТОДОВ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

9979. Теоремы сложения для решений волнового уравнения в параболических координатах. Хокстадт (Addition theorems for solutions of the wave equation in parabolic coordinates. Hochstadt Harry), Pacif. J. Math., 1957, 7, № 3, 1365—1380 (англ.)

Теоремы сложения для функций Бесселя (в виде, данном Нейманом, Граффом и др.), сферических гармоник, лежандровых полиномов и других специальных функций хорошо известны. В настоящей статье автор занимается исследованием теорем сложения для функций, являющихся решениями уравнения Гельмгольца $\Delta u + k^2u = 0$, главным образом для функций параболоида вращения. Так, введя параболические координаты ξ, η, φ посредством равенств

$$x = 2\sqrt{\xi\eta}\cos\varphi, \quad y = 2\sqrt{\xi\eta}\sin\varphi, \quad z = \xi - \eta,$$

уравнение Гельмгольца автор преобразует к виду, в котором координаты ξ, η, φ разделяются и получаются решения вида $u = f_1(\xi)\,f_2(\eta)\,e^{-i\mu\varphi}$, где функции $f_1(\xi)$, $f_2(\eta)$ определяются равенствами

$$f_1(\xi = m_\chi^\mu(-2ik\xi) =$$
$$= (-2ik\xi)^{\mu/2}e^{ik\xi}\,\frac{{}_1F_1\left(\frac{1+\mu}{2} - x;\ 1+\mu;\ -2ik\xi\right)}{\Gamma(1+\mu)},$$

$$f_2(\eta) = m_\chi^\mu(2ik\eta) =$$
$$= (2ik\eta)^{\mu/2}e^{-ik\eta}\,\frac{{}_1F_1\left(\frac{1+\mu}{2} - x;\ 1+\mu;\ 2ik\eta\right)}{\Gamma(1+\mu)};$$

${}_1F_1$ означает обобщенную гипергеометрическую функцию. Далее, введя в рассмотрение производящую для функций

$$\Omega_n^\mu(P) = \frac{\Gamma(1+n+\mu)}{n!}\,m^\mu_{n+\frac{1+\mu}{2}}(-2ik\xi)\times$$
$$\times\, m^\mu_{n+\frac{1+\mu}{2}}(2ik\eta)\,e^{-i\mu\varphi},$$

автор устанавливает теорему 1: При $|t|<1$, $\mu \neq -1, -2, \ldots$ имеет место разложение

$$G_\mu(P, t) = \sum_{n=0}^\infty \Omega_n^\mu(P)\,(-t)^n =$$
$$= \frac{\exp\left[ik\,(\xi-\eta)\,\frac{1-t}{1+t}\right]\,J_\mu\left(\frac{2k\sqrt{\xi\eta}t}{1+t}\right)e^{-i\mu\varphi}}{t^{\mu/2}\,(1+t)},$$

где J_μ означает функцию Бесселя.

Затем исследуются различные частные случаи теоремы 1. Н. С. Кошляков

9980. Исследование обратной волны при направленном сложении мощностей. Кулешов Ю. Г., Изв. Киевск. политехн. ин-та, 1956, 21, 41—48

Вычисление интегралов Фурье некоторых элементарных функций с пояснением физического смысла этих интегралов как функций обратной волны. Приводится физическое значение задачи о минимуме функционала вида

$$F = \int_{\omega_1}^{\omega_2}(\Psi[F(x), \omega])^2\,d\omega$$

с неизвестной функцией $F(\omega)$. Н. А. Бразма

См. также: 9680, 9693, 9695, 9696, 9734, 9831, 9877

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Редактор *М. А. Наймарк*

9981. Локально выпуклые структуры. Кавай (Locally convex lattices. Kawai Itizo), J. Math. Soc. Japan, 1957, 9, № 3, 281—314 (англ.)

Обобщая теорию нормированных и метрических линейных полуупорядоченных пространств, автор строит теорию локально выпуклых структур. Линейная структура (K-линеал) E называется локально выпуклой, если E одновременно является локально выпуклым хаусдорфовым пространством, в котором топология T следующим образом согласована с упорядочением: если направленное множество $x_\lambda \overset{(T)}{\to} 0$, а $|y_\lambda| \leqslant |x_\lambda|$ при всех λ, то и $y_\lambda \overset{(T)}{\to} 0$ (условие A). Локально выпуклая структура E архимедова, структурные операции в E T-непрерывны и имеет место теорема о T-предельном переходе

в неравенстве. Если $\{p_\alpha\}$ — семейство псевдонорм в E, описывающее топологию T, то полагая для каждого $x \in E$

$$\bar{p}_\alpha(x) = \sup_{0 \leqslant y \leqslant |x|} p_\alpha(y),$$

можно получить семейство «монотонных» псевдонорм, т. е. таких, что $|x'| \leqslant |x|$ влечет $\bar{p}_\alpha(x') \leqslant \bar{p}_\alpha(x)$, описывающее ту же топологию T. Поэтому, не уменьшая общности, можно сами псевдонормы p_α считать монотонными. Если E — K-линеал и одновременно борнологическое пространство, то для того чтобы E было локально выпуклой структурой, достаточно потребовать выполнения условия A только для последовательностей $\{x_n\}$ с натуральными индексами. T-полные счетно-нормированные структуры называются $\mathfrak{F}$-структурами.

В работе вводятся следующие условия, которым могут удовлетворять рассматриваемые локально-выпуклые структуры:

I (I′). (o)-непрерывность по Муру — Смиту (по последовательностям). Если направленное по убыванию множество $x_\lambda \downarrow 0$ (монотонная последовательность $x_n \downarrow 0$), то $x_\lambda \xrightarrow{(T)} 0$ ($x_n \xrightarrow{(T)} 0$).

II. (II′). Полунепрерывность по Муру — Смиту (по последовательностям). Если направленное по возрастанию множество $x_\lambda \uparrow x$, $x_\lambda \geqslant 0$ (последовательность $x_n \uparrow x$, $x_n \geqslant 0$), то $p_\alpha(x_\lambda) \uparrow p_\alpha(x)$ ($p_\alpha(x_n) \uparrow p_\alpha(x)$) при всех α. Условие I влечет II, I′ влечет II′.

Теорема 1.4. Всякая локально выпуклая структура E изоморфна некоторой линейной подструктуре проективного предела E_1 банаховых структур и плотна в нем. Пространство E_1 также является локально выпуклой структурой и будет T-пополнением структуры E.

Если E — локально выпуклая структура, то через $\bar{E}$ обозначается ее K-пополнение, т. е. K-пространство (полная линейная структура), получаемое в результате пополнения структуры E, как архимедова K-линеала, по сечениям.

Теорема 1.5. Если E удовлетворяет условию II, то $\bar{E}$ — также локально выпуклая структура, удовлетворяющая условию II, причем топология пространства $\bar{E}$ индуцирует в E первоначально заданную там топологию. (Легко проверить, что если E — любая локально выпуклая структура, то и $\bar{E}$ — локально выпуклая структура, а топология из $\bar{E}$ индуцирует в E первоначальную топологию. Этого предложения автор не отмечает. (*Реф.*)

В § 2 изучаются соотношения между следующими классами линейных функционалов в локально выпуклой структуре E : E' — класс T-непрерывных линейных функционалов (дуальное пространство), $\widetilde{E}$ — класс регулярных функционалов (сопряженное пространство), $\dot{E}$ — класс (o)-линейных функционалов ((o)-непрерывных по последовательностям), E^* — класс направленно (o)-непрерывных линейных функционалов. Обобщаются известные результаты о функционалах в KB-линеалах, в том числе теоремы Огасавары — Накамуры (дополненные референтом, РЖМат, 1954, 5171). В частности, имеются следующие результаты:

Теорема 2.1. E' нормально содержится в $\widetilde{E}$. Если E T-полна по последовательностям и всякий T-ограниченный линейный функционал на E T-непрерывен, то $E' = \widetilde{E}$. В частности, $E' = \widetilde{E}$, если E — $\mathfrak{F}$-структура.

Теорема 2.2. E' с сильной топологией есть локально выпуклая структура, удовлетворяющая условию II.

Теорема 2.4. Для включения $E' \subset E^*$ ($E' \subset \dot{E}$) необходимо и достаточно, чтобы E удовлетворяла условию I (I′).

Следствие 2.4.3. Если E — σ-полная $\mathfrak{F}$-структура, то условие I′ необходимо и достаточно для совпадения всех четырех классов: $\widetilde{E} = E' = \dot{E} = E^*$.

Для каждой псевдонормы положим $N_\alpha = p_\alpha^{-1}(0)$. Это нормальный подлинеал в E, а фактор-линеал $E_\alpha = E/N_\alpha$ — KB-линеал. Устанавливаются различные соотношения между свойствами E и E_α, например, если E удовлетворяет условию I (II), то и E_α удовлетворяют тому же условию. Чтобы из свойств E_α выводить некоторые заключения относительно E, множество псевдонорм $\{p_\alpha\}$ предполагается направленным по возрастанию.

Теорема 3.3.3. Пусть локально выпуклая структура E удовлетворяет условию II и T-полна. Тогда: а) если каждое E_α — K-пространство, то E — K-пространство; б) если каждое E_α удовлетворяет условию I, то E — K-пространство и удовлетворяет условию I. 4) Пусть E T-полна. Тогда если все E_α σ-полны и удовлетворяют условию I′, то E — K-пространство и удовлетворяет условию I.

Из результатов этого параграфа выводится также, что если E σ-полна, то условия II и I′ влекут выполнение условия I.

В § 4 изучается T-пополнение $\hat{E}$ локально выпуклой структуры E (оно также будет локально выпуклой структурой). Дается ряд условий, обеспечивающих структурную полноту $\hat{E}$.

Теорема 4.1. Для того чтобы из $a_\lambda \xrightarrow{(o)} 0$ в E вытекало, что $a_\lambda \xrightarrow{(o)} 0$ в $\hat{E}$, необходимо и достаточно условие: если $b_\gamma \geqslant 0$, $b_\gamma \in E$ и образуют фундаментальное направленное множество с $b_\gamma \xrightarrow{(o)} 0$, то $b_\gamma \xrightarrow{(T)} 0$.

Теорема 4.2. Если E — K-пространство и удовлетворяет условию I (II), то и $\hat{E}$ — K-пространство, удовлетворяет условию I (II), причем E нормально содержится в $\hat{E}$.

Теорема 4.3. Для того чтобы $\hat{E}$ была σ-полной и удовлетворяла условию I′, необходимо и достаточно, чтобы каждая убывающая последовательность элементов $a_n \geqslant 0$ (из E) была T-фундаментальной.

В § 5 устанавливаются различные результаты, в частности, исследуется вопрос о характере погружения локально выпуклой структуры E во второе дуальное пространство E'' (имеется в виду естественное погружение).

В теореме 5.1 дается ряд условий, необходимых и достаточных для того, чтобы погружение E в E'' было нормальным, в частности, такие: а) E — K-пространство и удовлетворяет условию I или б) каждый интервал в E слабо компактен. Если же E — $\mathfrak{F}$-структура, то для нормальности погружения необходимо и достаточно, например, условие: E σ-полна и удовлетворяет условию I′.

В теореме 5.6 дается ряд условий, необходимых и достаточных для того; чтобы при погружении E оказалось компонентой в E'', например, в E должны быть выполнены условия I и III (монотонной полноты по Муру — Смиту): для всякого T-ограниченного направленного по возрастанию множества положительных элементов a_λ существует $\sup a_\lambda$. Для $\mathfrak{F}$-структуры условия I и III могут быть заменены на I′ и III′ — монотонной полноты по последовательностям.

Теорема 5.4. Для того чтобы каждый интервал в E был T-компактен, необходимо и достаточно, чтобы структура E была дискретной и удовлетворяла условию I.

Ряд результатов относится к слабой сходимости в E.

§ 6 посвящен $\mathfrak{F}$-структурам и более общим $\mathfrak{LF}$-структурам, определяемым как локально выпуклые структуры, являющиеся одновременно $\mathfrak{LF}$-пространствами (индуктивными пределами $\mathfrak{F}$-структур).

Теоремы 6.1—6.2. Если E — $\mathfrak{LF}$-структура, то определяющую возрастающую последовательность подпространств E_n можно выбрать так, что все E_n нормально содержаться в E. Если же E, кроме того, удовлетворяет условию II, то E_n можно выбрать так, что они будут компонентами в E.

Теорема 6.3. (обобщенные теоремы Биркгофа). В $\mathfrak{LF}$-структуре E: 1) T-сходимость последовательности равносильна (*)-сходимости для сходимости с регулятором ($a_n \overset{(r)}{\to} a$, если существует такой y, что $|a_n - a| \leqslant \varepsilon_n y$ и $\varepsilon_n \to 0$); 2) для T-ограниченного направленного множества $a_\lambda \overset{T}{\to} 0$ равносильно существованию возрастающей последовательности индексов γ_n таких, что $a_{\lambda_n} \overset{(r)}{\to} 0$ при любых $\lambda_n \geqslant \gamma_n$. Если E — $\mathfrak{F}$-структура, то требование T-ограниченности $\{a_\lambda\}$ можно отбросить.

Следствия 6,3 2—6.33. В $\mathfrak{LF}$-структуре, удовлетворяющей условию I', (o)-сходимость последовательности равносильна сходимости с регулятором. В σ-полной $\mathfrak{LF}$-структуре, удовлетворяющей условию I', T-сходимость последовательности равносильна (*)-сходимости для (o)-сходимости.

Теорема 6.4. В T-сепарабельной структуре: 1) не существует строго возрастающей последовательности элементов, вполне упорядоченной по типу Ω; 2) каждое множество дизъюнктных элементов не более чем счетно.

Следствие 6.4.1. Если T-сепарабельная $\mathfrak{LF}$-структура удовлетворяет условию I', то она есть K-пространство счетного типа.

Теорема 6.6. Для того чтобы $\mathfrak{LF}$-структура E была изоморфна $\mathfrak{LF}$-структуре всех существенных непрерывных функций с компактными носителями, заданных на некотором локально компактном, σ-компактном хаусдорфовом пространстве, необходимо и достаточно, чтобы существовали $e_n > 0$, $e_n \in E$ такие, что каждый $x \in E$ удовлетворяет неравенству $|x| \leqslant Ce_n$ при некоторых C и n.

Доказательства многих теорем приводятся в статье не полностью или вовсе отсутствуют, а недостающие звенья в рассуждениях заменяются ссылками на книги Накано и Огасавары, изданные в Японии. Б. З. Вулих

9982. **К теореме Ямамуро о линейных модулярах.** Хотта (On Yamamuro's theorem concerned with linear modulars. Hotta Jyôji), Proc. Japan Acad., 1957, 33, № 10, 600—602 (англ.)

В полурегулярном модулярном полуупорядоченном линейном пространстве R (терминология из книги Nakano N., Modulared semi-ordered linear spaces, Tokyo Math. Book Series, 1, 1950) рассматриваются две нормы:

$$\|a\| = \inf_{\lambda>0} \frac{1 + m(\lambda a)}{\lambda}, \quad |||a||| = \inf_{\substack{\lambda>0 \\ m(\lambda a)<1}} \frac{1}{\lambda}.$$

Модуляр m называется линейным, если $m(\lambda a) = \lambda m(a)$ для любого $a \in R$ и любого числа $\lambda > 0$. Если же это условие нарушается для каждого $a \neq 0$ хотя бы при одном λ, то модуляр m называется сингулярным. В статье дается простое доказательство теоремы, установленной Ямамуро (Yamamuro S., Proc. Japan Acad., 1951, 27, 623—624): Для того чтобы $\|a\| = |||a|||$ для любого $a \in E$, необходимо и достаточно, чтобы модуляр m был или линейным, или сингулярным. Б. З. Вулих

9983. **О понятии равномерной сходимости относительно фундаментального множества функционалов и его применении.** Клонецкий (On the notion of uniform convergence with respect to a fundamental set of functionals, and its application. Klonecki W.), Colloq. math., 1957, 5, № 1, 70—84 (англ.)

Множество Γ линейных функционалов, определенных на банаховом пространстве X, называется фундаментальным, если существуют константы $a > 0$, $K > 0$ такие, что для каждых $\xi \in \Gamma$ и $x \in X$ выполняются неравенства $\|\xi\| \leqslant K$ и $\sup_\xi |\xi x| \geqslant a\|x\|$. Примером фундаментального множества может служить единичная сфера сопряженного пространства X^*. Последовательность $\{x_n\}$ элементов пространства X называется равномерно относительно Γ сходящейся к элементу x_0, если для всякого $\varepsilon > 0$ существует такой номер N, что при $n > N$ будет $|\xi x_n - \xi x_0| < \varepsilon$ для любого $\varepsilon \in \Gamma$.

Пусть $x(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$ — функция со значениями в X. $x(t)$ называется равномерно относительно Γ непрерывной в точке t_0, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что $|\xi x(t_0 + \Delta t) - \xi x(t_0)| < \varepsilon$ при $|\Delta t| < \delta$, для всех $\xi \in \Gamma$.

Вводятся различные понятия дифференцируемой функции. $x(t)$ называется 1) сильно (слабо) дифференцируемой к $x'(t_0)$ в точке t_0, если

$$\frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t} - x'(t_0) \to 0 \text{ при } \Delta t \to 0$$

в смысле сильной (соответственно слабой) сходимости в X; 2) равномерно дифференцируемой по отношению к Γ в точке t_0, если при любом $\xi \in \Gamma$

$$\left| \xi \frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t} - \xi x'(t_0) \right| < \varepsilon$$

как только $|\Delta t| < \delta = \delta(\varepsilon)$; 3) квазидифференцируемой по отношению к Γ, если для любого $\xi \in \Gamma$ существует производная $d\xi x(t)/dt$.

Показывается, что понятия сильной и понятия равномерной относительно Γ сходимости, непрерывности и дифференцируемости эквивалентны. Установлены также соотношения между другими типами непрерывности и дифференцируемости. При помощи введенных понятий обобщаются известные теоремы анализа (теорема Шварца об условиях равенства смешанных производных функции двух переменных, теорема Лопиталя). Автор отмечает, что эти обобщения у него получаются при менее сильных ограничениях, чем у других авторов, занимающихся этими вопросами. В. Н. Никольский

9984. **Теорема о продолжении.** Накано (An extension theorem. Nakano Hidegoro), Proc. Japan Acad., 1957, 33, № 10, 603—604 (англ.)

Доказана теорема: Пусть R — локально выпуклое линейное топологическое пространство и A — замкнутое выпуклое множество в нем. Для каждого $a \in A$ можно указать непрерывный линейный функционал φ такой, что

$$\varphi(a) > \sup_{x \in A} \varphi(x).$$

Для доказательства использована теорема автора (J. Fac. Sci. Univ. Tôkyô, 1951, 6, 85) о продолжении линейного функционала: Пусть R — линейное пространство и $m(x)$ — функционал в нем, удовлетворяющий условиям:

1) $0 \leqslant m(x) \leqslant \infty$ для каждого $x \in R$,

2) $m(\lambda x+\mu y)\leqslant \lambda m(x)+\mu m(y)$ для $\lambda+\mu=1$; $\lambda,\mu\geqslant 0$. Если для линейного функционала $\varphi(x)$, определенного на линейном многообразии A, и действительного числа γ $\varphi(x)\leqslant \gamma+m(x)$ для каждого $x\in A$, то можно указать линейный функционал $\psi(x)$, определенный на R, такой, что

$$\psi(x)=\varphi(x) \text{ для каждого } x\in A,$$

$$\psi(x)\leqslant \gamma+m(x) \text{ для каждого } x\in R.$$

М. И. Кадец

9985. **О векторной мере.** Клуванек (O vektorovej miere. Kluvánek Igor), Mat.-fyz. časop., 1957, 7, № 3, 186—192 (словацк;. рез. русск., англ.)

Пусть R — алгебра подмножеств некоторого множества S, а $S(R)$ — наименьшая σ-алгебра, содержащая R. Для того чтобы заданная на R мера μ со значениями в банаховом пространстве X допускала продолжение на все $S(R)$, необходимо и достаточно, чтобы для некоторой конечной, неотрицательной, заданной на R меры ν выполнялось условие

$$\|\mu\|(E)\to 0 \text{ при } \nu(E)\to 0, \qquad (\alpha)$$

при этом

$$\|\mu\|(E)=\sup\Big\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\mu(E_i)\Big\|, E\in R,$$

где верхняя грань распространяется на всевозможные системы попарно непересекающихся множеств $E_i\in R$, $E_i\subset E$ и чисел α_i, $|\alpha_i|\leqslant 1$ ($\|\mu\|$ — полувариация меры μ).

Если пространство X рефлексивно, а полувариация $\|\mu\|$ конечна на R, то можно построить конечную неотрицательную меру ν, для которой выполнено условие (α). Приводится пример, показывающий, что условие рефлексивности пространства X в последней теореме нельзя отбросить. В. Э. Лянце

9986. **Множество экстремальных точек компактного выпуклого множества.** Бьёрк (The set of extreme points of a compact convex set. Björck Göran), Arkiv mat., 1958, 3, № 5, 463—468 (англ.)

Пусть X — пространство Фреше, т. е. полное, метризуемое, локально выпуклое вещественное векторное пространство. Изучаются условия, при которых множество $S\subset X$ является множеством экстремальных точек некоторого выпуклого множества $K\subset X$.

Через $H_m(S)$ обозначается множество тех $x\in X$, которые представимы в виде $x=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i x_i$ ($x_i\in S$, $\lambda_i\geqslant 0$, $\sum_{i=1}^{m}\lambda_i=1$); через $H_C(S)$ — множество $x\in X$, представимых в виде $x=\int_{\overline{S}} t\,d\mu(t)$, где μ — неотрицательная мера Радона на $\overline{S}$ ($\overline{S}$ — замыкание множества S), $\mu(\overline{S})=1$, $\mu(\overline{S}-S)=0$; через $H(S)$ — выпуклая оболочка множества S; через $E(K)$ — множество экстремальных точек выпуклого множества $K\subset X$.

Теорема. Пусть X — n-мерное евклидово пространство R^n. Следующие три утверждения эквивалентны:

1. Существует такое компактное выпуклое множество $K\subset R^n$, что $S=E(K)$;

2. а) $\overline{S}$ компактно, б) $\overline{S}\subset H(S)$, в) $S\cap H(A)\subset A$ для любого $A\subset S$.

3. а) $\overline{S}$ компактно, б) $\overline{S}\subset H_{n-1}(S)$, в) $S\cap H(B)\subset B$ для любого $B\subset \overline{H}(S)$.

Аналогичное утверждение (с заменой множеств $H(S)$, $H(A)$, $H_{n-1}(S)$ и $\overline{H}(B)$ на соответствующие множества $H_C(\ )$) доказывается для произвольного пространства Фреше. Я. Б. Рутицкий

9987. **Теоремы о представлении некоторых функциональных операторов.** Эдвардс (Representation theorems for certain functional operators. Edwards R. E.), Pacif. J. Math., 1957, 7, № 3, 1333—1339 (англ.)

Пусть F — совокупность всех функций $f=f(t)$, заданных и локально интегрируемых на полупрямой $t>0$; эквивалентные функции отождествляются. U_s ($s\geqslant 0$) — оператор «полутрансляции на s», отображающий F в F, определяется формулой:

$$U_s f(t)=\begin{cases} f(t-s) & \text{при } t>s,\\ 0 & \text{при } 0<t\leqslant s.\end{cases}$$

Теорема 1. Пусть T — линейный оператор из F в F, обладающий свойствами: (O_1) T коммутирует с U_s при всех $s\geqslant 0$; (O_2) T непрерывен относительно топологии сходимости в среднем на каждом ограниченном промежутке, т. е. топологии, определяемой в F счетным множеством полунорм $p_n(f)=\int_n^t |f(t)|\,dt$ ($n=1,2,\ldots$). Тогда T представим формулой

$$Tf(t)=\int_0^t f(t-s)\,d\mu(s), \qquad (1)$$

где μ — мера Радона на полупрямой $t\geqslant 0$. Обратно, всякий оператор такого вида обладает свойствами (O_1) и (O_2).

Пусть $\mathcal{E}_n$ ($n=1,2,\ldots$) — совокупность всех $f\in F$ для которых $q_n(f)=\int_0^\infty e^{-nt}|f(t)|\,dt<\infty$. $\mathcal{E}_n$ — банахово пространство с нормой $q_n(f)$. Положим $\mathcal{E}=\liminf \mathcal{E}_n$.

Теорема 2. Пусть T — линейный оператор, отображающий $\mathcal{E}$ в $\mathcal{E}$, удовлетворяющий условию (O_1) и непрерывный относительно топологии в $\mathcal{E}$. Тогда T представим в той же форме (1), где μ удовлетворяет условию: $\int e^{-nt}d|\mu|(t)<\infty$ при некотором n. Верно и обратное. Б. З. Вулих

9988. **Обобщение теоремы Вейерштрасса — Стоуна.** Замфиреску (Une généralisation du théorème de Weierstrass — Stone. Zamfirescu Ion), C. r. Acad. sci., 1958, 246, № 4, 524—525 (франц.)

Обозначения: R — топологическое пространство, V — линейное топологическое локально выпуклое пространство, $R(V)$ — множество непрерывных функций, определенных на R со значениями из V. $R(V)$ становится топологическим пространством (обозначается $R_K(V)$), если сходимость в нем определить как равномерную сходимость функций на некотором компакте $K\subset R$. Через $L(V)$ обозначается множество всех линейных непрерывных функционалов на V, $S(M)$ — линейная оболочка множества $M\subset L(V)$. M называется аппроксимативной базой в $L(V)$, если M состоит из линейно независимых функционалов и $\overline{S(M)}=L(V)$. Основной результат работы сформулирован в следующей теореме:

Теорема 1. Пусть M — аппроксимативная база в $L(V)$. Если 1) $U(V)$ есть подпространство $R(V)$; 2) $U(V)$ разделяет точки R (т. е. для $t'\neq t''$, $t',t''\in R$ существует функция $f\in U(V)$ такая, что $f(t')\neq f(t'')$); 3) для любых f, $g\in U(V)$ существует $h\in U(V)$ такая, что $\Gamma(f)\cdot\Gamma(g)=\Gamma(h)$ при любом $\Gamma\in M$; 4) $U(V)$ содержит константы, — то для любого компакта $K\subset R$ будет $\overline{U_K(V)}=R_K(V)$.

Это обобщение теоремы Стоуна (см. стр. 37 книги М. А. Наймарка (РЖМат, 1957, 7189 К)). Доказательства не приводятся. В. Н. Никольский

9989. **Условие (МА) для линейных функционалов.** Исии, Сугаку, 1957, 8, № 4, 213—215 (японск.)

Часть I см. РЖМат, 1958, 5873.

Пусть X — полное регулярное пространство, $C(X, R)$ — пространство всех непрерывных функций на X, и пусть I — положительный линейный функционал на $C(X, R)$, а γ — бэровская мера, соответствующая функционалу I. Автор доказывает, что если функционал I удовлетворяет условию (МА), то для каждого покрытия из бэровских множеств $\{G_\alpha\}$ существует такое счетное подсемейство $\{G_{\alpha_i}\}$, что $\gamma(\bigcup_{i=1}^{\infty} G_{\alpha_i}) = 1$. Любой положительный линейный функционал на X удовлетворяет условию (МА) в том и только в том случае, если X есть Q-пространство. Ся До-шин

9990. **Об одном классе линейных метрических пространств.** Ролевич (On a certain class of linear metric spaces. Rolewicz S.), Bull. Acad. polon. sci., 1957, cl. 3, 5, № 5, 471—473 (англ., рез. русск.)

Пусть X — линейное метрическое пространство, в котором существует ограниченная окрестность нуля. Через $\mathfrak{A}$ обозначается класс ограниченных окрестностей A нуля, таких что $tA \subset A$ при $|t| \leqslant 1$. Если $A \in \mathfrak{A}$, то нижняя граница чисел $\rho > 0$, для которых $A \oplus A \subset \rho A$, обозначается $c(A)$ и называется модулем вогнутости A. Число

$$c(X) = \inf_{A \in \mathfrak{A}} c(A)$$

называется модулем вогнутости пространства X.

Теорема. Если $0 < p < p_0 = \log_{c(X)} 2$, то в X существует p-однородная норма (т. е. такая, что $\|tx\| = |t|^p \|x\|$, $0 < p \leqslant 1$), эквивалентная метрике пространства X.

Показывается также, что не существует линейного метрического пространства X, в котором имеется ограниченная окрестность нуля и которое содержит (с точностью до изоморфизма) каждое из пространств l^{p_n} (или L^{p_n}), где $0 < p_n < 1$, $p_n \to 0$. В. И. Соболев

9991. **Третье условие, эквивалентное нормируемости.** Вильямсон (A third condition equivalent to normability. Williamson J. H.), J. London Math. Soc., 1957, 32, № 2, 231—232 (англ.)

Реферируемая заметка является продолжением статьи автора (РЖМат, 1957, 608) и использует обозначения и терминологию этой статьи. Доказана теорема: Пусть M — какая-либо алгебра линейных преобразований локально выпуклого линейного топологического пространства E в себя, содержащая все преобразования конечного ранга. Если в топологии типа 1 операция $(U, V) \to UV - VU$ непрерывна, то E может быть нормировано. Следствие: E может быть нормировано тогда и только тогда, когда в M может быть определена топология типа 1, в которой отображение $(U, V) \to UV - VU$ непрерывно. М. И. Кадец

9992. **К теореме о замкнутом графике.** Гуань Чжао-чжи (Kwan Chao-chih), Шуэюэ цзиньчжань, 1957, 3, № 4, 670—672 (кит.; рез. франц.)

Доказывается, что теорема о резонансе, сформулированная для пространства Банаха, есть непосредственное следствие теоремы о замкнутом графике, рассматриваемой для надлежащим образом построенного произведения пространств. Резюме автора

9993. **Об одной проблеме Банаха.** Кли (On a problem of Banach. Klee V. L.), Colloq. math., 1957, 5, № 1, 78 (англ.)

Банах поставил проблему: существует ли непрерывное взаимно однозначное отображение пространства (c_0) на компактное метрическое пространство. Ответ утвердителен, ибо, как показал М. И. Кадец (РЖМат, 1954, 2239), (c_0) гомеоморфно (l_1), по теореме Мазура (Mazur S., Studia math., 1929, 1, 83—85), (l_1) гомеоморфно (l_2); но теореме автора (РЖМат, 1953, 1251), (l_2) гомеоморфно своей единичной сфере, но естественное отображение последней в ту же сферу в слабой топологии непрерывно, а единичная сфера (l_2) в слабой топологии гомеоморфна «гильбертову кирпичу» (РЖМат, 1956, 7448), который является компактом. М. Л. Бродский

9994. **К теории пространств l_M.** Грибанов Ю. И., Уч. зап. Казанск. ун-та, 1957, 117, № 2, 62—65

Пусть $M(u)$ и $N(v)$ — взаимно дополнительные в смысле Юнга функции. Через l^M обозначается совокупность последовательностей действительных чисел $x = (x_1, x_2, \ldots)$, для которых $\rho_M(x) = \sum_{n=1}^{\infty} M(x_n) < \infty$. Через l_M обозначается линейное пространство последовательностей $x = (x_1, x_2, \ldots)$, для которых $\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$ при любом элементе $y = (y_1, y_2, \ldots) \in l^N$. Норма в этом пространстве вводится равенством

$$\|x\|_M = \sup_{\rho_N(y) \leqslant 1} \left| \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n \right|.$$

Пространства l_M были введены в рассмотрение Орличем (Orlicz W., Bull. internat. Acad. polon., 1936, sér. A., № 3-4, 93—107).

Через h_M автор обозначает класс тех элементов $x \in l^M$, для которых $\lambda x \in l^M$ при всех вещественных λ. Для множества h_M формулируются некоторые утверждения, аналогичные теоремам о множестве E_M, доказанным М. А. Красносельским и референтом (РЖМат, 1955, 4536; 1957, 8009). Формулируются также теоремы об операторах, действующих в пространствах l_M. Приведем некоторые теоремы.

Теорема 6. Любой линейный оператор A, действующий из h_M в банахово пространство E, представим в виде $Ax = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$, где последовательность элементов $y_n \in E$ такова, что

$$\sup_{x \in h_M, \|x\|_M \leqslant 1} \left\| \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n \right\|_E < \infty.$$

Любой такой оператор аналитически расширяем с h_M на все пространство l_M с сохранением нормы.

Теорема 8. Для того чтобы матричный оператор

$$Ax = [a_{mn}][x] = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_{1n} x_n, \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} x_n, \ldots \right)$$

был линейным оператором в l_M, необходимо и достаточно, чтобы $a_n = (a_{1n}, a_{2n}, \ldots) \in l_N$ при $n = 1, 2, \ldots$ и

$$\sup_{x \in h_M, \|x\|_M \leqslant 1} \sup_{\rho_N(y) \leqslant 1} \left| \sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn} x_n y_m \right| < \infty.$$

Теорема 10. Если матричный оператор A является линейным оператором, действующим в h_M, то матричный оператор $\bar{A}$, определенный транспонированной матрицей $[a_{nm}]$, является линейным оператором в l_N, сопряженным с оператором A.

В работе имеются опечатки. Я. Б. Рутицкий

9995. **Некоторые свойства одного класса банаховых пространств.** Дин Ся-ши (Some properties

of a class of Banach spaces. Ding Shia-shi), Sci. Rec., 1958, 2, № 2, 59—63 (англ.)

Изучаются линейные нормированные пространства $D_\Phi^{(l)}$, введенные ранее автором (реф. 9684). Доказывается следующая теорема вложения:

Теорема 1. Пусть L_Φ, L_X, $L_{\Phi X^{-1}}$ — пространства Орлича; $X(u) \leqslant c\Phi(u)$ при $u > u_0$ (u_0 — достаточно большое число);

$$X(u_1u_2) \geqslant X(u_1)\,X(u_2); \quad \int_1^\infty r^{n-1}\widetilde{\Phi X^{-1}}\left[\frac{1}{X(r^l)}\right]dr \leqslant \infty,$$

где ΦX^{-1} и ΦX^{-1} — взаимно дополнительные функции в смысле Юнга. Тогда, если $f \in D_\Phi^{(l)}(R^n)$, то $f \in L_X(R^n)$ и при этом $\|f\|_{L_X} \leqslant K\|f\|_{D_\Phi^{(l)}}$.

Аналогичное предложение (теорема 2) формулируется для пространства d_Φ^l. Доказывается (теорема 3), что пространства $D_\Phi^{(l)}$ и $d_\Phi^{(l)}$ полны. Отмечается, что оператор вложения, определяемый теоремой 1, не всегда вполне непрерывен, и доказывается:

Теорема 4. Если функции Y и $\widetilde{\Phi X^{-1}}$ удовлетворяют Δ_2-условию, т. е. $X(2u) < cX(u)$, $\widetilde{\Phi X^{-1}}(2u) < c\widetilde{\Phi X^{-1}}(u)$, то оператор вложения пространства $d_\Phi^{(l)}$ в l_X, определяемый теоремой 2, вполне непрерывен.

Имеются опечатки. И. В. Шрагин

9996. **Пространство вполне непрерывных операторов в гильбертовом пространстве. Шаттен** (The space of completely continuous operators on a Hilbert space. Schatten Robert), Math. Ann., 1957, 134, № 1, 47—49 (англ.)

Известно, что пространство E всех вполне непрерывных линейных операторов в гильбертовом пространстве H не рефлексивно, так как пространство E^{**} можно рассматривать как пространство всех ограниченных линейных операторов в H (Schatten R., Neumann J. von, Ann. Math., 1946, 47, 608—630).

В реферируемой заметке доказывается более сильное утверждение: Пространство E не является сопряженным ни для какого банахова пространства.

С. Д. Берман

9997. **О сжатиях гильбертова пространства. II. Надь** (Sur les contractions de l'espace de Hilbert. II. Sz.-Nagy Béla), Acta scient. math., 1957, 18, № 1-2, 1—14 (франц.)

В предыдущей статье автора (РЖМат, 1954, 2626) было доказано, что для каждого сжатия T пространства Гильберта H можно указать более широкое пространство K и в нем унитарное преобразование U, удовлетворяющее условиям

$$T^{(n)} = PU^n \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

где P — оператор ортогонального проектирования K на H;

$$T^{(n)} = T^n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \text{ и } T^{(n)} = T^{*|n|} \qquad (n = -1, -2, \ldots).$$

Если элементы $U^n h$ ($h \in H$) взяты в качестве образующих элементов пространства K, то K определяется единственным образом.

Шрейбер (РЖМат, 1957, 8754) доказал, что все унитарные преобразования, соответствующие сжатиям, для которых $\|T\| < 1$, унитарно эквивалентны преобразованию, совпадающему с ортогональной суммой d раз ($d = \dim H$) повторенного преобразования вида

$$V[u(\varphi)] = e^{i\varphi}u(\varphi) \quad (u(\varphi) \in L^2(0, 2\pi)).$$

В доказательстве Шрейбера предполагалось, что $d \leqslant \aleph_0$.

В реферируемой статье дано другое доказательство, справедливое для любого кардинального числа $d = \dim H$. Теорема Шрейбера распространена также на случай многих сжатий и на полугруппы от одного параметра. М. С. Лившиц

9998. **О приведении к треугольному виду квазиунитарных операторов. Поляцкий В. Т.**, Докл. АН СССР, 1957, 113, № 4, 756—759

Линейный оператор T, определенный в гильбертовом пространстве H, называется квазиунитарным, если операторы $I - T^*T$ и $I - TT^*$ конечномерны. В работе построена треугольная модель для квазиунитарных операторов, удовлетворяющих условиям: 1) $\dim(I - T^*T)H = \dim(I - TT^*)H$; 2) существует по крайней мере одна точка ζ_0, $|\zeta_0| < 1$, регулярная для резольвенты оператора T. М. С. Лившиц

9999. **Обобщение спектральных семейств на линейные отображения одного гильбертова пространства в другое. Гика** (Generalizarea familiilor spectrale la transformări liniare ale unui spaţiu hilbertian în altul. Ghika Al.), Comun. Acad. RPR, 1957, 7, № 9, 759—764 (рум.; рез. русск., франц.)

Пусть $\mathcal{H}$ и $\mathcal{K}$ — комплексные гильбертовы пространства со скалярными произведениями соответственно $(x \mid x')$ и $(y \mid y')$. Линейный оператор T, отображающий всюду плотное множество $\mathcal{H}_T \subset \mathcal{H}$ в $\mathcal{K}$, называется соответственно W-нормальным, W-эрмитовым, W-самосопряженным или W-проектором по отношению к частично изометричному оператору $W \neq 0$, отображающему $\mathcal{H}$ в $\mathcal{K}$, если W^*T является соответственно нормальным, эрмитовым, самосопряженным или проектирующим оператором в $\mathcal{H}$ и если $T = WW^*T$, $T = TW^*W$.

В силу одного результата Меррея (Murray F. J., Trans. Amer. Math. Soc., 1935, 37, 301—338) для каждого замкнутого оператора T со всюду плотной областью определения существует один и только один W-проектор W такой, что T является положительным W-самосопряженным оператором. W-спектральным семейством из $\mathcal{H}$ в $\mathcal{K}$ на $R_+ = [0, \infty)$ называется семейство W_t W-проекторов, зависящих от вещественного параметра $t \in [0, \infty)$, удовлетворяющее следующим условиям: а) если $0 \leqslant s \leqslant t$, то $W_sW^*W_t = W_tW^*W_s$, б) $W_{t-0} = W_t$, в) $\lim_{t \to +\infty} W_t = W$, г) $W_0 = 0$.

Теорема 3. Для любого замкнутого оператора T, отображающего всюду плотный линеал $\mathcal{H}_T \subset \mathcal{H}$ в $\mathcal{K}$, существует одно и только одно W-спектральное семейство W_t такое, что $(Tx/y) = \int_0^\infty td(W_tx \mid y)$ для любых $x \in \mathcal{H}_T$ и $y \in \mathcal{K}$.

Все предложения работы приводятся без доказательства. Имеются опечатки. К. М. Фишман

10000. **Об одном свойстве спектральных семейств некоторых самосопряженных операторов. Гика** (O proprietate a scărilor spectrale ale unor operatori autoadjuncţi. Ghika Al.), Comun. Acad. RPR, 1957, 7, № 11, 919—922 (рум.; рез. русск., франц.)

Пусть $\mathcal{H}$ и $\mathcal{K}$ — комплексные гильбертовы пространства и T — линейный замкнутый оператор, отображающий всюду плотный линеал $\mathcal{H}_T \subset \mathcal{H}$ в $\mathcal{K}$. Формулируется следующая теорема: Пусть P_t — спектральное семейство оператора $B = (T^*T)^{1/2}$; Q_t — спектральное семейство оператора $C = (TT^*)^{1/2}$, W — частично изометрический оператор из $\mathcal{H}$ в $\mathcal{K}$ такой, что $T = WB = CW$, $T_s = WBP_s$ ($0 < s < \infty$) — линейный непрерывный оператор из $\mathcal{H}$ в $\mathcal{K}$, $P_{s,t}$ — спектральное семейство оператора $B_s = (T_s^*T_s)^{1/2}$, $Q_{s,t}$ — спектральное семейство

оператора $C_s = (T_s T_s^*)^{1/2}$ и $W_s = WP_s$ — частично изометрический оператор из $\mathfrak{H}$ в $\mathfrak{J}$ такой, что $T_s = W_s B_s = C_s W_s$. Тогда: 1) $\lim_{s\to\infty} \| (WP_t - W_s P_{s,t}) x \| = 0$ для всех $x \in \mathfrak{H}$ и произвольной точки t непрерывности P_t; 2) $\lim_{s\to\infty} \| (Q_t W - Q_{s,t} W_s) x \| = 0$ для всех $x \in \mathfrak{H}$ и произвольной точки t непрерывности Q_t; 3) если $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{J}$ сепарабельны, то $WP_t = Q_t W$ для всех $t \in [0, \infty)$. Имеются опечатки. К. М. Фишман

10001. **Асимптотические ряды в теории возмущений. Креймер** (Asymptotic perturbation series. Kramer Vernon A.), Trans. Amer. Math. Soc., 1957, 85, № 1, 88—105 (англ.)

Пусть $H_0 \geqslant 1$ — самосопряженный полуограниченный оператор, $H_i \geqslant 0$ $(i > 0)$ — симметрические операторы. Рассматривается оператор

$$H(t) = H_0 + tH_1 + t^2 H_2 + \ldots, \qquad (1)$$

который по предположению при $0 \leqslant t \leqslant t_0$ имеет всюду плотную в гильбертовом пространстве область определения $\mathfrak{D}(H(t))$. Через $\widetilde{H}(t)$ обозначается самосопряженное расширение оператора (1) в смысле Фридрихса.

Пусть μ_0 — изолированная точка спектра оператора H_0^{-1} конечной кратности и пусть при этом существует лишь конечное число точек спектра оператора H_0^{-1}, больших μ_0, причем каждая из указанных точек спектра изолирована и конечной кратности.

В этих и еще некоторых специальных предположениях автор показывает, что получающиеся формальным образом ряды по степеням параметра t для близких к μ_0 собственных значений возмущенного оператора $\widetilde{H}(t)^{-1}$ являются асимптотическими приближениями к этим собственным значениям. Аналогичные утверждения устанавливаются для соответствующих собственных векторов.

Пусть, например, μ_0 — однократное собственное значение H_0^{-1} и φ_0 — соответствующий собственный вектор. Пусть $\mu(t)$ и $\varphi(t)$ — собственное значение и собственный вектор оператора $\widetilde{H}(t)^{-1}$, близкие к μ_0 и φ_0 $(\mu(0) = \mu_0,\ \varphi(0) = \varphi_0)$. Обозначим через A_k коэффициент в формальном разложении $H(t)^{-1}$ по степеням t. Пусть далее $\mu(t) = \mu_0 + \mu_1 t + \mu_2 t^2 + \ldots$, $\varphi(t) = \varphi_0 + \varphi_1 t + \varphi_2 t^2 + \ldots$ — полученные формальным образом ряды для $\mu(t)$ и $\varphi(t)$. Тогда, если все элементы $A_k \varphi_i \in \mathfrak{D}(H(t))$ при $i + k < N$, то при $t \to 0$ справедливы формулы

$$\mu(t) = \mu_0 + t\mu_1 + \ldots + t^N \mu_N + \ldots + t^{2N} \mu_{2N} + o(t^{2N}),$$

$$\varphi(t) = \varphi_0 + t\varphi_1 + \ldots + t^N \varphi_N + o(t^N).$$

В реферируемой работе исследован также случай кратного собственного значения. В целом статья развивает результаты работы Като (РЖМат, 1955, 339), где в аналогичных предположениях рассмотрен оператор $H_0 + tH_1$ и исследуются лишь первые члены разложений. В. Б. Лидский

10002. **Нормы матриц и меры векторов. Истерфилд** (Matrix norms and vector measures. Easterfield T. E.), Duke Math. J., 1957, 24, № 4, 663—669 (англ.)

Рассматриваются постулаты, характеризующие различные нормы $N(A)$ матриц A; уделяется внимание вопросам о независимости этих постулатов и о связи норм матриц с мерами векторов. Показано, как, имея произвольную норму $N(A)$, из нее можно получить меру $M_N(x)$ вектора x, обладающую тем свойством, что если $N(A) = \sup_{\mu(x)=1} \mu(Ax)$, где $\mu(x)$ — заданная мера, то M_N совпадает с μ. Отмечается, однако, что если положить $\mu = M_N$, то в общем случае отсюда не следует, что $N(A) = \sup_{\mu(x)=1} \mu(Ax)$. С. Н. Крачковский

10003. **Мультипликативные нормы в метрических кольцах. Аврора** (Multiplicative norms for metric rings. Aurora Silvio), Pacif. J. Math., 1957, 7, № 3, 1279—1304 (англ.)

Норма (расстояние от нуля) в метрическом кольце называется мультипликативной, если $\| xy \| = \| x \| \cdot \| y \|$. Изучается связь между свойством метрического кольца «иметь мультипликативную норму» (или норму, удовлетворяющую более слабому требованию «$\| x \| \cdot \| x^{-1} \| = 1$ для всех регулярных элементов») и его свойством «быть алгеброй с делением». Рассмотрены условия, при которых метрическое кольцо изоморфно полю действительных чисел, полю комплексных чисел или алгебре действительных кватернионов. Полученные результаты прилагаются к нормированным кольцам, при этом оказывается возможным ослабить предположения в теореме Гельфанда—Мазура. В. Э. Лянце

10004. **Некоторые структурные теоремы для одного класса банаховых алгебр. Уилкокс** (Some structure theorems for a class of Banach algebras. Wilcox Alfred B.), Pacif. J. Math., 1956, 6, № 1, 177—192 (англ.)

Каждому элементу x нормированного (некоммутативного) кольца R сопоставляется функция $x(M)$, определенная на двухсторонних максимальных идеалах кольца R, значение которой при $M = M_0$ есть образ элемента x в простом кольце R/M_0. Предполагается, что естественная T_1-топология на пространстве $\mathfrak{M}$ максимальных идеалов ($\mathfrak{A}$ есть совокупность всех $M \in \mathfrak{M}$, содержащих пересечение $M \in \mathfrak{A}$) есть T_3-топология. Автор переносит на этот случай ряд известных теорем теории регулярных коммутативных колец (Шилов Г. Е., Тр. Матем. ин-та АН СССР, 1947, 21), включая наименьшие идеалы, теоремы типа Диткина, типа тауберовой теоремы Винера и определения колец типа C. Во многих рассуждениях существенно условие допустимости умножения функции $x(M)$ на любую вещественную непрерывную функцию $f(M)$. Г. Е. Шилов

10005. **О гомоморфизмах кольца непрерывных функций в кольцо вещественных чисел. Исии** (On homomorphisms of the ring of continuous functions onto the real numbers. Ishii Tadashi), Proc. Japan Acad., 1957, 33, № 8, 419—423 (англ.)

Рассматривается кольцо R вещественных функций $f(x)$ на вполне регулярном пространстве X, обладающее следующими свойствами: 1) R содержит постоянные; 2) для замкнутого множества $F \subset X$ и точки $x_0 \notin E$ имеется такая $f \in R$, что $f(x_0) > \sup_{x \in F} f(x)$; 3) если $f(x) \in R$ и $f(x) \geqslant a > 0$, то $f^{-1}(x) \in R$. Вводится равномерная топология g указанием окрестностей

$$U_{f_1,\ldots,f_n,\varepsilon}(x) = \{y;\ |f_j(y) - f_j(x)| < \varepsilon,\ j = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Результаты: а) любой гомоморфизм кольца R в кольцо вещественных чисел задается формулой $f \to f(x_0)$ тогда и только тогда, когда gX — полное пространство; б) изоморфизм $R_1 \leftrightarrow R_2$ влечет гомеоморфизм $X_1 \leftrightarrow X_2$, если gX_1 и gX_2 полные. Достаточное условие полноты $gX : X$ локально компактно и R замкнуто относительно монотонного локально конечного предельного перехода. Г. Е. Шилов

10006. **Об операторах класса Шефера в теории сингулярных интегральных уравнений. Накамура** (On operators of Schaefer class in the theory of singular integral equations. Nakamura Masa-

h i r o), Proc. Japan Acad., 1957, 33, № 8, 455—456 (англ.)

Методами Калкина и Растона (Calkin J. W., Ann. Math., 1941, 42, 839—873; РЖМат, 1955, 5131) устанавливаются теоремы Шефера (РЖМат, 1957, 7941). Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство. Линейный ограниченный оператор a, действующий в H, автор называет оператором класса Шефера, если его область изменения замкнута и размерности подпространств нулей операторов a и a^* конечны. Приводятся примеры таких операторов. Пусть B — кольцо всех ограниченных операторов в H, C — идеал кольца B, состоящий из вполне непрерывных операторов, B/C — фактор-кольцо $\natural$ — естественный гомоморфизм B на B/C. Доказывается, что a является оператором класса Шефера тогда и только тогда, когда a—образ оператора a при $\natural$—имеет обратный в B/C. При помощи этого предложения доказываются некоторые теоремы из упомянутой работы Шефера. М. М. Вайнберг, И. В. Шрагин

10007. **О мультипликативных линейных функционалах на декартовых произведениях алгебр. Б я л ы н и ц к и й - Б и р у л я, Ж е л я з к о** (On the multiplicative linear functionals on the cartesian product of algebras. B i a ł y n i c k i - B i r u l a A., ż e l a z k o W.), Bull. Acad. polon. sci., 1957, Cl. 3, 5, № 6, 589—593 (англ.; рез. русск.)

Пусть T — абстрактное множество, $R_t\,(t \in T)$ — семейство алгебр над некоторым бесконечным полем K, R — декартово произведение всех R_t. Рассматриваются аддитивные однородные и мультипликативные функционалы $f(x)$ над R со значениями в K. В работе приводятся некоторые условия, при выполнении которых каждый такой функционал имеет вид $f(x) = f_t(x_t)$, где $t \in T$ фиксировано, f_t — мультипликативный функционал в R_t, x_t-проекция x в R_t. Условия формулируются в терминах мощности множеств K и T.

Ю. М. Березанский

10008. **Абсолютное значение на W^*-алгебрах конечного типа. С а к а и** (The absolute value of W^*-algebras of finite type. S a k a i S h ô i c h i r ô), Tôhoku Math. J., 1956, 8, № 1, 70—85 (англ.)

Абсолютным значением элемента x W^*-алгебры M автор называет элемент $|x| = (x^*x)^{1/2}$. Изучается вопрос о том, можно ли охарактеризовать W^*-алгебру как линейное векторное пространство с «абсолютнозначным отображением» (absolute-value mapping) $x \to |x|$. Получен следующий результат:

Пусть M — W^*-алгебра конечного типа, с σ-слабо непрерывным полным следом φ. Рассмотрим скалярное произведение $(x, y) = \varphi(y^*x)$, $x, y \in M$ и обозначим через $L^2(M, \varphi)$ замыкание M по норме $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$. Гильбертово пространство $L^2(M, \varphi)$ называется обобщенным L^2-пространством, связанным с алгеброй M и следом φ.

Пусть L — такое гильбертово пространство, что: 1) на L задана операция*, удовлетворяющая условиям: $(\alpha x + \beta y)^* = \bar{\alpha} x^* + \bar{\beta} y^*$, $(x^*)^* = x$, $x, y \in L$, α, β — комплексные числа, 2) вещественное пространство L_s всех «самосопряженных элементов» $(x^* = x)$ является вещественным гильбертовым пространством, частично упорядоченным с помощью «конуса» P положительных элементов, причем $(a, b) \geqslant 0$ для всех $b \in P$ тогда и только тогда, когда $a \geqslant 0$. Кроме того, предполагаются выполненными следующие аксиомы:

А к с и о м а 1. Существует отображение $a \to |a|$, действующее из L на P такое, что $I_1)$ $\|a\| = \||a|\|$, $|(a, b)| \leqslant (|a|, |b|)^{1/2} \cdot (|a^*|, |b^*|)^{1/2}$; I_2 для любых $a, b \in L$ существует элемент $c \in L$ такой, что $(|a|, |b|) = (a, c)$ и $|c| = |b|$; $I_3)$ из $|a| \perp |b|$ вытекает $|a^*| \leqslant |(a+b)^*|$.

А к с и о м а II. Существует единичный элемент $I > 0$ такой, что $II_1)$ если $x \geqslant 0$ и $x \perp I$, то $x = 0$; $II_2)$ из $|x| \leqslant \alpha J$, где α — положительное число, вытекает $|x^*| \leqslant \alpha I$; $II_3)$ из $|x| \leqslant \alpha I$, $|y| \leqslant \beta I$ вытекает $|x + y| \leqslant (\alpha + \beta) I$.

Автор доказывает, что для всякого гильбертова пространства L с описанными выше свойствами существуют конечная W^*-алгебра M с σ-слабо непрерывным полным следом φ и линейное изометрическое отображение ρ пространства L на обобщенное L^2-пространство $L^2(M, \varphi)$ такие, что 1) $\rho(I/\|I\|) = \tilde{I}$, где $\tilde{I}$ — единица M; 2) $\rho(a) \geqslant 0$ тогда и только тогда, когда $a \geqslant 0$; 3) $\rho(|x|) = |\rho(x)|$, $x \in L$, где $|\rho(\cdot)|$ — абсолютное значение на $L^2(M, \varphi)$.

В. Э. Лянце

10009. **Об одном классе нелинейных отображений в банаховых пространствах. Г р а н а с** A., Bull. Acad. polon. sci., 1957, Cl. 3, 5, № 9, 867—871 (рез. нем.)

Пусть X и X_1 — банаховы пространства. Оператор H из X в X_1 автор называет квазиограниченным, если существуют такие постоянные K и ρ_0, что $\|H(x)\| \cdot \|x\|^{-1} \leqslant K$ при $\|x\| \geqslant \rho_0$. Для таких операторов вводится квазинорма $|H|$:

$$|H| = \inf_{\rho_0 \leqslant \rho < +\infty} \left\{ \sup_{\|x\| \geqslant \rho} \|H(x)\| \cdot \|x\|^{-1} \right\}.$$

Доказываются теоремы: 1) Непрерывный оператор $h(x) = x + H(x)$ отображает X на X, если $H(x)$ — квазиограниченный оператор с постоянной $K < 1$. 2) Если квазинорма вполне непрерывного из X в X оператора H меньше единицы, то уравнение $y = x + H(x)$ имеет при любом $y \in X$ по крайней мере одно решение $x \in X$. При помощи 2) устанавливаются новые теоремы о существовании решений уравнения Гаммерштейна.

М. М. Вайнберг

10010. **Об одной геометрической теореме в банаховых пространствах. Г р а н а с** A., Bull. Acad. polon. sci., 1957, Cl. 3, 5, № 9, 873—877 (рез. нем.)

Пусть вещественное банахово пространство X является прямой суммой подпространств A и B; P_A и P_B — операторы проектирования из X соответственно в A и B.

Доказываются теоремы: 1) Пусть F и G — квазиограниченные вполне непрерывные операторы соответственно из A и B в X, $f(a) = a + F(a)$, $g(b) = b + G(b)$, $a \in A$, $b \in B$. (1)
Тогда, если $|F| \|P_A\| + |G| \|P_B\| < 1$, то пересечение образов A и B не пусто, т. е. $f(A) \cap g(B) \neq \emptyset$. 2) Пусть выполнено (1), где F-оператор Липшица из A в X с постоянной L_1, G — оператор Липшица из B в X с постоянной L_2. Тогда, если $L_1 \|P_A\| + L_2 \|P_B\| < 1$, то пересечение $f(A) \cap g(B)$ состоит из одной единственной точки.

Определения квазиограниченности и квазинормы см. реф. 10009.

М. М. Вайнберг

10011. **Теорема о пересечении в гильбертовом пространстве. А л ь т м а н** (An intersection theorem in Hilbert space. A l t m a n M.), Bull. Acad. polon. sci., 1957, Cl. 3, 5, № 10, 963—966, LXXX (англ.; рез. русск.)

Пусть сепарабельное гильбертово пространство H является прямой суммой подпространств A и B; P_A и P_B — операторы проектирования из H соответственно в A и B; F и G — нелинейные слабо непрерывные операторы из A и B соответственно в H. Рассматриваются отображения $f(x) = x + F(x)$ и $g(x) = x + G(x)$. Устанавливаются теоремы: 1. Если $(G(-P_B x) - F(P_A x), x) \leqslant (x, x)$ для каждого x, принадлежащего сфере с центром в нуле, то пересечение

$f(A) \cap f(B) \neq \phi$. 2. Пусть выполнены условия: существуют такие постоянные K_i и r_i, $i = 1, 2$, что $\| F(a) \| \leqslant K_1 \| a \|$, $\| G(b) \| \leqslant K_2 \| b \|$, $a \in A$, $b \in B$, если $\| a \| \geqslant r_1$, $\| b \| \geqslant r_2$, причем $K_1 \| P_A \| + K_2 \| P_B \| \leqslant 1$. Тогда $f(A) \cap f(B) \neq \phi$. Если F и G имеют квазинормы (реф. 10009), удовлетворяющие неравенству $| F | \| P_A \| + | G | \| P_B \| < 1$, то $f(A) \cap f(B) \neq \phi$.

М. М. Вайнберг

10012. Некоторые отображения нулевой топологической степени. Кронин (Some mappings with topological degree zero. Cronin Jane), Proc. Amer. Math. Soc., 1956, 7, № 6, 1139—1145 (англ.)

Рассматривается отображение f: $\{x_1, x_2,\} \to \{P_1(x_1,x_2,), P_2(x_1,x_2)\}$ окрестности нуля θ двумерной плоскости в эту же плоскость. Предполагается, что $f^{-1}(\theta) = \theta$. Если степень отображения f в точке θ отлична от нуля, то система

$$P_i(x_1, x_2,) = H_i(x_1, x_2, \varepsilon) \quad (i = 1,2) \qquad (1)$$

с правой частью, зависящей от малого параметра ε ($H_i(x_1, x_2, 0) \equiv 0$, имеет решения при малых ε.

Автор рассматривает случай, когда степень отображения f в точке θ равна нулю. Указано простое достаточное условие существования решений системы типа (1) при возмущениях H_i специального вида. Основное предположение заключается в том, что главная часть возмущения имеет вид $\{K_1\varepsilon^{n_1}, K_2\varepsilon^{n_2}\}$, причем K_1, K_2 удовлетворяют таким условиям, при которых степень отображения

$$\{x_1, x_2\} \to \{P_1(x_1, x_2) - K_1\varepsilon^{n_1}, P_2(x_1, x_2) - K_2\varepsilon^{n_2}\}$$

некоторой части круговой окрестности θ на точку θ отлична от нуля. М. А. Красносельский

10013. Исследование функционального аналога одного нелинейного интегрального уравнения Лихтенштейна. Цитланадзе Э. С., Докл. АН СССР, 1958, 118, № 4, 650—653

На единичном шаре S_1 пространства l_2 с элементами $x = (x_{\alpha_j})$, $\sum_{\alpha_i=0}^{\infty} x_{\alpha_i}^2 < \infty$ рассматривается функционал

$$F(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n=1}^{\infty} a_{\alpha_1\ldots\alpha_n} \varphi(x_{\alpha_1}) \ldots \varphi(x_{\alpha_n}), \qquad (1)$$

где $a_{\alpha_1\ldots\alpha_n}$ — заданные симметрические действительные коэффициенты, φ — дважды непрерывно дифференцируемая функция, n — натуральное число. Предполагается, что

$$\sum_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n=1}^{\infty} a_{\alpha_1\ldots\alpha_n}^2 < \infty, \quad \sum_{\alpha_k=1}^{\infty} \varphi^2(x_{\alpha_k}) < \infty,$$

$$\sup_{x \in S_1} \sum_{\alpha_k=1}^{\infty} \varphi^2(x_{\alpha_k}) < \infty.$$

Доказывается, что функционал $F(x)$ слабо непрерывен на S_1, имеет сильный дифференциал, который также слабо непрерывен и удовлетворяет условию Липшица. Это позволяет на базе известных вариационных принципов формулировать утверждения о существовании у градиента функционала $F(x)$ нормированных собственных векторов (а при дополнительных предположениях — бесконечного числа нормированных собственных векторов). М. А. Красносельский

10014. Метод мажорант для аналитических операторов. Халитова Н. А., Уч. зап. Казанск. ун-та, 1957, 117, № 2, 49—53

Пусть оператор $P(x)$ переводит пространство X в Y, оператор $Q(z)$ переводит пространство Z в W, причем Z и W являются нормирующими пространствами для X и Y (Канторович Л. В., Докл. АН СССР, 1951, 80, № 6, 849—852). Если $P(x)$ и $Q(z)$ аналитичны соответственно в окрестностях точек x_0 и z_0 и выполнены условия:

1) $\| [P'(x_0)]^{-1} \| \leqslant -[Q'(z_0)]^{-1}$; 2) $| P(x_0) | \leqslant Q(z_0)$;

3) $| P^{(k)}(x_0) | \leqslant Q^{(k)}(z_0)$, $k = 2, 3, \ldots$,

то процессы Ньютона и Чебышева для уравнения $Q(z) = 0$ мажорируют соответствующие процессы для уравнения $P(x) = 0$. А. Н. Валуев

10015. О методе приближенных уравнений для решения нелинейных функциональных уравнений. Гуань Чжао-чжи, Линь Цюнь (Sur la méthode d'équations approximatives pour résoudre des équations fonctionnelles non-linéaires. Kwan Chao-chin, Lin Chün), Кэсюэ цзилу, Sci. Rec., 1957, 1, № 6, 385—389 (франц.)

Идеи Л. В. Канторовича (Успехи матем. наук, 1948, 3, № 6, 89 — 186) применяются для аппроксимации нелинейного уравнения линейным. Пусть X и $\bar{X}$ — банаховы пространства, φ_0 — изоморфизм подпространства $X' \subset X$ на $\bar{X}$. Предполагается, что оператор φ_0 имеет продолжение φ на всех X. Рассматривается нелинейное уравнение

$$p(x) \equiv x - f(x) = 0; \; x, f(x) \in X \qquad (1)$$

и аппроксимирующее его уравнение

$$\bar{p}(\bar{x}) \equiv \bar{x} - \bar{f}(\bar{x}) = 0; \; \bar{x}, \bar{f}(\bar{x}) \in \bar{X}, \qquad (2)$$

где f и $\bar{f}$ имеют непрерывные производные Фреше, удовлетворяющие ряду условий. Путем использования результата работы Гуань Чжао-чжи (РЖМат, 1957, 1830) авторы приходят к выводу, что (1) и (2) имеют соответственно единственные решения x^* и $\bar{x}^*$, причем процесс Ньютона $\bar{x}_{m+1} = \bar{x}_m - \bar{p}'(\varphi x_0)^{-1} \bar{p}(\bar{x}_m)$ ($m = 0, 1, 2, \ldots$), $\bar{x}_0 = \varphi(x_0)$ сходится к $\bar{x}^*$ со скоростью геометрической прогрессии. Дается оценка разности $\| x^* - \bar{x}^* \|$. При помощи этого результата устанавливается существование непрерывного решения уравнения $x(s) = \int_a^s f(s, t, x(t))\, dt$, к которому сходится итерационный процесс, причем уравнение, соответствующее (2), оказывается линейным. М. М. Вайнберг

10016. О сходимости приближенного процесса Галеркина в (B_0)-пространствах. Альтман (On the convergence of Galerkins' approximate process in (B_0)-spaces. Altman M.), Bull. Acad. polon. sci., 1957, Cl. 3, 5, № 7, 717—720 (англ.; рез. русск.)

Пусть A — линейный вполне непрерывный оператор, действующий в полном линейном метрическом пространстве X с топологией, определенной последовательностью псевдонорм. Предполагается, что в X существует базис $(e_i) : x = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x) e_i$ для всякого $x \in X$, где f_i — линейные непрерывные функционалы на X, причем $f_i(e_j) = 1$ при $i = j$ и $f_i(e_j) = 0$ при $i \neq j$. Число h называется регулярной точкой оператора A, если уравнение $x - hAx = 0$ имеет лишь решение $x = 0$. $x_n = \sum a_i^{(n)} e_i$ называется приближенным по Галеркину решением уравнения $x - hAx = y_0$ ($x, y_0 \in X$),

если числа $a_i^{(n)}$ удовлетворяют системе $f_j(x_n - hAx_n - y_0) = 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Доказывается теорема: Если h — регулярная точка оператора A, то приближенные решения Галеркина x_n существуют (за исключением, быть может, конечного числа значений n) и сходятся к решению уравнения $x - hAx = y_0$. Доказательство использует вспомогательные предложения других работ (РЖМат, 1955, 1846: Mazur S., Orlicz W., Studia math., 1933, **4**, 152—157; 1948, **10**, 177—208).

М. М. Вайнберг

10017. Некоторые свойства чебышевских множеств. Ефимов Н. В., Стечкин С. Б., Докл. АН СССР, 1958, **118**, № 1, 17—19

Величина $\rho(x, M) = \inf_{y \in M} \|x - y\|$ называется расстоянием элемента x до множества M элементов банахова пространства X. Множество M называется чебышевским, если для любого $x \in X$ существует один и только один $y \in M$, ближайший к x. Авторы говорят, что единичная сфера E пространства X не содержит конических точек, если для любого $x_0 \in E$ найдется один и только один линейный функционал f_0, удовлетворяющий условиям $\|f_0\| = 1$, $f_0(x_0) = 1$.

Работа посвящена изучению взаимоотношений между классом ограниченных выпуклых множеств и классом ограниченных чебышевских множеств. Легко устанавливается, что для совпадения этих классов необходимо, чтобы сфера E была строго выпукла и не содержала конических точек. В работе доказывается, что для случая n-мерного банахова пространства X_n эти условия являются и достаточными (теорема 2).

Примечание референта. Хотя доказательство приведено полностью, некоторые его детали остались неясными референту, например, утверждение $Q_\alpha \subset \overline{M}_\alpha$ (в конце работы). В. Н. Никольский

10018. Об инвариантных средних на компактных полугруппах. Розен (On invariant means over compact semigroups. Rosen William G.), Proc. Amer. Math. Soc., 1956, 7, № 6, 1076—1082 (англ.)

Пусть Σ — компактная топологическая полугруппа. Средним на Σ называется непрерывный положительный линейный функционал над пространством вещественных непрерывных функций на Σ с равномерной сходимостью. Обычным образом вводится понятие право-, лево- и двусторонне-инвариантного среднего относительно сдвигов на Σ. Опираясь на работу Нумакура (Numakura K., Math. J. Okayama Univ., 1952, **1**, 99—108) о структуре компактных полугрупп, автор изучает вопрос о существовании инвариантных средних. Доказывается, что правоинвариантное среднее существует тогда и только тогда, когда Σ содержит единственный минимальный левый идеал. Двусторонне-инвариантное среднее существует тогда и только тогда, когда ядро K полугруппы является группой (под ядром полугруппы понимается двусторонний замкнутый минимальный идеал, существование и единственность которого установлены Нумакура). Если правоинвариантное среднее единственно, то оно является и двусторонне-инвариантным и, следовательно, K — группа. В работе изучается также структура K в случае наличия неединственного правоинвариантного среднего. Ю. М. Березанский

10019. Замена переменной в теории распределений. Сантуш-Геррейру (Les changements de variable en théorie des distributions I. Santos Guerreiro J.), Portug. math., 1957, **16**, № 1-2, 57—81 (франц.)

Автор рассматривает функции одной независимой переменной и доказывает теорему, которая, грубо говоря, состоит в следующем: Линейное, непрерывное, отличное от нуля преобразование, заданное в пространстве распределений, сохраняющее произведение распределения на мультипликатор (бесконечно дифференцируемую функцию), является заменой переменной, осуществляемой бесконечно дифференцируемой функцией с производной, отличной от нуля. В. Э. Лянце

10020. Две теоремы о преобразовании Фурье. Какита (Two theorems on Fourier transform. Kakita Takao), Proc. Japan Acad., 1958, **34**, № 1, 22—27 (англ.)

Шварцем было высказано утверждение (Schwartz L., Théorie des distributions, Paris, 1950—51) о том, что преобразование Фурье устанавливает топологический изоморфизм линейных топологических пространств $\mathfrak{D}_M$ и $\mathfrak{D}_C$. В реферируемой заметке дается полное доказательство этого утверждения.

Вторая часть заметки посвящена обобщению теоремы Планшереля и Пойа (Plancherel M., Pólya G., Comment. math. helv., 1937, 9, 224—248) о связи между спектром целой функции экспоненциального типа многих переменных и ростом ее по различным направлениям на случай, когда преобразование Фурье этой функции есть обобщенная функция с компактным носителем. На функции многих переменных обобщается понятие индикатора и индикаторной диаграммы (РЖМат, 1958, 2027 К; гл. I, §§ 15, 19).

Ю. Л. Шмульян

10021. Современная алгебра и квантовая механика. Видав (Moderna algebra in kvantna mehanika. Vidav Ivan), Obz. mat. in fiz., 1956, 5, № 1, 5—15 (словенск.)

Приводится весьма ясное изложение аксиоматики квантовой механики. Изложение базируется в основном на работе Сигала (Segal I. E., Ann. Math., 1947, 48, 930—948). О. С. Парасюк

10022. О постулатах общей квантовой механики. Лауденслейгер (On postulates for general quantum mechanics. Lowdenslager D. B.), Proc. Amer. Math. Soc., 1957, 8, № 1, 88—91 (англ.)

Сигал (Segal I. E., Ann. Math., 1947, 48, 930—948) сформулировал аксиоматику для общей квантовомеханической системы, в которой наблюдаемые образуют вещественное банахово пространство, полуупорядоченное относительно замкнутого выпуклого положительного конуса P, содержащего в качестве внутреннего элемента единичный элемент e.

В работе показано, что в таком пространстве можно различными способами задавать алгебраическую структуру, постулируемую Сигалом. Кроме того, приводятся примеры систем Сигала с различными патологическими свойствами. О. С. Парасюк

10023. Некоторые свойства предвидений в квантовой механике. Гишарде (Quelques propriétés des prévisions en mécanique quantique. Guichardet Alain), C. r. Acad. sci., 1957, **245**, № 25, 2211—2213 (франц.)

Рассматривается обычная квантово-механическая интерпретация гильбертова пространства $\mathfrak{H}$ (состояние — вектор ψ, $\|\psi\| = 1$, физическая величина — самосопряженный оператор A). Вектору ψ ставится в соответствие мера $\mu_\psi(\Delta) = (E(\Delta)\psi, \psi)$, где $E(\Delta)$ — спектральная функция оператора A. Устанавливается непрерывность соответствия $\psi \to \mu_\psi$, равномерная относительно A.

Во второй части заметки рассматривается сходимость μ_ψ к дельта-функции δ_a.

В заметке имеются опечатки. Некоторые результаты представляются референту тривиальными. Смысл слова «предвидение» (prévision) в статье не поясняется. Ю. Л. Шмульян

10024 К. Пространства Гильберта. Ионеску-Тулча (Spații Hilbert. Ionescu Tulcea

C. T. Bucureşti, Ed. Acad. RPR, 1956, 283 p., 10,45 lei) (рум.)

Абстрактное изложение общей теории операторов в гильбертовом пространстве и основ теории нормированных колец (алгебр Банаха). Книга состоит из семи глав. 1) Пространства Гильберта (общие свойства); 2) Примеры пространств Гильберта; 3) Непрерывные операторы, 4) Алгебры Банаха, 5) Операторное исчисление; 6) Линейные операторы; 7) Нормальные и самосопряженные операторы. В конце книги даны три дополнения, посвященные соответственно вопросу суммируемости однопараметрических семейств элементов пространства Банаха, теореме Ф. Рисса о представлении линейных функционалов в $C[a, b]$ и леммам Цорна — Кнезера в теории частично упорядоченных множеств. И. М. Глазман

См. также: 9629, 9654, 9655, 9686, 9834, 9862, 9863, 9912, 9961, 9966 К, 9968, 9974, 10027, 10029

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Редакторы *Н. В. Смирнов, Н. Н. Воробьев*

10025. Индукция и вероятность. Лущевская-Романова (Indukcja a prawdopodobienstwo. Łuszczewska-Romahnowa Sewe-ryna), Studia log., 1957, 5, 71—90 (польск.)

Статья посвящена критике исследований индуктивного умозаключения, проводимых с помощью теории вероятностей. Вероятностные исследования индукции проистекают из сравнения индуктивных умозаключений с дедуктивными доказательствами и приводят к скептическому или к положительному ответу на так называемую проблему индукции. В изложении автор пользуется гносеологическими аргументами и приходит к заключению, что при исследовании индуктивных умозаключений, встречаемых в науке, нельзя получить положительные результаты только с помощью теории вероятностей. Сравнение процесса индуктивного вывода с процессом образования условного рефлекса приводит к заключению, что «знание, ориентирующее нас в окружающем мире и делающее нашу деятельность в нем эффективной, а также прогресс науки, состоящий из достижения все более лучшей ориентации в пределах неуклонно раздвигающейся реальности,— достигается не только посредством одного индуктивного вывода, но и посредством применения его совместно с другими познавательными операциями, в особенности с операциями, производящими неизменное и быстрое исправление индуктивных умозаключений в тех случаях, когда они оказываются не согласующимися со вновь познанными фактами». R. Suszko

10026. Развитие понятия вероятности. Вальдес-Гамес (Desarrollo del concepto de probabilidad Valdés Gamez Remigio), Rev. mat., 1957, № 2, 1—10 (исп.)

10027. Об одном классе пространств с вероятностной мерой. Блакуэлл (On a class of probability spaces. Blackwell David), Proc. 3rd Berkeley Sympos. Math. Statistics and Probability. Vol. 2, Berkeley — Los Angeles, 1956, 1—6 (англ.)

Автор называет пространством Лузина $\{\Omega, \mathscr{B}\}$ пространство Ω с вероятностной мерой P, определенной на сепарабельном борелевском теле $\mathscr{B}$, если множество значений любой $\mathscr{B}$-измеримой функции, определенной на Ω, есть аналитическое множество.

Доказывается ряд свойств пространств Лузина, например:

Теорема 5. Если $\{\Omega, \mathscr{B}\}$ — пространство Лузина, то для любого сепарабельного борелевского подтела $\mathscr{A} \subset \mathscr{B}$ существует функция $Q(w, B)$, для которой: а) для фиксированного $B \in \mathscr{B}$ Q — измеримая относительно $\mathscr{A}$ функция; б) для фиксированного w Q есть распределение вероятностей на $\mathscr{B}$; в) для любого $A \in \mathscr{A}$, $B \in \mathscr{B}$ $\int_A Q(w, B)\, dP = P(A \cap B)$; г) существует множество $N \ni \mathscr{A}$, $P(N) = 0$, так что $Q(w, A) = 1$ для $w \in A$, $w \notin N$.

Теорема 6. Пусть $\{\{\Omega_n, \mathscr{B}_n\}\}$ — последовательность пространств Лузина $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \ldots$ и $\mathscr{A}_n$ — наименьшее борелевское тело, содержащее все множества вида $A_1 \times \ldots \times A_n \times \Omega_{n+1} \times \Omega_{n+2} \times \ldots$, $A_i \in \mathscr{B}_i$. Функция P, определенная на $\bigcup \mathscr{A}_n$ и являющаяся вероятностной мерой на каждом $\mathscr{A}_n$, есть вполне аддитивная функция на $\bigcup \mathscr{A}_n$. В. Г. Винокуров

10028. Проблема условной вероятности для случайных функционалов в пространстве Банаха. Кампе-де-Ферье (Un problème de probabilité conditionnelle pour les fonctionnelles linéaires sur un espace de Banach. Kampé de Fériet Joseph), C. r. Acad. sci., 1957, 244, № 1, 24—27 (франц.)

В банаховском пространстве задана мера μ такая, что все линейные функционалы являются μ-измеримыми и нормально распределенными случайными величинами. При этом условное распределение одного линейного функционала, при условии, что один или несколько линейных функционалов принимают фиксированные значения, тоже будет нормальным.

Его среднее и дисперсия легко выражаются через средние, дисперсии и ковариации безусловных распределений этих функционалов. В. А. Волконский

10029. Вероятностные меры в пространстве Банаха, обладающем счетной базой. Кампе-де-Ферье (Mesures de probabilité sur les espaces de Banach admettant une base dénombrable. Kampé de Fériet J.), C. r. Acad. sci., 1957, 244, № 20, 2450—2454 (франц.)

Говорят, что пространство Банаха X обладает счетной базой, если существует счетная последовательность элементов $e_n \in X$ и взаимно однозначное отображение T пространства X на пространство $Y \subset R^\infty$ (R^∞ — пространство бесконечных последовательностей $\{\eta_n\}$) такие, что если $\{\eta_n\} = Tx$, $x \in X$, то

$$\| x - \sum_1^n \eta_k e_k \| \to 0.$$

Легко видеть, что $\{y: \sum_1^\infty |\eta_k| < \infty\} \subset Y$.

Предлагается задавать меру в пространстве X следующим образом. Задается произвольная вероятностная мера ν в пространстве R^∞, для которой

$$\sum_1^\infty \int_{R^\infty} |\eta_n|\, d\nu < \infty.$$

При этом $\nu\{\sum_1^\infty |\eta_n| < \infty\} = 1$, и мера μ в пространстве X определяется следующим равенством:

$$\mu(A) = \nu(T^{-1}[A \cap \{\sum_1^\infty |\eta_n| < \infty\}]).$$

Все линейные функционалы на X измеримы относительно меры μ.

Строится база в пространстве $C[0,1]$ непрерывных функций с равномерной нормой, и доказывается, что при данном способе задания меры она оказывается сосредоточенной на функциях ограниченной вариации.

В. А. Волконский

10030. **Конечные множества и скалярное произведение. Молчанов А. М.**, Докл. АН СССР, 1957, 116, № 6, 920—922

Сообщается, что можно ввести понятие близости подмножеств конечного множества, переходящее в понятие скалярного произведения при увеличении числа элементов этого конечного множества. При доказательстве используются теоретико-вероятностные методы.

С. С. Кислицын

10031. **Две формулы комбинаторного анализа. Гомиш-Шпиндола** (Duas fórmulas de análise combinatoria. Gomes Spíndola Austregésilo), Gaz. mat., 1957, 18, № 68-69, 23—24 (порт.)

С помощью рассмотрения задачи о выборке объема b из урны, содержащей n черных и a голубых шаров, выводятся известные формулы:

$$\binom{n+a}{b} = \sum_{i=0}^{a} \binom{n}{b-i}\binom{a}{i} \quad (b \geqslant a),$$

$$\binom{n+a}{b} = \sum_{i=0}^{b} \binom{n}{b-i}\binom{a}{i} \quad (b < a).$$

А. Г. Школьник

10032. **Экспериментальный метод для получения случайных чисел и перестановок. Уолш** (An experimental method for obtaining random digits and permutations. Walsh J. E.), Санкия, Indian J. Statist., 1957, 17, № 4, 355—360 (англ.)

Рассматривается процедура, позволяющая по результатам подбрасывания монет получить случайные числа или случайные перестановки чисел 1, 2, 3,..., n...

Для получения n ($n \leqslant 64$) двоичных цифр автор предлагает проводить $n+1$ серий по 10 бросаний. Если число гербов в 1-й серии четно, то каждая следующая серия при четном числе гербов дает цифру 0, а при нечетном — цифру 1 и наоборот. Таким путем 2-я, 3-я... $n+1$-я серии дадут n цифр двоичного числа. Автор показывает, что даже если вероятность выпадения герба не равна $1/2$, но лежит в пределах от $1/4$ до $3/4$ (вероятность даже может меняться от опыта к опыту), а результаты отдельных бросаний статистически независимы, то полученные таким образом числа практически можно рассматривать как случайные.

М. И. Эйдельнант

10033. **Задача из основ исчисления теории вероятностей. Бирман** (Eine Aufgabe aus den Anfängen der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Biermann Kurt-R.), Centaurus, 1957, 5, № 2, 142—150 (нем.)

10034. **О проблеме Кейли. Мозер** (On a problem of Cayley. Moser Leo), Scripta Math., 1957, 22, № 3-4, 289—292 (англ.)

Рассматривается следующая задача. Из действительных чисел, лежащих на сегменте [0,1], наудачу выбирается число. Можно остановиться на выбранном числе или отбросить его и из оставшихся чисел выбирать снова. Такой выбор можно продолжать не более, чем n раз. Требуется оценить наибольшее математическое ожидание E_n выбора, полученное в зависимости от правила остановки.

Задача является обобщением так называемой проблемы Кейли, который рассматривал аналогичные схемы организации денежной лотереи.

Исходя из рекуррентной формулы

$$E_{n+1} = (1 + E_n^2)/2, \quad n \geqslant 0, \; E_0 = 0.$$

автор находит точное выражение для E_n и приближенное:

$$E_n \approx 1 - \frac{2}{n + \log n + 2}.$$

Для $n = 5, 10, 15, 20$ точные выражения сравниваются с приближенными.

Б. Н. Гарттштейн

10035. **О почти полной сходимости средних значений случайных величин (теорема Сюй, Роббинса и Эрдёша). Дюге** (Sur la convergence presque complète des moyennes de variables aléatoires (théorèmes de Hsu, Robbins et Erdös). Dugué D.), Publ. Inst. Statist. Univ. Paris, 1954, 3, 149—152 (франц.)

Автор доказывает достаточность условий теоремы, о которой говорит заглавие, используя метод Кантелли четвертого момента (на стр. 151, строка 2, вместо u_n следует читать $n^3 u_n$). Доказательство необходимости условий будет дано в другом месте.

K. L. Chung

Перевод из Math. Revs, 1955, 16, № 6, 600.

10036. **О стахостатической сходимости в смысле Чезаро и о важных различиях между сходимостью почти наверное и сходимостями по вероятности и почти полной. Дюге** (Sur la convergence stochastique au sens de Cesaro et sur des différences importantes entre la convergence presque certaine et les convergences en probabilité et presque complètes. Dugué D.), Санкия, Indian J. Statist., 1957, 18, № 1-2, 127—138 (франц.; рез. англ.)

Пусть $X_1, X_2, \ldots X_n$ (1) — последовательность случайных величин, $Z_n = f(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ — какая-нибудь функция от первых n величин этой последовательности; пусть далее

$$\left\{X_1^{(n)}, X_2^{(n)}, \ldots, X_n^{(n)}\right\} \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

— последовательность серий результатов испытаний над величинами (1), причем результаты каждой серии не зависят от результатов всех предшествующих серий испытаний, так что величины $X_k^{(n)}$ ($n = 1, 2, \ldots$) независимы и распределены по тому же закону, что и X_k. Последовательность Z_n ($n = 1, 2, \ldots$) называется сходящейся к определенному пределу почти полно (presque complètement), если последовательность величин $f(X_1^{(n)}, X_2^{(n)}, \ldots, X_n^{(n)})$ ($n = 1, 2, \ldots$) сходится к определенному пределу с вероятностью 1. Аналогично определяется почти полная стабильность последовательности Z_n или ее почти полная ограниченность.

В работе доказываются теоремы, устанавливающие связь между стабильностью, ограниченностью, сходимостью к определенному пределу при различных видах сходимости (почти наверное, по вероятности, почти полно) среднего арифметического $Y_n = \dfrac{X_1 + \ldots + X_n}{n}$, с одной стороны, и величин $\dfrac{M_n}{n} = \dfrac{\max(X_1, \ldots, X_n)}{n}$, $\dfrac{m_n}{n} = \dfrac{\min(X_1, \ldots, X_n)}{n}$, — с другой.

Теорема 1. Если Y_n сходится почти наверное к какому-нибудь значению, то M_n/n и m_n/n стремятся почти наверное к 0.

Теорема 2. Если Y_n почти наверное ограничены (по абсолютному значению), то M_n/n и m_n/n также почти наверное ограничены (по абсолютному значению).

При дополнительном требовании независимости величин (1) аналогичные теоремы справедливы и для случая сходимости по вероятности или сходимости почти полной.

Устанавливается также ряд других аналогичных утверждений, из которых следует, что в противовес тому, что наблюдается в случае сходимости почти наверное, сходимость к нулю по вероятности или почти полная сходимость к нулю последовательности (1) не влечет такую же сходимость к нулю среднего арифметического Y_n. Этот факт является следствием того положения, что сходимость по вероятности и сходимость почти полная несовместимы с существованием нормы в соответствующем пространстве. А. А. Бобров

10037. О некоторых предельных теоремах для однородных цепей Маркова. Нагаев С. В., Докл. АН СССР, 1957, 115, № 2, 237—239

Рассматривается однородная цепь Маркова в пространстве X и пусть F_x — σ-алгебра подмножеств этого пространства. Пусть $P(\eta, A)$ $(\eta \in X, A \in F_x)$ — вероятность перехода из состояния η в множество A. Предполагается, что цепь эргодична со стационарным распределением $P(A)$, причем $|P^n(\eta, A) - P(A)| < c\rho^n$ для некоторых c и $\rho < 1$ равномерно относительно $\eta \in X$ и $A \in F_x$. Пусть $f(\eta)$ — действительная функция на X, измеримая относительно F_x. Пусть x_n — траектория процесса.

В работе изучается предельное распределение для $\sum_{m=1}^{n} f(x_m)$ при различных предположениях относительно предельного распределения подобной суммы для случая независимых одинаково распределенных слагаемых с распределением $P(A)$.

Кроме того, для счетного множества состояний в работе имеется локальная предельная теорема и теорема об асимптотическом разложении. Работа не содержит доказательств, однако указывается, что метод доказательства основан на спектральном разложении операторов в банаховом пространстве.

В формулировке теоремы 1 имеется опечатка. Второе условие теоремы должно иметь вид

$$\sigma^2 = \lim_{n\to\infty} M\left\{\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{m=1}^{n}\left[f(x_m) - Mf(x_m)\right]\right\}^2 > 0.$$

Р. З. Хасьминский

10038. Эргодическая теорема для непрерывных случайных процессов кратности p. Теодореску (O teoremă ergodică pentru procesele stochastice continue de multiplicitate p. Theodorescu Radu), An. Univ. «C. I. Parhon». Ser. ştiinţ. natur., 1956, № 10, 23—24 (рум.; рез. русск., франц.)

Приводится эргодическая теорема для переходных вероятностей $P(s, x; t, X)$ случайного непрерывного процесса кратности p. Резюме автора

10039. Заметка о случайной римановой сумме. Нисио (Note on random Riemann sum. Nisio Makiko), J. Math. Soc. Japan, 1957, 9, № 4, 448—451 (англ.)

Пусть $f(t)$ определена на $(0, \infty)$,

$S_n = \sum_{i=1}^{\infty} f(t_i^n)(t_{i+1}^n - t_i^n)$ — интегральная сумма Римана функции $f(t)$ на $(0, \infty)$; причем «точки деления» t_i^n — случайные моменты скачков пуассоновского случайного процесса с параметром n. Доказывается: 1) если $f \in L_1(0, \infty)$, то $S_n \to \int_0^\infty f(t)\,dt\ (n\to\infty)$ по вероятности; 2) если $f \in L_1(0, \infty) \cap L_2(0, \infty)$, то $S_{2n} \to \int_0^\infty f(t)\,dt\ (n\to\infty)$ с вероятностью 1. А. А. Бобров

10040. Противоречащий пример к теореме Колмогорова. Брейман (A counterexample to a theorem of Kolmogorov. Breiman Leo), Ann. Math. Statistics, 1957, 28, № 3, 811—814 (англ.)

Строится пример последовательности независимых случайных величин $\{X_k\}$, $P\{X_1 = 0\} = 1$, $P\{X_k = (-1)^k K^{5/2}\} = k^{-2}$, $P\{X_k = (-1)^{k+1} K^{1/2}(1 - k^{-2})\} = 1 - k^{-2}$, $k \geqslant 2$. Показывается, что эта последовательность подчиняется обычному закону больших чисел и в то же время условие

$$\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} MX_{nk}^2 \to 0\ (n\to\infty), \qquad (1)$$

где $X_{nk} = X_k$, если $|X_k| < n$, и $X_{nk} = 0$, если $|X_k| \geqslant n$, не выполняется, что свидетельствует об ошибочности одного варианта необходимых и достаточных условий для применимости закона больших чисел, указанного А. Н. Колмогоровым без доказательства (Math. Ann., 1928, 99, 309—319): условие (1) не является необходимым. Автор указывает также на ошибку, допущенную при доказательстве необходимости этого условия методом характеристических функций в монографии Б. В. Гнеденко и А. Н. Колмогорова (предельные распределения для сумм независимых случайных величин ГИТТЛ, 1949, стр. 145). А. А. Бобров

10041. Случайное время. Винер, Винтнер (Random time. Wiener Norbert, Wintner Aurel), Nature, 1958, 181, № 4608, 561—562 (англ.)

Отмечается, что при измерении времени в основу всегда кладется предположение, что некоторое вращение (стрелок часов, земли, галактики или электронов в атоме) является совершенно равномерным, т. е. описывается функцией времени вида $\exp\{i\omega t\}$. Математически эта функция характеризуется тем, что ее временная корреляционная функция

$$F(t) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(t+s)\,\overline{f(s)}\,ds$$

совпадает с ней самой, т. е. что соответствующая спектральная функция $\varphi(u)$, определяемая из равенства

$$F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itu}\,d\varphi(u),$$

представляет собой единичный скачок в точке $u = \omega$ (интеграл от δ-функции Дирака).

На самом деле абсолютно равномерного вращения быть не может, так как каждая физическая система обязательно испытывает неконтролируемые флюктуации. Поэтому в $\exp\{i\omega t\}$ на самом деле надо заменить t суммой $t + z(t)$, где $z(t)$ — случайный процесс. Предполагается, что этот процесс представим в виде $\alpha x(t)$, где α — положительная константа, а $x(t)$ — нормированный гауссовский случайный процесс со стационарными независимыми приращениями (так называемый «процесс Винера»). При этом временная корреляционная функция $F(t)$, отвечающая $f(t) = \exp\{i\omega\times$

$\times [t+\alpha x(t)]\}$, может быть легко найдена с помощью эргодической теоремы; она принимает одно и то же значение для почти всех реализаций процесса $x(t)$ и ей соответствует спектральная функция $\varphi(u)$, совпадающая (с точностью до нормировки) с устойчивым распределением Коши с медианой в точке $u = \omega$. А. М. Яглом

10042. Детерминистические и стохастические модели для возвращающихся эпидемий. Бартлетт (Deterministic and stochastic models for recurrent epidemics. Bartlett M. S.), Proc. 3rd Berkeley Sympos. Math. Statistics and Probability. Vol. 4. Berkeley — Los Angeles, 1956, 81—109 (англ.)

Рассматриваются различные модели эпидемий с точки зрения объяснения фактически наблюдаемых «вспышек» переменной амплитуды. В детерминистической модели такой эффект достигается, если «коэффициент инфективности» считать периодической функцией времени. В стохастической модели автор учитывает тот (пренебрегаемый в более грубых приближениях) факт, что изучаемая совокупность со временем пополняется новыми субъектами, между которыми могут быть также больные. Если число прибывших (за определенный промежуток времени) больных меньше некоторого порогового значения, эпидемии не будет; если это число больше порога, имеется определенная вероятность возникновения эпидемии. Но при некотором соотношении между параметрами колебательный характер изменения числа заболеваний станет вероятным и без внесения новой инфекции (при достаточно большом потоке поддающихся заражению). Эти соображения иллюстрируются искусственно построенными (при помощи случайных чисел) последовательностями.

Подчеркивается большее значение того трудно учитываемого факта, что достаточно большая совокупность (например, жителей большого города) с точки зрения возможности передачи инфекции фактически распадается на более мелкие группы. Выводится уравнение, определяющее соответствующий точечный стохастический процесс (РЖМат, 1957, 4991), но исследовать решение удается только для начальной стадии эпидемии. Г. К. Энгелис

10043. Детерминистические и стохастические эпидемии в изолированных совокупностях. Кендалл (Deterministic and stochastic epidemics in closed populations. Kendall David G.), Proc. 3rd Berkeley Sympos. Math. Statistics and Probability. Vol. 4. Berkeley — Los Angeles, 1956, 149—165 (англ.)

Рассматривается детерминистическая модель эпидемии, характеризуемая системой уравнений

$$dx/dt = -\beta xy,\ dy/dt = \beta xy - \gamma y,\ dz/dt = \gamma y,\ x + y + z = n \quad (1)$$

(x — число субъектов, способных заражаться, y — число субъектов, способных передать заражение, n — постоянная). Находится точное решение этой системы (t и y выражаются через z) и показывается, что приближенное решение, указанное первыми исследователями этой модели (Kermack W. O., Mc Kendrick A. G., Proc. Roy. Soc. London, 1927, A115, 700—721), при $m \equiv x(0) > 2\gamma/\beta \equiv 2\rho$ качественно неверно. Дальше изучается соответствующая стохастическая система, для которой вводится следующее приближение: 1) если $m \leqslant \rho$, то эпидемия развивается как «процесс рождения и смерти» с интенсивностями $m\beta$ (рождения) и γ (смерти); 2) если $m > \rho$, то: а) с вероятностью $p = (\rho/m)^{y(0)}$ эпидемия развивается как «процесс рождения и смерти» с интенсивностями γ (рождения) и $m\beta$ (смерти); б) с вероятностью $1-p$ функция $y(t)$ определяется из (1). Это приближение было проверено на совокупности 20 «искусственных эпидемий», построенных при помощи случайных чисел, и оказалось приемлемым. Г. К. Энгелис

10044. О вероятности заражения. Интема (Einiges zur Wahrscheinlichkeitsansteckung. Yntema L.), Verzekerings-Arch. Actuarieel Bijvoegsel, 1954, 31, 86—91 (нем.)

Процесс Пойа — дискретный стохастический процесс размножения, в котором вероятность рождения за промежуток времени от t до $t+h$ равна $\lambda_n(t)\,h + o(h)$, где $\lambda_n(t) = (1 + a\cdot n)/(1 + at)$, а n — число уже случившихся рождений (см., например, Feller, Probability theory, v. 1, New York, Wiley, 1950). Вероятность n рождений за время t может быть тогда записана в виде выражения для сложного процесса Пуассона или в виде члена в разложении бинома с отрицательным показателем. Автор обобщает результат на случай, когда $\lambda_n(t) = (1 + a_n\cdot n)/(1 + at)$, и показывает, что в то время как отрицательная биномиальная форма все еще применима, сложная форма Пуассона более непригодна. H. L. Seal

Перевод из Math. Revs, 1955, 16, № 5, 496.

10045. О случайных блужданиях с ограниченными возвращениями. Дом, Фишер (On random walks with restricted reversals. Damb C., Fisher M. E.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1958, 54, № 1, 48—59 (англ.)

Рассматривается случайное блуждание по n-мерной решетке. Решетка предполагается однородной, т. е. возможные переходы из каждого узла решетки одинаковы для всех узлов. Рассматривается процесс, в котором вероятность следующему шагу быть в i-м направлении равна β_i для всех направлений, кроме направления, противоположного тому, в котором был сделан предыдущий шаг. При этом, если предыдущий шаг был сделан в направлении, противоположном j-му, то вероятность шага в j-м направлении равна $\beta_j - \delta_q$. (Очевидно, $\Sigma_1^q \beta_i - \delta = 1$; q — число возможных направлений движения). Для изложенной схемы изучается распределение положения частицы после n переходов, моменты этого распределения и т. д., и асимптотика их для больших n. Р. З. Хасьминский

10046. Интегро-дифференциальные уравнения в частных производных, «интегралы пути» (path integrals) и стохастические процессы. Йокота, Токэй сури кэнкюсё ихо, Proc. Inst. Statist. Math., 1956, 4, № 1, 43—71 (японск.; рез. англ.)

В части I устанавливаются алгебраические свойства «упорядоченных экспонент», названных формальными решениями интегро-дифференциального уравнения $\partial f/\partial t = Af$. Упорядоченные экспоненты носят марковский характер.

В части II даются явное представление упорядоченных экспонент и метод построения так называемого «интеграла пути». При реализации интеграла пути его нормирующий множитель определяется единственным образом. Обнаруживается, что предложенный Фейнманом метод не подходит для построения интегралов пути для интегро-дифференциальных уравнений более общих, чем уравнения типа Шредингера. Когда точное вычисление интеграла пути затруднительно, используется так называемая «классическая аппроксимация», эквивалентная методам «наиболее крутых спусков» (methods of the steepest descents). Выводится формула для этой аппроксимации. В части III метод интеграла пути применяется к решению уравнений Ланжевена. Если решение уравнения Ланжевена не принадлежит к марковскому процессу, то метод (ОМХ), предложенный Онсагером, Мачлупом и Хасидзуме, неприемлем. ОМХ-метод эквивалентен решению уравнения Ланжевена в предположении, что решение принадлежит к марковскому процессу. Немарковские процессы не могут быть представлены упомянутым интегро-диф-

ференциальным уравнением. Для представления немарковского процесса интегро-дифференциальным уравнением требуются некоторые граничные условия. Однако решение интегро-дифференциального уравнения при таких граничных условиях не всегда является немарковским процессом. Если функциональное пространство, удовлетворяющее граничным условиям, инвариантно относительно интегро-дифференциального оператора A и если в нем можно построить δ-функцию, то решение интегро-дифференциального уравнения при этих граничных условиях может быть представлено марковским процессом, а именно: интегралом пути. Приводятся различие примеры, сопровождаемые подробными пояснениями. Резюме автора

10047. Броуновское движение, зависящее от n параметров; частный случай n=5. Леви (Brownian motion depending on n parameters: the particular case n=5. Lévy Paul), Appl. Probability. New York — Toronto — London, McGraw — Hill Book Co., 1957, 1—20 (англ.)

Броуновским движением называется случайная функция $X(A)$ точек евклидова пространства, определяемая с точностью до аддитивной постоянной формулой

$$X(A) - X(B) = \xi \sqrt{r(A, B)},$$

где $r(A, B)$ — расстояние между точками A и B, а ξ — нормированная гауссовская случайная величина. Вначале рассматриваются гауссовские случайные функции частного вида

$$\psi(t) = \int_0^t (tX_u + uY_k)\sqrt{du},$$

где (X_u, Y_u) — двумерная гауссова величина с нулевым математическим ожиданием и не зависящими от u вторыми моментами. Находится общий вид корреляционной функции для гауссовских случайных функций указанного вида и изучается продолжение функции $\Psi(t)$ направо и налево. Затем изучается случайная функция $M(t)$ — среднее значение разности $X(t) - X(O)$ по сфере радиуса t с центром в начале координат в пятимерном пространстве. Находится корреляционная функция для $M(t)$ и даются явные формулы для продолжения $M(t)$ направо и налево. В заключение выводится стохастическое дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция $M(t)$.

А. С. Монин

10048. О составном пуассоновом распределении. Прекопа (On the compound Poisson distribution. Prékopa András), Acta scient. math., 1957, 18, № 1-2, 23—28 (англ.)

Так автор именует безгранично делимое распределение, характеристическая функция которого (х. ф.) может быть записана (в понятных обозначениях) как

$$\exp\{i\gamma u + \int_{-\infty}^{0} (e^{iux} - 1)\, dM(x) + \int_0^{\infty} (e^{iux} - 1)\, dN(x)\}.$$

Установлена теорема: Пусть случайные величины $\xi_{n_1}, \ldots, \xi_{nk_n}$ при каждом фиксированном $n = 1, 2, \ldots$, независимы, для всякого $\varepsilon > 0$ $\lim\limits_{n\to\infty} \max\limits_{1\leqslant k\leqslant k_n} \operatorname{pr}\{|\xi_{nk}| > \varepsilon\} = 0$ и существует такая неотрицательная случайная величина η, принимающая конечное число значений, что $\sum_{k=1}^{k_n} |\xi_{nk}| \leqslant \eta$. Тогда предельное распределение для $\sum_{k=1}^{k_n} \xi_{nk_n}$, если оно существует, будет составным пуассоновым распределением.

В качестве следствия получается аналог этой теоремы для случайных процессов:

Пусть ξ_t — процесс с независимыми приращениями, выборочные функции которого с вероятностью 1 имеют ограниченную вариацию в каждом конечном интервале изменения времени, и при каждом $\varepsilon > 0$ $\lim_{h\to 0} \operatorname{pr}\{|\xi_{t+h} - \xi_t| > \varepsilon\} = 0$ равномерно по t ($\operatorname{pr}\{\xi_0 = 0\} = 1$).

Тогда х. ф. ξ_t имеет вид

$$\exp\{i\gamma(t)u + \int_{-\infty}^{0} (e^{iux} - 1)\, dM(x, t) + \int_0^{\infty} (e^{iux} - 1)\, dN(x, t)\},$$

где $\gamma(t)$ — непрерывная функция ограниченной вариации в каждом конечном интервале времени, $M(x, t)$ и $N(x, t)$ — непрерывные функции от t, для которых при всяком t существуют интегралы $\int_{-1}^{0} x\,dM(x, t)$ и $\int_0^1 x\,dN(x, t)$.

Г. Н. Сакович

10049. Теория прогноза многомерных стохастических процессов. I. Условие регулярности. Винер, Масани (The prediction theory of multivariate stochastic processes. I. The regularity condition. Wiener N., Masani P.), Acta math., 1957, 98, № 1-2, 111—150 (англ.)

Развивается теория стационарных последовательностей случайных векторов фиксированного конечного числа измерений. Вначале излагаются необходимые для этой теории сведения о граничных значениях (на единичном круге) голоморфных функций класса Харди H_δ (т. е таких, модуль которых в степени δ интегрируем по полярному углу в комплексной области); о функциях со значениями в виде квадратных матриц, компоненты которых суть функции комплексного переменного, определенные на единичном круге; об определении интеграла Римана — Стильтьеса для функций с матричными значениями. Геометрические понятия в пространстве q-мерных случайных векторов $f, g\ldots$ (ортогональность, проектирование и т. п.) вводятся с помощью матрицы

$$(f, g) = \{\int f^{(j)}\overline{g^{(k)}}\, dP\},$$

где P — вероятностная мера. Например, ортогональность означает, что $(f, g) = 0$. Последовательность случайных векторов $\{f_n\}$ называется стационарной, если корреляционная матрица $(f_m, f_n) = \Gamma_{m-n}$ зависит лишь от разности $m - n$. Для стационарных последовательностей вводится понятие несингулярности, доказывается разложение Волда и формулируются условия регулярности. Вводя с помощью формулы $f_n = \bigcup^n f_0$ унитарный оператор сдвига $\bigcup$ и используя его спектральное разложение, авторы дают спектральное представление корреляционной матрицы

$$\Gamma_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-in\theta}\, dF(\theta),$$

и изучают свойства спектральной матрицы F. Вводится случайная последовательность $g_n = f_n - (f_n / \mathfrak{M}_{n-1})$,

где $(f_n/\mathfrak{M}_{n-1})$ — ортогональная проекция вектора f_n на линейное подпространство $\mathfrak{M}_{n-1}$, натянутое на векторы f_{n-1}, f_{n-2},.... Матрица $G=(g_0, g_0)$ называется матрицей ошибок прогноза. Ее ранг называется рангом последовательности $\{f_n\}$. Если этот ранг равен размерности q векторов f_n, последовательность $\{f_n\}$ называется последовательностью полного ранга. Доказывается, что последовательность имеет полный ранг тогда и только тогда, если модуль логарифма детерминанта производной от спектральной матрицы интегрируем на единичном круге. При этом детерминант матрицы ошибок прогноза дается формулой

$$\Delta(G)=\exp\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\Delta\{F'(e^{i\theta})\}\,d\theta\right].$$

Дается спектральная характеристика компонент разложения Волда и необходимые и достаточные условия того, что последовательность имеет полный ранг и регулярна (кроме отмеченного выше условия, спектральная матрица должна быть абсолютно непрерывной). При некоторых общих условиях доказывается возможность факторизации спектральной матрицы (алгоритм факторизации будет дан во второй части работы). Указываются некоторые нерешенные вопросы.
А. С. Монин

10050. Условие непрерывности выборочных функций мартингала. Добрушин Р. Л., Теория вероятностей и ее применения, 1958, 3, № 1, 97—98 (рез. англ.)

Доказывается, что для того чтобы все выборочные функции сепарабельного стохастического процесса $\{\zeta_t,\ t\in[0,1]\}$ не имели точек разрыва первого рода, достаточно, чтобы выполнялось условие $\sup P\{|\zeta_t-\zeta_{t+\Delta t}|>\varepsilon\}=o(\Delta t)$ для любого $\varepsilon>0$. Если процесс $\{\zeta_t,\ t\in[0,1]\}$ является мартингалом, то достаточно, чтобы почти все выборочные функции сепарабельного процесса были непрерывны. Резюме автора

10051. Случайное блуждание, рассеяние и инвариантная вставка. 1. Одномерный дискретный случай. Белман, Калаба (Random walk, scattering, and invariant imbedding. 1 One-dimensional discrete case. Bellman Richard, Kalaba Robert), Proc. Nat. Acad. Sci., U. S. A., 1957, 43, № 10, 930—933 (англ.)

Рассматривается одномерное случайное блуждание с переходами лишь в соседние состояния ($p(k)$ и $q(k)$ — вероятности перехода в $(k-1)$ и $k+1$ из k). Для случая поглощающих экранов в точках a и b с помощью простого метода получено выражение для вероятности того, что точка a будет достигнута раньше, чем точка b, если частица выходит из точки x. Далее для случая, когда $b=+\infty$, находится математическое ожидание и характеристическая функция времени до достижения точки a при исходе из x. Р. З. Хасьминский

10052. Включение времен реакций в стохастическое описание познавательного поведения индивидуумов. Одли (The inclusion of response times within a stochastic description of the learning behavior of individual subjects. Audley R. J.), Psychometrika, 1958, 23, № 1, 25—31 (англ.)

Обсуждается стохастический процесс, применимый к познавательному поведению индивидуумов. Процесс описывает как времена реакций, так и последовательность выборов, получаемую из ситуации, содержащей две альтернативы. Рассматриваются оценки параметров и приемы измерения согласия. Резюме автора

10053. Стохастические процессы в демографии. Джоши (Les processus stochastiques en démographie. Joshi D. D.), Publ. Inst. Statist. Univ. Paris 1954, 3, 153—177 (франц.)

Автор обозревает предшествующие исследования детерминистических и стохастических моделей роста населения с точки зрения демографа. Отмечается, что задача определения параметров простого процесса «рождения и смерти» сильно упрощается, если данные представляют собой полную историю жизней некоторого числа индивидуумов, а не историю численности населения в определенные интервалы времени.

Особое внимание отводится раздельной роли двух полов (РЖМат, 1954, 3768) и влиянию возрастной воспроизводительности и смертности населения на общее протекание процесса. D. G. Kendall

Перевод из Math. Revs, 1955, 16, № 7, 731.

10054. О стохастической теории эпидемий. Бхаруча-Рид (On the stochastic theory of epidemics. Bharucha-Reid A. T.), Proc. 3rd Berkeley Sympos. Math. Statistics and Probability. Vol. 4, Berkeley — Los Angeles, 1956, 111—119 (англ.)

Рассматривается модель распространения эпидемии (Bellmann R., Harris T. E., Ann. Math., 1952, 55, 280—295); каждый зараженный субъект в некоторый момент времени с вероятностью q_n заменяется n зараженными субъектами ($n=0, 1, 2, ...$). При этом время инкубации является случайной величиной с функцией распределения $G(t)$. Если $X(t)$ — число зараженных в момент времени t, $p(x,\ t)=P(X(t)=x)$,

$$\pi(s,\ t)=\sum_{x=0}^{\infty}p(x,\ t)\,s^x,$$

$$h(s)=\sum_{n=0}^{\infty}q_n s^n,$$

то $\pi(s,\ t)$ определяется из уравнения

$$\pi(s,\ t)=s[1-G(t)]+\int_0^t h[\pi(s,\ t-\tau]\,dG(\tau).$$

Подробнее изучается случай $G(t)=1-\exp(-\lambda t)$, $h(s)=q_0+q_1 s+q_2 s^2$, где $p(x,\ t)$ находится в явном виде.

Показана возможность применения последовательного анализа Вальда для сравнения параметров, характеризующих эпидемии данного типа. Г. К. Энгелис

10055. Распределение числа пересечений уровня для гауссовского случайного процесса. Хелстром (The distribution of the number of crossings of a Gaussian stochastic process. Helstrom Carl W.), IRE Trans. Inform. Theory, 1957, 3, № 4, 232—237 (англ.)

Основные доказательства опущены, за подробностями автор отсылает к работе: Helstrom C. W., Level-crossing problems for Gaussian stochastic processes, Westinghouse Res. Labs., Pittsburgh, Pa., Rep. 8-1259 5; March, 1957. Пусть $x_0(t)$ — гауссовский стационарный процесс с рациональной спектральной плотностью, тогда можно построить такие гауссовские процессы $x_1(t),\ldots,x_{n-1}(t)$, что $x_0(t),\ldots,x_{n-1}(t)$ будет n-мерным стационарным марковским процессом (см., например, Doob J., Ann. Math. Statist., 1944, 15, № 3, 229—282; Wang M. C., Uhlenbeck G. E., Rev. Mod. Phys., 1945, 17, 323—342). (Статья Дуба автору, по-видимому, неизвестна.)

В первой части работы описана методика дополнения гауссовского процесса с рациональной спектральной плотностью до многомерного марковского процесса, для которого указаны уравнения Фоккера—Планка и Колмогорова.

Во второй части дан метод решения задачи о числе пересечений уровня для процесса, являющегося компонентой n-мерного марковского процесса. При этом у процесса предполагается существование первой производной. Дополнение до марковского процесса делается так, что $x_1(t) = \frac{dx_0(t)}{dt} = \dot{x}_0(t)$. Введем случайную величину ζ_t, заданную на процессе $x_0(t)$, следующим образом: ζ_t равно числу пересечений $x_0(t)$ уровня $x_0 = a$ на отрезке времени $(0, t)$. Решить задачу о числе пересечений — значит найти $P(\zeta_t = n)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ Автор обозначает через $p_n(t \mid \mathbf{x}^0)$ вероятность $\zeta_t = n$ при условии, что в момент 0 система находится в состоянии $\mathbf{x}^0 = (x_0, \dot{x}_0, x_{20}, \ldots, x_{n-1,0})$. Производящая функция распределения ζ_t

$$h(t \mid \mathbf{x}^0, z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n p_n(t \mid \mathbf{x}^0), \quad (0 \leqslant z \leqslant 1)$$

удовлетворяет уравнению Колмогорова.

Если обозначить

$$h^-(t \mid x_0, \dot{x}_0, \ldots, z) = h(t \mid \mathbf{x}^0, z) \text{ для } x_0 < a,$$

$$h^+(t \mid x_0, \dot{x}_0, \ldots, z) = h(t \mid \mathbf{x}^0, z) \text{ для } x_0 > a,$$

то граничные условия имеют вид

$$h^-(t \mid a, \dot{x}_0, \ldots, z) = z h^+(t \mid a, \dot{x}_0, \ldots, z), \ \dot{x}_0 > 0,$$

$$h^+(t \mid a, \dot{x}_0, \ldots, z) = z h^-(t \mid a, \dot{x}_0, \ldots, z), \ \dot{x}_0 < 0,$$

где

$$h^-(t \mid a, \dot{x}_0, \ldots, z) = \lim_{x_0 \to a-0} h^-(t \mid x_0, \dot{x}_0, \ldots, z),$$

$$h^+(t \mid a, \dot{x}_0, \ldots, z) = \lim_{x_0 \to a+0} h^+(t \mid x_0, \dot{x}_0, \ldots, z).$$

Кроме того, $h(0 \mid \mathbf{x}^0, z) = 1$. Далее с помощью теоремы Грина выписываются интегральные уравнения, к которым сводится решение уравнения Колмогорова с указанными выше граничными условиями. Они имеют довольно громоздкий вид.

По мнению автора, решение уравнения Колмогорова является сложной задачей, требующей применения быстродействующих вычислительных машин. Полученные интегральные уравнения трудно решать в силу сингулярности ядер. Однако из выведенных интегральных уравнений можно получать моменты распределения числа пересечений. Таким способом, например, получаются известные ранее формулы для математического ожидания и дисперсии числа пересечений.

Ю. К. Беляев

10056. **О неоднородном процессе рождения и смерти.** **Ламенс, Консал** (Sur le processus non homogène de naissance et de mort. Lamens A., Consael R.), Bull. cl. sci. Acad. roy. Belgique, 1957, 43, № 9, 597—605 (франц.)

Рассматривается неоднородный марковский процесс рождения и смерти в предположении, что: а) индивидуумы сосуществуют независимо друг от друга; б) явления рождения и смерти происходят независимо; в) вероятность того, что индивидуум произведет одного потомка в интервале времени $(t, t+dt)$, равна $\lambda(t)\,dt + o(dt)$, вероятность смерти в течение времени от t до $t+dt$ равна $\mu(t)\,dt + o(dt)$. Пусть $P_n(t, \tau)$ — вероятность того, что в момент t численность населения равна n, если в момент $\tau < t$ был один индивидуум, и пусть $\varphi_{t,\tau}(z)$ — соответствующая производящая функция. Интегральное уравнение

$$\varphi_{t,\tau}(z) = Ze^{-\int_\tau^t [\lambda(u)+\mu(u)]du} + \int_\tau^t e^{-\int_\tau^u [\lambda(v)+\mu(v)]dv} [\mu(u) + \lambda(u) \cdot \varphi_{t,u}^2(z)]du$$

дает простой способ для получения прямого и обратного уравнений для функции φ. Для $P_n(t, \tau)$ получены явные выражения.

Аналогичные методы применяются к схеме, учитывающей явления иммиграции, а также к процессу Пойа.

М. И. Фортус

10057. **Непрерывность сильных процессов Маркова.** **Номото Хисао**, Сугаку, 1957, 9, № 1, 15—16 (японск.)

10058. **Некоторые чисто детерминированные процессы.** **Розенблатт** (Some purely deterministic processes. Rosenblatt Murray), J. Math. and Mech., 1957, 6, № 6, 801—810 (англ.)

Рассматриваются примеры чисто детерминированных стационарных процессов, т. е. таких, у которых будущее может быть безошибочно восстановлено, если известно все прошлое. Пусть спектральная функция стационарного процесса x_t есть $\tau(\lambda)$. Если для некоторого $T > 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{T|\lambda|}\, d\mathscr{F}(\lambda) < \infty,$$

то можно прогнозировать процесс x_t, пользуясь формулой разложения в ряд Тейлора; и все течение процесса восстанавливается однозначно, если известно поведение процесса на как угодно малом отрезке времени.

Далее автор, основываясь на работах Сеге (Szego G., Amer. Math. Soc. Colloq. Pub., 1939, 23; Proc. Amer. Math. Soc., 1950, 1, 731—737), находит скорость стремления к нулю при $n \to \infty$ ошибки прогнозирования

$$\sigma_n^2 = \min_{c_1, \ldots, c_n} M \mid x_0 - \sum_1^n c_j x_j \mid^2$$

для следующих видов спектральных плотностей $f(\lambda)$ (время дискретно, и λ изменяется на отрезке $[0, 2\pi]$):

1) Если $f(\lambda)$ непрерывна и положительна на отрезке длины 2α и равна нулю при остальных значениях λ, то

$$\sigma_n^2 \sim \text{const} \left(\sin \frac{\alpha}{2}\right)^{2n+1}$$

2) Разбирается однопараметрическое семейство плотностей $f(\lambda, \alpha)$ положительных всюду, кроме точки $\lambda = 0$, при $\lambda \to 0$ имеющих асимптотику

$$f(\lambda, \alpha) \sim C(\alpha) \exp\left\{-\frac{\pi}{|\lambda|}\right\} |\sin \lambda|.$$

При этом $\sigma_n^2 \sim C_1(\alpha)\, n^{-\alpha}$ (здесь $C(\alpha)$ и $C_1(\alpha)$ не зависят от λ и n).

В. А. Волконский

10059. **О случайных функциях и автокорреляции.** **Форте** (A propos des fonctions aléatoires et d'autocorrélation. Fortet), Mém. artill. franç., 1957, 31, № 4, 1017—1019 (франц.)

Вводятся понятия стационарного случайного процесса, корреляционной функции, спектрального разложения, спектральной плотности и т. п. Затем кратко излагается содержание доклада Рихтера (M. Richter), где изучаются процессы, являющиеся в некотором смысле производными процессов Винера—Леви, а также линейные преобразования этих процессов (фильтры).

М. И. Фортус

10060. Локально стационарные случайные процессы. Силверман (Locally stationary random processes. Silverman Richard A.), IRE Trans. Inform. Theory, 1957, 3, № 3, 182—187 (англ.)

Рассматриваются комплексные случайные процессы $x(t)$ с нулевым средним значением и корреляционной функцией $\Gamma(t, t') = M\overline{x(t)}\,x(t')$. По определению процесс $x(t)$ называется локально стационарным, если его корреляционная функция представима в виде

$$\Gamma(t, t') = \Gamma_1\left(\frac{t+t'}{2}\right)\Gamma_2(t-t'),$$

где $\Gamma_1(t)$ — неотрицательная функция, а $\Gamma_2(t)$ — корреляционная функция стационарного случайного процесса, т. е. функция положительно определенная (автор ссылается в этой связи на определение локально однородного поля, предложенное А. Н. Колмогоровым (Докл. АН СССР, 1941, 30, 301—305); однако референту представляется, что связь здесь довольно далекая). Доказывается, что, взяв в качестве $\Gamma_2(t)$ произвольную положительно определенную функцию, а в качестве $\Gamma_1(t)$ произвольную экспоненциально выпуклую корреляционную функцию (Loève M., Rev. Sci., 1946, 84, 159—162), т. е. функцию, являющуюся двусторонним преобразованием Лапласа некоторой неотрицательной функции, мы наверное придем к корреляционной функции некоторого локального стационарного процесса. Получаемый при этом класс корреляционных функций содержит лишь неограниченные функции, не имеющие преобразования Фурье; однако широкий класс ограниченных и интегрируемых по всей плоскости корреляционных функций можно получить отсюда, воспользовавшись тем, что преобразование

$$\Gamma_1(t) \to \Gamma_1(t)\cdot e^{-2at^2},\quad \Gamma_2(t) \to \Gamma_2(t)\cdot e^{-\frac{a}{2}t^2}$$

при любом $a > 0$ переводит корреляционную функцию локально стационарного случайного процесса в корреляционную функцию другого такого процесса. Доказывается, что двумерный спектр интегрируемой корреляционной функции локально стационарного процесса, определяемый равенством

$$\Psi(\omega, \omega') = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\omega t-\omega' t')}\,\Gamma(t, t')\,dt\,dt',$$

всегда сам является корреляционной функцией некоторого локально стационарного случайного процесса от параметра ω; этот факт в известном смысле можно рассматривать как обобщение известной теоремы Хинчина в теории стационарных случайных процессов.

А. М. Яглом

10061. О понятии энтропии. Реньи, Балатони (Über den Begriff der Entropie. Rényi A., Balatoni J.), Math.-Forschungsber., 1957, 4, 117—134 (нем.)

Энтропией величины, принимающей конечное число значений $E_1, \ldots, E_n$ с вероятностями $p_1, \ldots, p_n$ называют, как известно, число $H(\eta) = -\sum p_i \log p_i$.

Авторы предлагают называть размерностью распределения ограниченной случайной величины d число

$$d(\xi) = \lim_{n\to\infty}\frac{H(\xi^{(n)})}{\log_2 n},$$

а ее d-энтропией число

$$H_d(\xi) = \lim_{n\to\infty}[H(\xi^{(n)}) - d\log_2 n],$$

где

$$\xi^{(n)} = \frac{k}{n} \text{ при } \frac{k}{n} \leqslant \xi < \frac{k+1}{n}.$$

Если величина ξ имеет дискретное распределение, то $d = 0$ и $H_0(\xi) = H$. Если ξ имеет непрерывное распределение с плотностью $p(x)$, то $d = 1$

$$H_1(\xi) = -\int p(x)\log p(x)\,dx.$$

Авторы выводят обобщение на случай d-энтропии известной формулой для условной энтропии. Обобщая известные рассуждения Шеннона—Хинчина, авторы указывают систему аксиом, задающую размерность и d-энтропию. Кратко обсуждается многомерный случай.

Р. Л. Добрушин

10062. Теория информации, вероятностные модели и психология. Слуцкин (Information theory, probability models, and psychology. Sluckin W.), Sci. News, 1958, № 47, 65—83 (англ.)

Обзорная статья. Во введении кратко обсуждается смысл слова «информация» и дается представление об измерении информации (по Шеннону). Рассматривается вопрос о времени, необходимом для того, чтобы определенный субъект прореагировал на некоторый возбуждающий стимул; указывается, что согласно последним физиологическим экспериментам относительно реакции на один стимул из возможного конечного числа их это время обычно пропорционально $\log(n+1)$, где n — общее число возможных стимулов, что имеет теоретико-информационный смысл. Следующий раздел статьи посвящен применению теории информации к вопросу о пороге различимости изменений определенного параметра, характеризующего возбуждающий стимул, и о связи общего числа различных допустимых значений такого параметра с частотой ошибок при субъективном определении его значения. Кратко обсуждаются также вопросы статистики речи (в частности, вопрос об избыточности, содержащейся в словесной записи какой-либо информации). В заключении перечисляются некоторые области психофизиологии, в которых теория информации может быть полезна (например, изучение законов памяти), и рассматривается вопрос о применении вероятностных моделей (в частности, марковских случайных процессов) при исследовании процесса обучения (РЖМат, 1957, 5810).

А. М. Яглом

10063. ε-энтропия дискретного случайного объекта. Ерохин В., Теория вероятностей и ее применения, 1958, 3, № 1, 103—107 (рез. англ.)

Пусть ξ — случайная величина, принимающая значения $x_1, \ldots, x_n$ с вероятностями $p_1, \ldots, p_n$ ($\sum_{k=1}^n p_k = 1$), а ξ' — случайная величина, принимающая те же значения, что и ξ с вероятностями $q_1, \ldots, q_n$ ($\sum_{k=1}^n q_k =$

$= 1$). Доказывается, что ε-энтропия дискретного объекта ξ

$$H_\varepsilon(\xi) = \inf_{P_{\xi\xi'} \in W_\varepsilon} J(\xi, \xi'),$$

где $J(\xi, \xi')$ — информация между ξ и ξ', а $P_{\xi\xi'}$ — совместная функция распределения величин ξ и ξ', будет одной и той же при условии W_ε вида $P(\xi' \neq \xi) \leqslant \varepsilon$ и вида $P(\xi' \neq \xi / \xi') \leqslant \varepsilon$. Результат обобщается на ξ, принимающее счетное число значений.

Дается выражение для $H_\varepsilon(\xi)$ и экстремального $P_{\xi\xi'}$ через вероятности p_k и q_k ($k = 1, \ldots, n$). В частности, показывается, что при $\varepsilon \leqslant (n-1)\, p_n$

$$H_\varepsilon(\xi) = H(\xi) - \varepsilon \log \frac{n-1}{\varepsilon} - (1-\varepsilon) \log \frac{1}{1-\varepsilon}.$$

Б. С. Цыбаков

10064. Принцип негэнтропии для информации. Бриллуэн (Principe de néguentropie pour l'information. Brillouin L.), Louis de Broglie, physicien et penseur. Paris, Albin Michel, 1953, 359—368 (франц.)

10065. К понятию энтропии конечной вероятностной схемы. Фаддеев (Zum Begriff der Entropie eines endlichen Wahrscheinlichkeitsschemas. Faddejew D. K.), Math.-Forschungsber., 1957, 4, 86—90 (нем.) Перевод с русского (РЖМат, 1958, 524).

1066. Новая интерпретация понятия скорости передачи информации. Келли (A new interpretation of information rate. Kelly J. L., Jr), IRE Trans. Inform. Theory, 1956, 2, № 3, 185—189 (англ.) Перепечатано из Bell System Techn. J. (РЖМат, 1958, 3937).

10067. Теория информации. Колмогоров (Az információ-továbbítás elemélete. Kolomogorov A. N.), Magyar tud. akad. Mat. és fiz. tud. oszt. közl., 1958, 8, № 1, 113—142 (венг.)

10068. Применение метода Монте-Карло к задаче диффузии гамма-лучей. Берджер (An application of the Monte Carlo method to a problem in gamma ray diffusion. Berger Martin J.), Sympos. Monte Carlo Methods, New York, John Wiley and Sons, Inc., 1956, 89—102 (англ.)

Приводятся предварительные результаты исследования следующей задачи. Пучок моноэнергетических гамма-лучей направляется под определенным углом на плоский параллельный барьер, с конечной толщиной в одном направлении и с бесконечной по двум другим. Взаимодействие гамма-лучей с барьером может происходить двумя путями: 1) они просто рассеиваются (эффект Комптона), изменяя при этом свою энергию и направление движения, и 2) они могут быть поглощены (фотоэлектрический эффект, образование пары). Эти два процесса являются стохастическими в том смысле, что расстояние, пройденное гамма-лучами между двумя последующими событиями, так же как энергия и угол рассеивания, являются случайными величинами с определенными распределениями вероятностей. В результате этих процессов часть гамма-лучей проникает через барьер, часть поглощается и часть отражается. Задача заключалась в определении интенсивности углового и энергетического распределения проникающей и отраженной частей первоначального пучка.

Аналитический подход к этой задаче приводит к большим математическим трудностям и поэтому для получения приближенного решения применялся метод Монте-Карло. Сперва методом случайных испытаний вычислялся шаг гамма-лучей (расстояние между двумя событиями) в бесконечной рассеивающей среде, в которой нет поглощения. Затем, используя эту величину, проводились аналитические вычисления. Дается детальное описание блок-схем и методов вычисления. Все вычисления были проведены на машине СЕАК.

М. А. Алексидзе

10069. Расчеты диффузии гамма-лучей вероятностными методами. Бич, Тьюс (Stochastic calculations of gamma ray diffusion. Beach L. A., Theus R. B.), Sympos. Monte Carlo Methods, New York, John Wiley and Sons, Inc., 1956, 103—122 (англ.)

Метод Монте-Карло используется для расчета проникновения фотонов в полубесконечную среду (или прохождения сквозь плоский слой). Для небольших глубин проникновения (до 5 длин свободного пробега) применяется «естественный» метод Монте-Карло с модифицированным учетом поглощения: фотону приписывается «масса»; вначале она равна 1, а затем уменьшается при каждом столкновении; история фотона кончается, когда «масса» его становится меньше некоторого заданного числа.

Для больших глубин (до 18 длин свободного пробега) испытано несколько способов ускорения сходимости. Предпочтение отдается предложенному Каном (Kahn H., Nucleonics, 1950, 6, № 5, 27) способу, основанному на экспоненциальной замене переменной в кинетическом уравнении.

Во всех примерах отсутствуют оценки дисперсий. Сравнения результатов с решениями, полученными другими методами, и контроля по числу испытаний нет. В некоторых случаях число испытаний явно недостаточно.

И. М. Соболь

10070. Резюме докладов, сделанных на заседаниях научно-исследовательского семинара по теории вероятностей. (Москва, февраль — май, 1957 г.). Теория вероятностей и ее применения, 1957, 2, № 4, 478—488

Приводится список 20 докладов, прочитанных за февраль — май 1957 г. на заседании научно-исследовательского семинара по теории вероятностей под руководством акад. А. Н. Колмогорова (МГУ). Большинство докладов сопровождается резюме или указаниями на публикацию соответствующих результатов.

Н. В. Смирнов

10071 К. Вероятность, статистика и истина. Мизес (Probability statistics and truth. 2nd rev. ed. Mises Richard von. Transl. from the Germ. London, Allen and Unwin; New York, Macmillan, 1957, xiv, 244 pp., ill., 28 sh.), Brit. Nat. Bibliogr., 1957, № 412, 12 (англ.)

10072 К. Броуновское движение. Леви (Le mouvement brownien. Lèvy Paul (Mèm. Sci. Math., № 126). Paris, Gauthier — Villars, 1954, 84 p., 1200 fr) (франц.)

В монографии в сжатой форме излагаются, иногда с набросками доказательств, главы 1, 6, 7 и 8 книги автора «Proclessus stochastiques et mouvement brownien» (Gauthier-Villars, Paris, 1948) и некоторые новые результаты, полученные главным образом с 1948 г. К последним относятся по порядку опубликования: точная форма условия Липшица (Джин, Эрдёш; еще не опубликовано); точная форма закона повторного логарифма (Петровский, Колмогоров, Феллер); нижние границы $\max x(t)$ и $\max x((t)\, x(t)$ обозначает выборочную функцию процесса) в интервале $(0, T)$ (Джун, Гирш); теория функционалов от $x(t)$ (Кац); теория стохастических дифференциальных уравнений (Р. Леви); проблема кратных точек (Дворецкий, Эрдёш, Какутани); хаусдорфова мера на кривой (Р. Леви); скорость ухода на бесконечность в пространстве размерности $\geqslant 3$

(Дворецкий, Эрдёш; доказательство этого результата не полно, но может быть доведено до конца); определение стохастического интеграла и его применение к исчислению площадей между кривыми и их хордами; характеристические функции этих площадей (Р. Леви). Последнее предложение в подстрочном примечании на стр. 78 неверно. K. L. Chung

Перевод из Math. Revs, 1955, 16, № 6, 601.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

10073. **О функциях распределения долговечности. Райский** (O duytrybuantach trwałosci. Rajski C.), Zastosow. mat., 1958, 3, № 3-4, 323—328 (польск.; рез. русск., англ.)

В теории долговечности обычно предполагается, что функция распределения долговечности является показательной. Статья посвящена поискам более обширного класса функций, которые разумным образом могли бы служить в качестве функции распределения долговечности. При очень общих предположениях получена следующая теорема:

Функция $F(x)$ является функцией распределения долговечности, если

$$\frac{1}{1-F(x)}\cdot\frac{dF(x)}{dx}$$

— функция распределения.

Далее в статье доказывается, что это условие удовлетворяется функцией распределения типа гамма-функций, определенной следующим образом:

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{если } 0\leqslant x<c\\ 1-e^{-(x-c)}\sum_{j=0}^{r}(x-c)^j/j!, & \text{если } c\leqslant x<\infty,\end{cases}$$

где r — натуральное число и $c\geqslant 0$, причем одновременные равенства $r=0$ и $c=0$ невозможны.

Резюме автора

10074. **Не полностью определенные выборки из усеченных нормальных распределений. Коэн** (Censored samples from truncated normal distributions. Cohen A. Clifford, Jr), Biometrika, 1955, 42, № 3-4, 516—519 (англ.)

В тестах на времена реакций и долговечность, которые заканчиваются еще до того, как все выборочные объекты успеют отреагировать, процедура выбора иногда требует произвести усечение на нижнем конце временной оси. Получающиеся выборки можно рассматривать как не полностью определенные выборки из усеченной совокупности. Настоящая статья ограничивается не полностью определенными выборками из усеченного нормального распределения. Она связана с более ранними работами ряда авторов (Хальд, Гупта, Коэн) на ту же тему и со статьей Эпстейна и Собеля (РЖМат, 1957, 7527) о тестах на долговечность, в которой устанавливаются некоторые преимущества не полностью определенных выборок из однопараметрического экспоненциального распределения в случае, когда необходимо сохранить время и экспериментальные объекты. На основе рассматриваемых здесь выборок выводятся оценки максимального правдоподобия для среднего значения и стандартного отклонения совокупности, а также асимптотические значения дисперсий этих оценок. Приводится иллюстративный пример.

Резюме автора

10075. **Предопределение тестовых весов. Гофман** (Predetermination of test weights. Hoffman Paul J.), Psychometrika, 1958, 23, № 1, 85—92 (англ.)

Устанавливается связь между длиной и весом теста в составном испытании. Строятся тесты различных длин таким образом, чтобы их веса были предопределенной величины, а результаты — сравнимы с математическими ожиданиями. Сравниваются схемы взвешивания, включающие стандартные отклонения грубых и точных отметок. Дается обоснование приема, с помощью которого, зная только относительную длину теста, можно оценить его надежность сокращенную форму и стандартное отклонение. Резюме автора

10076. **Задачи, связанные с многоступенчатой выборкой. Ильмо, Шварц, Весро** (Problèmes relatifs aux échantillonnages à plusieurs niveaux. Ulmo J., Schwartz D., Vessereau A.), Rev. statist. appl., 1957, 5, № 1, 57—66 (франц.)

Для случая многоступенчатого выбора с постоянным объемом выборки на одной и той же ступени рассматриваются два типа задач: 1) оценка среднего значения или дисперсии некоторого свойства объектов генеральной совокупности при заданном выборочном плане (заданных объемах выборки на каждой ступени); 2) отыскание оптимального выборочного плана, дающего наиболее точную оценку для среднего или для дисперсий на различных ступенях при заданных условиях.

Первая задача рассматривается для случая трехступенчатого, вторая — для двухступенчатого выбора. Суммарное число наблюдений на всех ступенях предполагается фиксированным. Даны некоторые рекомендации для числа ступеней, большего трех.

А. П. Хусу

10077. **Выбор неповторяемых наблюдений для оценки. Элфвинг** (Selection of nonrepeatable observations for estimation. Elfving G.), Proc. 3rd Berkeley Sympos. Math. Statistics and Probability. Vol. 1. Berkeley — Los Angeles, 1956, 69—75 (англ.)

Неизвестны величины α_j, известны u_{ij}, $1\leqslant j\leqslant k$; ξ_i некоррелированы, причем $M\xi_i=0$ и $D\xi_i=1$. Наблюдены величины $x_i=\sum_{j=1}^{k}u_{ij}\alpha_j+\xi_i$, $1\leqslant i\leqslant N$. Задача, рассматриваемая в статье, состоит в следующем: выбрать n наблюдений ($n<N$) для оценки $\sum_{j=1}^{k}c_j\alpha_j$ (c_j заданы) так, чтобы при этом дисперсия была минимальна. Практическая процедура, рекомендуемая автором, состоит в следующем: вычисляются величины $\lambda_{ih}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}u_{ij}u_{ih}\,|\,1\leqslant j,h\leqslant k)$; вычисляются g_j как решения системы $\sum_{h=1}^{k}\lambda_{jh}g_h=c_j$ $(1\leqslant j\leqslant k)$; подсчитываются величины $w_i=\sum_{j=1}^{k}g_ju_{ij}$; среди них выбираются n, для которых $|w_i|$ максимальны; их номера определяют соответствующие x_i. Б. В. Гнеденко

10078. **Унифицированный вывод некоторых хорошо известных распределений вероятностей, представляющих интерес для биометрии и статистики. Эруин** (A unified derivation of some well known frequency distributions of interest in biometry and statistics. Irwin J. O.), J. Roy. Statist. Soc., 1955, A118, № 4, 389—398; Discuss. 399—404 (англ.)

Отправляясь от комбинаторной формулы Уитворта, представляющей частный случай известного соотношения между вероятностями, относящимися к системе произвольно связанных событий $E_1\ldots E_k$, —

$$P(E_1E_2\ldots E_k)=1-\sum_{r=1}^{n}P(E_r)-$$

$$-\sum_{r<s}P(E_rE_s)-\sum_{r<s<t}P(E_rE_sE_t)+\ldots,$$

автор выводит известные распределения: 1) для частоты

совпавших пар при случайном расположении двух последовательностей, состоящих из номеров 1, 2,..., n, 2) для числа занятых классов, когда n объектов случайно размещаются в k различных классах, 3) для длины наибольшего интервала при делении отрезка данной длины на n интервалов $(n-1)$ точками, случайно расположенными на отрезке.

Рассматриваются некоторые приложения полученных результатов к теории периодограмм. Приводится дискуссия по поводу статьи. Библ. 13 назв.

Н. В. Смирнов

10079. Решение статистических задач при помощи простых чисел. Саблие (Résolution des problèmes de statistique à l'aide des nombres premiers. Sabliet S.), Automation (France), 1958, 4, № 18, 51—52 (франц.)

В статистической практике одной из наиболее трудоемких задач является определение и подсчет комбинаций наблюденных данных. Для облегчения этой задачи применяются перфорационные карты. Каждому наблюдению отводится один или несколько столбцов карты, причем веса наблюдений выражаются числами пробитых отверстий в соответствующих столбцах. В ряде случаев веса наблюдений удобнее выражать при помощи простых чисел. Благодаря применению простых чисел не только сокращается объем работы, но и создаются условия для полной автоматизации вычислений.

А. К. Митропольский

10080. О T^2-распределении Хотеллинга. Сиотани, Токэй сури кэнкюсё ихо, Proc. Inst. Statist. Math., 1956, 4, № 1, 33—42 (японск.; рез. англ.)

Хотеллинг (Hotelling H., Ann. Math. Statistics, 1947, 18, 298) рассмотрел разложение взятой по всей выборке суммы квадратов обобщенного стьюдентова отношения T^2. Каждая компонента имеет следующую форму $T^2 = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p} e^{ij}v_{ij}$, где $(e^{ij})^{-1}$ — ковариационная матрица, оцененная из предварительной выборки, например с n степенями свободы, u_{ij} — матрица, составленная из взятой по вторичной выборке суммы произведений отклонений от значений наименьшей квадратической регрессии, и v_{ij}/m — несмещенная оценка генеральной ковариации σ_{ij}, где m — число степеней свободы матрицы v_{ij}. Хотеллинг получил точное выборочное распределение статистики T^2, когда число измерений совокупности p равно 2. В статье автор рассматривает выборочное распределение величины T^2 для любого p с помощью методов Уелша (Welch B. L., Biometrika, 1947, 34, 28—35; Ann. Math. Statistics, 1947, 13, 118—122) и Джеймса (РЖМат, 1955, 4589).

Резюме автора

10081. Заметка об асимптотическом распределении отношения правдоподобия. Рой (A note on the asymptotic distribution of likelihood ratio. Roy K. P.), Calcutta Statist. Assoc. Bull., 1957, 7, № 26, 73—77 (англ.)

Дается детальное доказательство предложения, впервые сформулированного Уилксом (Wilks S. S., Ann. Math. Statistics, 1938, 9, № 60) относительно асимптотического распределения отношения правдоподобия. Пусть произведена выборка объема n из совокупности, распределенной с плотностью $f(x, \theta)$, где $\theta = (\theta_1, \theta_2.., \theta_k)$ — параметры. Нулевая гипотеза фиксирует значения $\theta_{r,0}$ первых $r < k$ параметров, оставляя остальные $k-r$ неопределенными; $t = (t_1, t_2,..., t_k)$ — оценка наибольшего правдоподобия для θ; $u = (u_{r+1}, u_{r+2} \ldots u_k)$ — оценка наибольшего правдоподобия для $\theta_{r+1},..., \theta_k$ при выполнении условий $\theta_i = \theta_{i0}$, $i = 1, 2,..., r$.

Тогда при выполнении некоторых обычных условий регулярности

$$2 \lg \lambda = \sum_{i=1}^{n} \lg \frac{f(x_i\, t)}{f\ x_i\, z)},$$

где $z = (\theta_{10},..., \theta_{r0}, u_{r+1},..., u_k)$, асимптотически следует распределению χ^2 с r степенями свободы.

Н. В. Смирнов

10082. Разложение экспериментальных векторов, связанных с мультиномиальными распределениями. Корстен (Partition of experimental vectors connected with multinomial distributions. Corsten L. C. A.), Biometrics, 1957, 13, № 4, 451—484 (англ.)

Исследование величин в таблицах сопряженности (которые не обязательно ортогональны) часто приводит к разложению экспериментального результата на компоненты, каждая из которых освещает один аспект рассматриваемой проблемы. В статье все это выражается в векторах. Такое изложение, возможно, более прозрачно, чем в других статьях по этим же вопросам (см., например, РЖМат, 1954, 2662; 1956, 3206). Более того, метод, излагаемый в статье, является более общим, так как он применим в более запутанных ситуациях. Полученные результаты приложимы к генетике, которая по существу и стимулировала это исследование. Предпосылается вводная часть о генетике.

Введение автора

10083. О приложении операционного исчисления к решению задач распределений. Банерджи (On the application of operational calculus to the solution of distribution problems. Banerjee D. P.), Bull. cl. sci. Acad. roy. Belgique, 1956, 42, № 4, 437—445 (англ.)

Метод операционного исчисления применяется для отыскания распределения отношения и произведения двух статистик. Этот метод используется в случае критерия Уилкса и других критериев, полезных в многомерной корреляции. Рассматриваются свойства бета-функции распределения с приложениями.

По резюме автора

10084. О распределении числа успехов в независимых испытаниях. Хоффдинг (On the distribution of the number of successes in independent trials. Hoeffding Wassily), Ann. Math. Statistics, 1956, 27, № 3, 713—721 (англ.)

Пусть S — число успехов в n независимых испытаниях, а p_j — вероятность успеха при j-м испытании, $j = 1, 2,..., n$ (испытания Пуассона). Для случая, когда $E(S) = np$ фиксированно, рассматривается проблема нахождения максимума и минимума математического ожидания $Eg(S)$ данной действительнозначной функции от S. Известно, что максимум дисперсии достигается при $p_1 = p_2 = \ldots = p_n = p$. Это можно понимать как указание на то, что изменчивость в числе успехов будет наибольшей, когда все успехи имеют постоянную вероятность (испытания Бернулли). Эта далее подтверждается следующими двумя теоремами, доказанными в этой статье:

Если b и c — два целых числа, $0 \leqslant b \leqslant np \leqslant c \leqslant n$, то при $b \neq 0$, $c \neq n$ вероятность $P(b \leqslant S \leqslant c)$ достигает своего минимума только и если только $p_1 = p_2 = \ldots = p$.

Если g — строго выпуклая функция, то Eg достигает своего максимума только и если только $p_1 = p_2 = \ldots = p$. Эти результаты получены с помощью двух теорем об экстремумах математического ожидания произвольной функции $g(S)$ при условии $ES = np$. Первая из них дает необходимые условия для макси-

мума и минимума $Eg(S)$; другая — частичную характеристику множества точек, в которых достигается экстремум. Следствие второй теоремы утверждает, что максимум и минимум достигаются в том случае, когда $p_1, p_2, \ldots, p_n$ принимают не более трех различных значений, только одно из которых отлично от 0 или 1. В конце указываются приложения доказанных теорем к проблемам оценки и проверки гипотез. Резюме автора

10085. Оценки выборочной дисперсии при выборе двух объектов из каждого слоя. Кейфиц (Estimates of sampling variance where two units are selected from each stratum. Keyfitz Nathan), J. Amer. Statist. Assoc., 1957, **52**, № 280, 503—510 (англ.)

В последние годы наблюдается повышенный спрос на выборочные методы, позволяющие просто вычислять средние и дисперсии. Для эффективных планов вычисление дисперсии, хотя теоретически и возможное, подчас может быть настолько сложным, что нерасполагающие временем статистики предпочитают за него не браться, и таким образом основное преимущество вероятностного выбора теряется. Практический метод для простой обработки групповых планов, хотя и с незначительной потерей эффективности, был предложен Демингом. Статья описывает другой упрощенный способ вычисления при помощи ограничения выбора двумя объектами из каждого слоя. Что касается некоторой потери эффективности, заметим, что при выборе того или иного выборочного метода нужно принимать в расчет не только эффективность, но и простоту вычисления среднего и дисперсии. По резюме автора

10086. Последовательный тест с тремя возможными решениями для сравнения двух неизвестных вероятностей, основанный на группах наблюдений. Эден (A sequential test with three possible decisions for comparing two unknown probabilities, based on groups of observations. Eeden Constance van), Rev. Inst. internat. statist., 1955, **23**, № 1—3, 20—28 (англ.; рез. франц.)

Рассматриваются две независимые серии A и A' независимых испытаний по схеме Бернулли, с вероятностями p и p' успехов в каждом испытании соответственно. На i-м этапе производится n_i, соответственно n_i', испытаний каждой серии, с числом успехов a_i и a_i' соответственно. Применяя арксинус-преобразование к величинам a_i и a_i', получают приближенно нормальные величины u, u' с центрами $\mu = 2 \arcsin \sqrt{p}$ и $\mu' = 2 \arcsin \sqrt{p'}$ и известной дисперсией. Пусть $x = u - u'$. Применяя к x последовательный опыт Собеля и Вальда с тремя возможными решениями для центра нормального распределения, автор приходит к процедуре выбора одного из трех возможных решений $p < p'$, $p > p'$ и $p \approx p'$. Н. В. Смирнов

10087. Обобщенные толерантные пределы. Кемперман (Generalized tolerance limits. Kemperman J. H. B.), Ann. Math. Statistics, 1956, **27**, № 1, 180—186 (англ.)

Обобщается введенный Фрейзером метод построения толерантных пределов. Обобщение достигается при допущении, что каждая стадия построения зависит не только от ранее образованных блоков, но и от всех известных граничных наблюдений, и, сверх того, от некоторых множеств индексов. Далее, лексикографическое упорядочение Тьюки заменяется более общим типом упорядочения. Резюме автора

10088. Выравнивание по ряду Пуассона. Жерар (Ajustements a des séries de Poisson. Gérard Jean), J. Soc. statist. Paris, 1957, **98**, № 4—6, 139—144 (франц.)

Построена номограмма для определения вероятности

$$P = 1 - \sum_{h=0}^{c-1} \frac{\alpha^h}{h!} e^{-\alpha}$$

того, что событие появится по крайней мере c раз при большом числе испытаний (в случае применимости закона Пуассона), для которых среднее число появлений события равно α. А. К. Митропольский

10089. Усечение, удовлетворяющее требованиям, предъявляемым к средним. Кларк (Truncation to meet requirements on means. Clark Frank Eugene), J. Amer. Statist. Assoc., 1957, **52**, № 280, 527—536 (англ.)

В последнее время было опубликовано несколько статей об оценке параметров совокупности по случайной выборке, извлеченной из усеченной части совокупности. В статье рассматривается обратная проблема, а именно: если параметры совокупности известны, то как усечена должна быть эта совокупность, чтобы с заданными вероятностями удовлетворять определенным требованиям, налагаемым на выбор? В частности, рассматриваются одностороннее и двухстороннее усечения нормальной совокупности, удовлетворяющие требованиям к выборочным средним. Затем предлагается обсудить проблему: какие усечения удовлетворяют определенным добавочным требованиям к выборочной дисперсии? Из введения автора

10090. О минимаксной оценке. Трыбула (O minimaksowej estymacji parametrów w rezkładzie wielomianowym. Trybuła S.), Zastosow. mat., 1958 **3**, № 3—4, 307—322 (польск.; рез. русск., англ.)

Рассмотрена задача одновременной оценки параметров $\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \ldots, \tilde{p}_k$ в полиномиальном распределении для функции убытка, являющейся линейной комбинацией с неотрицательными коэффициентами квадратов ошибок. Получен следующий результат:

Пусть X — случайная величина, принимающая значения $1, 2, \ldots, k$ с вероятностями $p_1, p_2, \ldots, p_k$, и пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — выборка из этого распределения. Пусть Y_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, обозначает число таких индексов j ($j = 1, 2, \ldots, n$), для которых $X_j = i$. Пусть функция убытка $L(f, P) = \sum_{i=1}^{k} c_i (p_i - p_i')^2$, где $c_1 \geqslant c_2 \geqslant \ldots \geqslant c_k \geqslant 0$, $c_2 \neq 0$ и $p' = (p_1', p_2', \ldots, p_k')$ является оценкой. Если $l_0 = \max_s (c_s) \neq 0$ и $L = \max_t \left(t \leqslant l_0, \sum_{j=1}^{t} \frac{1}{c_j} > \frac{t-2}{c_t} \right)$, то минимаксная оценка $\bar{P}' = (\bar{p}_1', \bar{p}_2', \ldots, \bar{p}_k')$ выражается формулой

$$p_i'(X_1, \ldots, X_n) = \begin{cases} \dfrac{Y_i + \frac{1}{2}\left(1 - (L-2)/c_i \sum_{j=1}^{L} \frac{1}{c_j}\right)\sqrt{n}}{n + \sqrt{n}} & \text{при } i \leqslant L \\ Y_i / (n + \sqrt{n}) & \text{при } i > L \end{cases}$$

Если все c_i равны нулю, то каждая оценка будет минимаксной. Если же только $c_i \neq 0$, то задача сводится к оценке параметра p в биномиальном распределении с помощью квадратной функции убытка.

Формулу для этой оценки дали Ходжес и Леманн (Hodges J. L., Lehmann E. L., Ann. Math. Statistics, 1950, 21, 182).

В статье также рассмотрены вопросы однозначности полученного минимаксного решения и обобщены исследования на случай, когда множество значений, которые может принимать случайная величина X, счетно.

Следует заметить, что полученный результат ни в чем не ограничен предположением $c_1 \geqslant c_2 \geqslant \ldots \geqslant c_k$; оно только упрощает его формулировку.

Резюме автора

10091. Проблема прогноза. Трыбула (On a problem of prognosis. Trybula S.), Bull. Acad. polon. sci., 1957, cl. 3, 5, № 9, 859—862 (англ.; рез. русск.)

Пусть X — случайная переменная, принимающая k различных значений с вероятностями $p_i = P(X = x_i)$. Производятся две независимые выборки. Обозначим через m_i частоту x_i в первой выборке, а через n_i — во второй ($i = 1, \ldots, k$).

С целью прогнозирования n_i с помощью результатов первой выборки функция $f_i(m_1, \ldots, m_k)$ принимается как оценка n_i, а $W = \sum_{i=1}^{k} (n_i - f_i)^2$ — как функция убытка.

Исходя из данных предположений, доказывается, что $f_i = \alpha m_i + \beta$, где α и β — некоторые константы, является минимаксной оценкой частоты n_i ($i = 1, \ldots, k$).

Р. Х. Дивеев

10092. Об оценке интеграла от квадрата плотности. Гутман (O estymowaniu całki kwadratu gestości. Gutman M.), Zastosow. mat., 1958, 3, № 3—4, 329—336 (польск.; рез. русск., англ.)

Штейнхаус (РЖМат, 1958, 5942) указал, что интеграл от квадрата плотности можно использовать как меру концентрации распределения и что во многих случаях, благодаря своим свойствам, этот интеграл в особенности подходит для этой цели.

Оказывается, что если: 1) случайная величина X имеет нормальное распределение с плотностью вероятности, определенной по формуле $\int_{-\infty}^{\infty} f^2(x)\,dx$; 2) среднее отклонение s равно $s = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=i}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$, где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — выборка объема n, извлеченная из нормальной генеральной совокупности, то оценка $\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{2}{n}}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}(n-1)\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}(n-2)\right)}\cdot\frac{1}{s}$ является несмещенной и асимптотически наиболее эффективной оценкой интеграла $\int_{-\infty}^{\infty} f^2(x)\,dx$.

Из доказанных в статье теорем следует, что оценка $(n-3)/ns^2$ является несмещенной оценкой квадрата точности h^2 нормального распределения.

Резюме автора

10093. О линейных оценках, определяемых непрерывной функцией веса. Юнг (On linear estimates defined by a continuous weight function. Jung J a n), Arkiv mat., 1956, 3, № 3, 199—209 (англ.)

В последние годы появилось несколько статей об оценке параметров положения и масштаба линейной функцией от порядковых статистик, т. е. оценкой вида

$$\theta^* = \sum_{i=1}^{n} h_i^{(u)} x_i,$$

где $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n$. Автор ищет $h_i^{(u)}$ в виде $\frac{1}{u}\,h\left(\frac{i}{n+1}\right)$, где $h(u)$ — непрерывная функция, зависящая только от функции распределения нормированной величины $F(y)$. Предполагается, что случайная величина, о которой идет речь, имеет непрерывную функцию плотности $f(y)$ и конечный второй момент. Автор доказывает, что если мы выберем $h(u)$ для оценки $\theta = \alpha_1\mu + \alpha_2\sigma$ (α_1 и α_2 заданы) в виде:

$$h(u) = \frac{a_1}{G'(u)}\,\frac{d^2}{du^2}\,\frac{1}{G'(u)} - \frac{a^2}{G'(u)}\,\frac{d^2}{du^2}\,\frac{G(u)}{G'(u)},$$

где $G(u) = F^{-1}(u)$ — функция, обратная $F(u)$, и a_1, a_2 определяются α_1 и α_2, то оценка асимптотически эффективна. Условия лемм, используемых для доказательства, содержат довольно строгие ограничения на $\frac{1}{G'(u)}$ и $\frac{G(u)}{G'(u)}$, хотя эти условия, как отмечено автором, не являются необходимыми. Для практических подсчетов даются преобразование и два примера.

Ö. Éltetö

10094. Проблема фонда с точки зрения статистики. Фишер (On a pooling problem from the statistical decision viewpoint. Fisher Walter D.), Econometrica, 1953, 21, 567—585 (англ.)

Рассматривается проблема разбиения k совокупностей, зависящих от параметра местоположения (на основе одного наблюдения, или выборочного среднего из каждой совокупности), на группы (стоимость каждого разбиения выражается через функцию стоимости C), внутри каждой из которых желательно, чтобы разброс средних значений совокупностей был незначительным (это отражается в функции веса w). Для этой проблемы находится предельное решение Байеса и дается пример практического приложения. J. Kiefer

Перевод из Math. Revs, 1954, 15, № 5, 452.

10095. Об оценке дисперсии на основании размаха и усеченного размаха выборки. Элтетё (A mintaterjedelem és csonkított minta-terjedelem alapján történö szórásbecslésről. Eltetö Ödön), Magyar tud. akad. Mat. kutató int. közl., 1956, 1, № 3, 391—398 (венг.; рез. русск., англ.)

Автор, резюмируя результаты, связанные с оценкой дисперсии нормально распределенной случайной величины по размаху выборки и групповым размахам выборки, изучает усеченные размахи (quasi-ranges) выборок умеренного объема ($n = 30$—100).

Продолжая исследования Кадуэлла (РЖМат, 1954, 5193), автор дает при $50 \leqslant n \leqslant 100$ показатели эффективности размахов w_2, w_3 и w_4, а также таблицу для математических ожиданий усеченных размахов выборок, извлеченных из стандартного нормального распределения.

Резюме автора

10096. О решающей процедуре, основанной на статистике Тьюки. Рамачандран, Кхатри (On a decision procedure based on the Tukey statistic. Ramachandran K. V., Khatri C. G.), Ann. Math. Statistics, 1957, 28, № 3, 802—806 (англ.)

Пусть x_{ij} ($i = 1, 2, \ldots, k$, $j = 1, 2, \ldots, n$) — k независимых выборок объема n из нормальной совокупности со средними μ_i и одинаковой, но неизвестной дисперсией σ^2. Требуется проверить гипотезу $\mathbf{D}_{00}: \mu_1 = \ldots = \mu_k$ при конкурирующих гипотезах:

$$\mathbf{D}_{ij}: \mu_i = \min_{1 \leqslant l \leqslant k} \mu_l,\ \mu_j = \max_{1 \leqslant l \leqslant k} \mu l.$$

В статье доказано, что среди всех критериев с фиксированным уровнем вероятности для ошибки первого рода α, симметричных по отношению к номерам выборок и инвариантных относительно масштаба и сдвига

величин x_{ij}, оптимальным (наиболее мощным) будет следующий: пусть

$$\bar{x}_l = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_{ij},\quad \bar{x} = \frac{1}{kn}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} x_{ij},$$

$$(nk-1)\,s_0^2 = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(x_{ij}-\bar{x})^2,$$

$$\bar{x}_i = \min_{1\leqslant l\leqslant k}\bar{x}_l,\quad \bar{x}_j = \max_{1\leqslant l\leqslant k}\bar{x}_l.$$

Тогда принимается D_{ij}, если

$$\frac{n(\bar{x}_j-\bar{x}_i)}{[(nk-1)\,s_0^2]^{1/2}} > q_\alpha,$$

и D_{00}, если

$$\frac{n(\bar{x}_j-\bar{x}_i)}{[(nk-1)s_0^2]^{1/2}} \leqslant q_\alpha.$$

Величина q_α выбирается в соответствии с данным уровнем значимости α. Для доказательства строится априорное распределение, относительно которого описанный выше критерий — байесовский. Б. А. Севастьянов

10097. Проверка статистических гипотез по малым выборкам. Петров А. А., Теория вероятностей и ее применения, 1956, 1, № 2, 248—271 (рез. англ.)

Дается метод оценки числа необходимых наблюдений для различения двух гипотез относительно типа распределения. Указаны трудности, связанные с различием двух типов распределений по малым выборкам. В введении ставится задача проверки гипотезы о типе распределения. В части 1 излагаются главные результаты общей теории и производится проверка статистических гипотез, связанных с наиболее мощным (в смысле различения гипотез) критерием.

Устанавливается приближенный метод вычисления числа наблюдений, необходимых для различения между двумя конкурирующими гипотезами. В § 2 рассматривается распределение случайного вектора η с координатами

$$\bar{y}_i = \frac{x_i-\bar{x}}{s};\ i=1,\ldots,n,\ \text{где}\ \bar{x} = \frac{1}{n}\Sigma x_i,\ s^2 = \Sigma(x_i-\bar{x})^2,\ \text{а}\ x_i$$

одинаково распределенные независимые случайные величины. Результаты § 2 дают возможность применить § 1 к проблеме различения между двумя гипотезами о типе распределения. В § 3 приводится пример, в котором проблема различения между нормальным и прямоугольным типами распределений разрешается на основе выборок объема $n = 3$, и вычисляется число необходимых наблюдений.

В § 4 и 5 излагается проблема различения между нормальным типом распределения и близким к нему типом с асимметрией и эксцессом. Устанавливается, как возрастает необходимое число наблюдений при уменьшении объема выборки. В § 6 выводится связь между числом наблюдений, необходимых для различения между двумя гипотезами по малым выборкам, и числом наблюдений, необходимых в том случае, когда все данные получены из больших выборок. Резюме автора

10098. Новые критерии для сравнения двух образцов. Реньи (Újabb kritériumok két minta osszehasonlítására. Rényi Alfréd), Magyar tud. akad. alkalm. mat. közl., 1953, 2, 243—265 (венг.; рез. русск., нем.)

Рассматривается модификация критерия Вилкокса. Процедура проверки, предлагаемая автором,— следующая. Пусть $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)$ и $(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$ — две независимые серии выборок из некоторых основных совокупностей, распределенных согласно $F(x)$ и, соответственно, $G(x)$. В качестве нулевой гипотезы принимается $F(x) \equiv G(x)$. Все $m+n$ величин располагаются в порядке их возрастающих значений, и отмечается, сколько выполняется пар неравенств из $\eta_j < \xi_i$, $\eta_k < \xi_i$, где j и k пробегают значения $1, 2, \ldots, n$, а i — значения $1, 2, \ldots, m$. Пусть полученное число обозначается знаком W_1. Подобным же образом определяется, сколько выполняется пар неравенств из $\xi_j < \eta_i$, $\xi_k < \eta i$ ($j, k = 1, 2, \ldots, m$; $i = 1, 2, \ldots, n$). Пусть их число W_2. Тогда строится выражение

$$W = \frac{W_1}{m\binom{n}{2}} + \frac{W_2}{n\binom{m}{2}}$$

и определяются границы a и b, между которыми должно находиться значение W при выполнении нулевой гипотезы и при заданном уровне значимости α. Если $a \leqslant W < b$, то нулевая гипотеза принимается, в противном случае она отклоняется.

Автор доказывает, что этот критерий является состоятельным при любых альтернативных гипотезах. S. Lászlóné

10099. Теория проверки статистических гипотез. Янко (Theorie ověřování statistickych hypotes. Janko J.), Pokroky mat., fys. a astron., 1958, 3, № 1, 9—21 (чешск.)

Излагаются основные понятия и предложения современной теории проверки статистических гипотез Неймана—Пирсона и Вальда. Н. В. Смирнов

10100. О характеристике некоторых методов определения доверительных пределов. Беннет (On the performance characteristic of certain methods of determining confidence limits. Bennett B. M.), Санкия, Indian J. Statist., 1957, 18, № 1—2, 1—12 (англ.)

На основе выборочных наблюдений над случайной величиной с двумерным нормальным распределением разыскиваются доверительные пределы для: 1) отношения двух средних двумерного нормального распределения; 2) абсциссы, соответствующей данному значению ординаты, в уравнении линейной регрессии; 3) абсциссы точки пересечения двух совокупных линий регрессий. Р. Х. Дивеев

10101. Эффект равенства отдельных значений на моментах ранговых критериев. Купер (The effect of ties on the momen of rank criteria. Cooper B. E.), Biometrika, 1957, 44, № 3—4, 526—527 (англ.)

Дэвид (РЖМат, 1958, 1399) отметил, что моменты любого критерия, основанного на рангах, могут быть получены с помощью таблиц Вишарта для выборочных формул при конечной совокупности объема N; при этом k-статистика такой совокупности совпадает с K-статистикой первых N натуральных чисел. В статье этот метод подхода используется для нахождения моментов среднего ранга выборки объема n, случайно извлеченной без возвращения из совокупности, состоящей из первых N натуральных чисел, при допущении о наличии равенств между отдельными значениями. Оценивается эффект этих равенств на дисперсию выборочных дисперсий. Резюме автора

10102. Таблица процентных точек распределения критерия Колмогорова. Миллер (Table of per-

centage points of Kolmogorov statistics. Miller Leslie H.), J. Amer. Statist. Assoc., 1956, 51, № 273, 111—121 (англ.)

Пусть $S_n(x)$ — эмпирическая функция распределения, построенная на основании выборки объема n из генеральной совокупности случайной величины x с непрерывной функцией распределения $F(x)$. Пусть

$$D_n = \max_{-\infty<x<\infty} \{S_n(x) - F(x)\};$$

$$D_n^* = \max_{-\infty<x<\infty} |S_n(x) - F(x)|$$

—критерии, используемые для проверки соответствия эмпирического распределения $S_n(x)$ теоретическому $F(x)$. Автор описывает способ нахождения процентных точек для точных распределений критериев D_n и D_n^* и приводит таблицу, содержащую процентные точки критерия D_n, отвечающие уровням вероятности $\alpha = 0{,}10$; 0,05; 0,025; 0,01; 0,005. Для двухстороннего критерия D_n^* те же значения процентных точек приближенно отвечают удвоенным уровням α. Процентные точки даны для объемов выборки $n = 1, 2, \ldots, 100$. Указывается асимптотическая формула для нахождения процентных точек на основе наблюдений за характером изменения табличных значений. Н. В. Смирнов

10103. Заметка о фундаментальной лемме Неймана — Пирсона. Судзуки (Note on the Neyman — Pearson's fundamental lemma. Suzuki Yukio), Ann. Inst. Statist. Math., Tokyo, 1955, 6, 197—211 (англ.)

Пусть $\{f_i\}$ $(i = 0, 1, \ldots)$ — последовательность плотностей вероятности в евклидовом пространстве R, γ — класс борелевских множеств S таких, что $\int_S f_i\,dx = c_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Пусть далее S_0 обозначает класс множеств $S \in \gamma$, для которых максимизируется $\int_S f_0\,dx$.

Если есть последовательность $\{k_i\}$ действительных чисел, таких, что $\sum_1^\infty k_i f_i(x)$ почти всюду конечна и $\sum_1^n k_i f_i \leqslant G(x)$ для всех x, n, где $G(x)$ — суммируемая функция, и если $S \in \gamma$ удовлетворяет условию $f_0 \geqslant \sum_1^\infty k_i f_i$ для $x \in S$ и $f_0 \leqslant \sum_1^\infty k_i f_i$ для $x \notin S$, то $x \in S_0$. При некоторых добавочных ограничениях это условие является необходимым. Полученный результат обобщает теорему Данцига и Вальда (Dantzig, Wald, Ann. Math. Statistics, 1951, 22, 87—93), для конечного множества плотностей. D. Blackwell

Перевод из Math Revs, 1956, 17, № 6, 639—640.

10104. Графики мощности F-теста. Фокс (Charts of the power of the F-test. Fox Martin), Ann. Math. Statistics, 1956, 27, № 2, 484—497 (англ.)

Получены номограммы, позволяющие определять требуемые числа степеней свободы в числителе и знаменателе известного F-теста для достижения нужной мощности теста относительно альтернативной гипотезы с данным смещением дисперсии (в числителе) и данным уровнем значимости. Н. В. Смирнов

10105. Характеристическая функция рангового коэффициента корреляции Кендалла. Йосифко (Charakteristická funkce Kendallova koeficientu korelace pořadí. Josífko Marcel), Časop. pěstov. mat., 1958, 83, № 1, 56—59 (чешск.; рез. русск., англ.)

Находится характеристическая функция случайной величины S, стоящей в числителе в выражении рангового коэффициента τ Кендалла при предположении о независимости коррелируемых величин. Находятся кумулянты и доказывается асимптотическая нормальность τ при этом предположении. Резюме автора

10106. Общее разложение корреляционных матриц на компоненты и его использование в множественной и частной регрессиях. Кригер (General resolution of correlation matrices into components and its utilization in multiple and partial regression. Creager John A.), Psychometrika, 1958, 23, № 1, 1—8 (англ.)

Получение статистик множественной и частной регрессий из факторных нагрузок, усиленных условиями единственности, которое в литературе представлено только для ортогональных факторных решений, обобщается на неортогональные решения. Без ограничений некоррелированными факторами дается математически разумная интерпретация общего случая. Использование общих результатов иллюстрируется на примере двух факторов и семи случайных величин.

Резюме автора

10107. Определение линейной регрессии методом двух точек. Хельвиг (Wyznaczanie parametrów regresji liniowej metoda dwóch punktów. Hellwig Z.), Zastosowania mat., 1956, 3, № 1, 66—81 (польск.)

Пусть $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ — n независимых реализаций двумерной случайной величины (ξ, η) и $\bar{x} = (x_1 + \ldots + x_n)/n$, $\bar{y} = (y_1 + \ldots + y_n)/n$. Обозначим через $(x_{i_1}, y_{i_1}), \ldots, (x_{i_k}, y_{i_k})$ те из пар (x_i, y_i), для которых $x_i > \bar{x}$, и пусть $\bar{x}_i = (x_{i_1} + \ldots + x_{i_k})/k$, $\bar{y}_i = (y_{i_1} + \ldots + y_{i_k})/k$. Автор предлагает использовать отношение $a_y = (\bar{y}_i - y)/(\bar{x}_i - x)$ в качестве легко вычисляемой оценки для коэффициента регрессии α_y. В предположении, что $E(\eta|\xi = u) = E\eta + \alpha_y(u - E\xi)$, доказывается, что a_y является состоятельной и несмещенной оценкой α_y. При не совсем точно сформулированном добавочном предположении, что условная дисперсия $D^2(\eta|\xi = u)$ не зависит от u, сравниваются условные дисперсии $D^2(a_y \mid x_1 = u_1, \ldots, x_n = u_n)$ и $D^2(A_y \mid x_1 = u_1, \ldots, x_n = u_n)$ и находится предел по вероятности их отношения; здесь

$$A_y = \left[\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})\right] \Big/ \left[\sum_{i=1}^m (x_i - x)^2\right].$$

Примечание референта. Доказательство теоремы 4 на стр. 74 содержит несколько ошибок и пропусков, так что эту теорему нельзя считать доказанной. Например, как утверждает автор, k/n и dx сходятся по вероятности к константам, но требуется исследовать сходимость не этих величин, а величины $\left[\sqrt{n}\left[(\bar{y}_1 - \bar{y})\frac{k}{n} - \alpha_y\right] dx/2\right]$. Далее, случайные величины $y_1, \ldots, y_n$ при условии $x_1 > \bar{x}, \ldots, x_k > \bar{x}, x_{k+1} \leqslant \bar{x}, \ldots, x_n \leqslant \bar{x}$ не являются стохастически независимыми, как утверждает автор на последних строках стр. 75. Более того, их распределение зависит от n. Поэтому не очевидно, что в обозначениях автора $H\left(\frac{t}{k}\right) \to \Phi(t)$. S. Zubrzycki

10108. Одно обобщение метода латинских квадратов и его применения. Хеппеш, Ревес (A latin négyzet és az ortogonális latin négyzet — pár fogalmának egy új általánosítása és ennek felhasználása kísérletek tervezésére. Heppes Aladár, Révész Pál), Magyar tud. akad. Mat. kutató int, közl., 1956, 1, № 3, 379—390 (венг.; рез. русск., англ.)

В математической статистике, особенно в связи с сельскохозяйственными экспериментами, часто используют схемы латинского (см., например, Mann H. B., Analysis and design of experiments, Dover, New York, 1949) и ортогонального латинского квадратов. В настоящей работе дается одно обобщение этих схем, которое особенно облегчает планирование и статистическую оценку экспериментов, зависящих от многих параметров.

Понятие латинского квадрата обобщается следующим образом: n-мерным перестановочным кубом назовем такую n-мерную кубическую матрицу, элементы которой выбираются из чисел 0, 1, 2..., $m-1$ так, что в каждом параллельном некоторому ребру куба столбце матрицы находится некоторая перестановка чисел 0, 1, 2 ... $m-1$ (в случае $n=2$ получается латинский квадрат).

Соответствующий n-мерный аналог ортогональных латинских квадратов называется вариационным множеством кубов и определяется следующим образом:

Перестановочные кубы $P_1, P_2, \ldots, P_n$ образуют вариационное множество кубов, если каждая группа, с повторением, составленная из элементов, находящихся в одинаковых местах этих кубов и расположенных согласно индексам кубов, в множестве всех таких групп встречается один и только один раз.

В теореме 2 доказывается, что если $m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_r^{\alpha_r}$, то существует $\min(p_i^{\alpha_i} - 1)$ n-мерных перестановочных кубов с «длиной» ребра m, среди которых любые n образуют вариационное множество кубов при условии, что $n \leqslant \min(p_i^{\alpha_i} - 1)$.

Во второй части работы, с помощью анализа дисперсий, вырабатывается метод проведения статистических экспериментов, запланированных по схеме вариационных кубов. Резюме автора

10109. Новые экспериментальные планы для парных наблюдений. Юден, Коннор (New experimental designs for paired observations. Youden W. J., Connor William S.), J. Res. Nat. Bur. Standards, 1954, **53**, № 3, 191—196 (англ.)

Существует много экспериментальных ситуаций, в которых наблюдения ведутся в парах. Из v сравниваемых количеств можно образовать $v(v-1)/2$ отдельных пар, так что даже для умеренного числа v сопутствующее число наблюдений может быть затрудняюще велико. Или, даже если всю работу можно проделать, точность оценок эффектов количеств и экспериментальной ошибки может быть больше, чем требуется. В обоих случаях нужно использовать подмножество пар. С целью упрощения арифметических расчетов это подмножество должно выбираться определенным образом. В статье описывается такое подмножество и проводится его подробный анализ. Резюме автора

10110. Методы построения и анализа серийно сбалансированных последовательностей. Сампфорд (Methods of construction and analysis of serially balanced sequences. Sampford M. R.), J. Roy. Statist. Soc., 1957, **B19**, № 2, 286—304 (англ.)

Описываются различные методы построения серийно сбалансированных последовательностей. Последовательности, полученные этими методами, табулированы. Рассматриваются проблемы анализа планов, основанных на таких последовательностях. Выводятся общие методы для некоторого класса планов. Резюме автора

10111. Разнородные дисперсии ошибок в экспериментах с раздробленными делянками. Керноу (Heterogeneous error variances in split — plot experiments. Curnow R. N.), Biometrika, 1957, **44**, № 3-4, 378—383 (англ.)

В экспериментах с раздробленными делянками обычно предположение, что одна и та же дисперсия ошибок применима ко всем способам обработки площадок, полученных дроблением делянок. В статье разбирается критерий значимости для отклонения от равенства между дисперсиями для различных способов обработки таких площадок и производится оценка отношения пары таких дисперсий. Используемый метод можно рассматривать как расширение методов, описанных Морганом (Morgan W. A., Biometrika, 1939, **31**, 13) и Питманом (Pitman E. J. G., Biometrika, 1938, **31**, 9), в связи с проблемой сравнения дисперсий двух коррелированных и нормально распределенных измерений. В частности, расширенный метод Питмана обеспечивает доверительные пределы для дисперсионного отношения. Предположим, что измеряется острота зрения, отдельно для правого и левого глаза, по выборке людей и что исследуется разность между дисперсиями $\sigma_п^2$ и $\sigma_л^2$ для обоих глаз. Если распределение первоначальных измерений является двумерным нормальным, то таковым же будет распределение их сумм и разностей. Морган и Питман заметили, что коэффициент корреляции в последнем распределении зависит от разности $(\sigma_п^2 - \sigma_л^2)$, обращаясь в нуль тогда и только тогда, когда $\sigma_п^2 = \sigma_л^2$. Поэтому они предложили проверять гипотезу о равенстве дисперсий стандартным критерием значимости для выборочного коэффициента корреляции. В сельскохозяйственных экспериментах с раздробленными делянками дисперсия для площадки может зависеть от способов обработки, которой она подвергается. В частности, это может случиться в том случае, когда какой-либо способ обработки площади сильно увеличивает урожай на ней. Простая процедура для проверки равенства между двумя вышеупомянутыми дисперсиями допускала бы корреляцию между площадками каждой цельной делянки. Однако из-за классификаций блоков и способов обработки эта процедура более неприменима. Более общий метод, изложенный в статье, дает возможность строить критерии значимости и вычислять доверительные пределы. Приводится пример эксперимента с раздробленными делянками и рассматриваются стандартные ошибки при сравнении различных способов обработки. Резюме автора

10112. Экспериментальные процедуры минимальной стоимости в квадратической регрессии. Гарса, Хокскерст, Ньюман (Some minimum cost experimental procedures in quadratic regression. Garza A. de la, Hawxhurst D. S., Newman L. T.), J. Amer. Statist. Assoc., 1955, **50**, № 269, 178—184 (англ.)

Процедуры минимальной стоимости для многоступенчатых экспериментов определяют количество повторений на различных стадиях таким образом, что желаемая оценка получается с заданной точностью при минимальных затратах. Статья распространяет эти процедуры на эксперименты, в которых оцениваемая характеристика y связана с контролируемой величиной x соотношением $\hat{y} = \alpha + \beta x + \gamma x^2$. Получены процедуры минимальной стоимости для оценки $\hat{y}$ по крайней мере с заданной точностью в определенных экспериментальных пределах изменения величины x. По предположению наблюдения величины $\hat{y}$ некоррелированы и имеют известные равные дисперсии и стоимости, не зависимые от x. Резюме автора

10113. Определение степени несостоятельности для множества парных сравнений. Джерард, Шапиро (Determining the degree of inconsistency in a set of paired comparisons. Gerard Harold B., Shapiro Harold N.), Psychometrika, 1958, **23**, № 1, 33—46 (англ.)

Определяется понятие состоятельности для множества парных сравнений. Определено два возможных типа несостоятельности. Выводятся вычислительные формулы для этих типов и приводятся примеры, иллюстрирующие эти формулы. Резюме авторов

10114. Дисперсионный анализ. Лехто (Variansianalyysi. Lehto Pekka), Tehostaja, 1958, 16, № 2, 36, 39—40 (финск.)

10115. Некоторые опыты по планировке экспериментов. Хасидзумэ, Токэй сури кэнкюсё ихо, Proc. Inst. Statist. Math., 1956, 4, № 2, 34—52 (японск.; рез. англ.)

Многие авторы обсуждали законность допущений, обычно делаемых в задачах планирования экспериментов. В статье такие задачи рассматриваются для некоторых специальных случаев.

При подходе к их решению наиболее часто употребляют F-тест. Существуют две альтернативы. Одна—неточное использование несмещенных оценок дисперсии генеральной совокупности вместо ее истинного значения (в виде размаха, умноженного на константу), другая — метод рандомизации с затруднительными вычислениями.

В части I обсуждается строгая теория метода размаха применительно к одному специальному случаю. В части II рассматриваются статистики Уэлша, когда число повторений не слишком велико. Резюме автора

10116. Теоретические замечания к линейному и общему факториальному анализу. Дармуа (Observations théoriques sur l'analyse factorielle, linéaire et générale. Darmois G.), Colloq. internat. du centre national de la recherche sci. Paris, 1955, 58, 295—304 (франц.)

Показывается, что задача линейного факториального анализа, т. е. нахождение законов распределения или моментов независимых случайных величин (фактоорв), линейными комбинациями которых являются k данных случайных величин, находящихся в стохастической зависимости, может допускать более одного решения лишь в случае нормального совместного распределения исходных переменных, в котором таких решений (отвечающих различным факториальным моделям) имеется, как известно, бесконечно много (отсюда следует, в частности, что линейные комбинации независимых факторов могут оказаться снова независимыми лишь в том случае, когда они нормально распределены). Поэтому обычный факториальный анализ мало пригоден для негауссовых распределений, так как в этом случае моменты искомых факторов, если последние вообще существуют, не могут находиться лишь с помощью вторых моментов данных случайных величин, ибо при этом получается бесчисленное множество решений, из которых только одно может быть подходящим. Естественно поэтому было бы отказаться в этом случае от линейности и рассматривать более общий факториальный анализ, в котором данные величины являются произвольными (а не обязательно линейными) функциями искомых независимых факторов, однако решение такой задачи представляется невероятно трудным. Автору удается ее решить лишь в некоторых очень частных случаях. М. Ф. Бокштейн

10117. Новый метод математической статистики для оценки факторов и их стандартного отклонения в факториальном анализе. Делапорт (Nouvelle méthode de statistique mathématique pour l'estimation des facteurs et de leur écart type en analyse factorielle. Delaporte P.), Colloq. internat. du centre national de la recherche sci. Paris, 1955, 58, 305—315 (франц.)

Для избежания неопределенности при нахождении независимых факторов для данного статистического материала предлагается система моделей, такая, что если случайные величины связаны согласно одной из этих моделей, то задача решается однозначно. Закон распределения данных величин предполагается k-мерным гауссовым, в противном случае производится соответствующее функциональное преобразование размеров. Как известно, в случае применимости схемы Спирмана, т. е. когда рассматриваемые величины зависят лишь от одного общего фактора и, кроме того, от своего специфического фактора для каждой из величин, должно выполняться условие $\rho_{gi}/\rho_{hi} = \text{const}$ при изменении номера i, где $\rho_{\alpha\beta}$ есть коэффициент корреляции между α-й и β-й величинами. Поэтому (с помощью специально построенных номограмм) по значениям эмпирических дисперсий находят доверительные интервалы для отношений ρ_{gi}/ρ_{hi} и смотрят, какие из них следует отбросить, чтобы остальные имели общую часть. Для неотброшенных величин задачу решают по схеме Спирмана, т. е. находят общий фактор и специфические факторы. Для отброшенных ранее величин вычисляют разности $r_{\alpha\beta} - a_\alpha a_\beta$, где $r_{\alpha\beta}$ — эмпирическая корреляция двух величин, а a_λ и a_β — их корреляция с найденным общим фактором, оцениваемая как взвешенное среднее арифметическое с наименьшим уклонением чисел $\sqrt{r_{\alpha i} r_{\alpha j} / r_{ij}}$ (соответственно для β). Теоретическое значение этих разностей для пар величин, не имеющих общего группового фактора, есть нуль, а потому, поступая аналогично тому, как при нахождении общего фактора, можно из ранее отброшенных величин выделить часть, имеющую общий групповой фактор. Для вновь отброшенных величин поступают таким же образом, пока не исчерпают все рассматриваемые величины. Для проверки метода был поставлен статистический эксперимент, в котором случайные величины, связанные согласно одной из описанных схем, определялись бросанием игральной кости. Изложенный метод правильно выделил схему зависимости между величинами и удовлетворительно оценил факторы.

В дискуссии по докладу отмечался значительный объем вычислительной работы, необходимой при применении этого метода, а также указывается тот факт, что нахождение общей части доверительных интервалов ведет к уменьшению доверительной вероятности. М. Ф. Бокштейн

10118. Введение в непараметрические обобщения анализа дисперсии и многомерного анализа. Рой, Митра (An introduction to some non-parametric generalizations of analysis of variance and multivariate analysis. Roy S. N., Mitra S. K.), Biometrika, 1956, 43, № 3—4, 361—376 (англ.)

P-мерное множество данных, упорядоченных по q-сторонней классификации, формально выглядит как $(p+q)$-значная таблица сопряженности; однако можно провести разницу между индексом «направления классификации» и «случайным индексом» в том смысле, что суммирование частот вдоль «случайного» индекса приводит к итоговым частотам, являющимся по предположению случайными величинами, а суммирование вдоль индекса «направления классификации» — к итоговым частотам по предположению фиксированным. В тех случаях, когда итоговые частоты вдоль некоторых направлений фиксированы, обычно использовался подход, основанный на условной вероятности. Авторы отказываются от этого подхода, и в зависимости от того, являются ли для всех наблюденных частот все индексы «случайными» или же только некоторые из них случайны, а другие — индексы «направления классификации»,— изложение соответственно начинается анализом или одного мультиномиального распределения, или же анализом произведения соответствующего числа различных мультиномиальных рас-

пределений. Также выдвигаемые гипотезы будут совершенно различного рода соответственно тому, имеем ли мы дело с ситуацией многомерного анализа или с ситуацией анализа дисперсии. Гипотезы, имеющие полный смысл для одной ситуации, много теряют в своей смысловой значимости для другой, и наоборот.

Поскольку подход с помощью условной вероятности полностью отвергнут, то делаются ссылки на математические теоремы, сформулированные и доказанные Крамером (1946, гл. 30), и на ряд других, им подобных, доказываемых таким же образом. В статье рассматриваются критерии, основанные только на больших выборках. По резюме авторов

10119. **Проблемы спектрального анализа временных стационарных рядов. Бартлетт** (Problèmes de l'analyse spectrale des séries temporelles stationnaires. Bartlett M. S.), Publ. Inst. Statist. Univ. Paris, 1954, **3**, 119—134 (франц.)

Обсуждается небольшая, но интересная модификация процедуры испытания спектральной плотности для стационарного процесса, предложенная Гренандером и Розенблаттом. Приводится численный пример на различение гипотез строгой периодичности против авторегрессионных гипотез. Н. В. Смирнов

10120. **Дисперсия среднего стационарного процесса. Ханнан** (The variance of the mean of a stationary process. Hannan E. J.), J. Roy. Statist. Soc., 1957, **B19**, № 2, 282—285 (англ.)

Пусть x_t, $t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ — стационарный случайный процесс с дискретным временем; известно, что дисперсия оценки $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} x_t$ среднего значения этого процесса равна

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}\sum_{-n+1}^{n-1}\left(1 - \frac{|j|}{n}\right)\rho_j,$$

где ρ_j — коэффициент корреляции между x_t и x_{t+j}, σ^2 — дисперсия x_t.

Для тех случаев, когда ρ_i и σ^2 неизвестны, Джоуетт (РЖМат, 1957, 4233) предложил брать в качестве оценки величины $\sigma_{\bar{x}}^2$ определенную статистику Q, построенную по значениям $x_1, x_2, \ldots, x_n$; за основу при построении этой статистики взято предположение, что можно подобрать такое число s_0, что при $|i| > s_0$ коэффициентами корреляции ρ_i можно пренебречь. Если записать оценку Q в некоторой специальной форме, то можно увидеть, что она содержит ненужные усложнения и что более естественной оценкой будет несколько отличающаяся от нее статистика Q'. Приводится выражение для смещения оценки Q'; при $n \to \infty$ (и фиксированном s_0) это смещение стремится к нулю.

Отмечается, что оценки Q и Q' по форме близки к сглаженной периодограмме процесса x_t; это естественно, поскольку оцениваемая величина $\sigma_{\bar{x}}^2$ близка к $n^{-1}f(0)$, где $f(0)$ — значение спектральной плотности нашего процесса (предполагаемой существующей и непрерывной) в нуле. Исходя отсюда, можно построить целый класс других оценок величины $\sigma_{\bar{x}}^2$, родственных общему классу оценок спектральной плотности $f(\lambda)$ при помощи сглаженной периодограммы, изученному Гренандером (Grenander U., Arkiv. mat., 1951, **1**, 503—531). При этом однако, нельзя пользоваться автоматически результатами, относящимися к оценкам спектральной плотности, так как эти оценки обычно строились в первую очередь для значений $\lambda \neq 0$, а при оценке $f(\lambda)$ с $\lambda \neq 0$ отклонение $x_t - \bar{x}$ от $x_t - Mx_t$ (где M — математическое ожидание) не играет большой роли; при оценке же $f(0)$ это отклонение вызывает смещение порядка $O(n^{-1})$, являющееся очень существенным. Дается общий метод построения класса оценок величины $\sigma_{\bar{x}}^2$, и в заключение для ряда из 60 выборочных значений специального марковского стационарного процесса x_t, приведенного в статье Джоуетта, указаны значения 5 различных оценок этой величины (теоретическое значение которой в данном случае нам известно) и дано качественное объяснение наблюдающихся при этом отклонений от истинного значения. А. М. Яглом

10121. **30-й конгресс Международного статистического института** (30-e Congrès de l'Institut international de statistique. Stockholm, 7—14 août 1957), J. Soc. statist. Paris, 1957, 98, № 10 12, 234—237 (франц.)

10122. **Поправка** (Correction), Чехосл. матем. ж., 1956, 6, № 3, 434 (англ.)
К РЖМат, 1957, 4244.

10123 К. **Коррелированные случайные нормальные уклонения. 3000 групп уклонений, каждое дающее 9 случайных пар с корреляциями 0,1 (0,1) 0,9, заимствованных из таблицы случайных нормальных уклонений Германа Уолда. Филлер, Льюис, Пирсон** (Correlated random normal deviates. 3,000 sets of deviates, each giving 9 random pairs with correlations 0.1 (0.1) 0.9, compiled from Herman Wold's Table of Random Normal Deviates (Tract no. XXV). Fieller E. C., Lewis T., Pearson E. S., Cambridge, Univ. Press, 1955, xv, 60 pp., 2.00 doll.) (англ.)

Дается три тысячи наблюдений случайного вектора $\mathbf{X} = (X_0, X_1 \ldots X_9)$. Распределение $\mathbf{X}$ — многомерное нормальное со средним значением 0 и ковариационной матрицей $|\sigma_{ij}|$, где $\sigma_{ii} = 1$, $\sigma_{0j} = j/10$ и $\sigma_{kj} = \frac{k_j}{100}$ для $i = 0, \ldots, 9$, $j \neq k$, $j, k = 1, \ldots, 9$. Указан метод построения таблицы. Проверки на случайность дают удовлетворительные результаты. Примеры использования отсутствуют. I. R.Savage

Перевод из Math. Revs, 1956, **17**, № 6, 638.

10124 К. **Основания статистики. Савидж** (The foundations of statistics. Savage Leonard J. John Wiley and Sons, Inc., New York; Chapman and Hall, Ltd., London, 1954, xv, 294 pp., 6.00 doll.) (англ.)

Автор излагает, как, согласно его собственным взглядам, можно обосновать общую теорию вероятностей и статистики. Эти взгляды относятся к субъективистским концепциям (в особенности к концепциям Финетти) и систематически вытекают из теории «поведения». Человек при обстоятельствах, порождающих у него неуверенность, должен решить, какой из нескольких возможных актов он совершает. Все, таким образом, вытекает из неизбежной необходимости принять какое-то решение. Для того чтобы сделать ясным развитие идей, автор там, где возможно, избегает сложных математических выкладок. Введем следующую терминологию: «мир» — система, к которой относится решение, причем состояние s этой системы случайно выбирается из множества S всех возможных состояний; «событие» — любое подмножество S; «следствие» — то, что может произойти с индивидуумом согласно принятому им решению и действительному состоянию системы; F — множество всех возможных следствий; «акт» — реализация какого-либо состояния $s \in S$ без следствия (т. е. функции $f(s)$, ставящей в соответствие каждому возможному состоянию s мира следствие $f(s) = f \in F$). Автор постулирует, что человек классифицирует все возможные акты по «порядку преферен-

ции» и что эта классификация создает в множестве актов транзитивное отношение простого порядка. Он показывает, что из этого постулата, надлежаще дополненного несколькими менее типичными предположениями, вытекает существование между событиями отношения простого порядка, называемого «качественной вероятностью», которое в определенных случаях, для которых он дает достаточные критерии, выражается единственным образом через меру вероятности (количественной вероятности) классического типа. Эти пункты разбираются в первых трех главах, причем в третьей главе, сверх того, содержатся сведения об условных вероятностях и разбираются те условия, при которых достаточно большое число повторений опыта позволяет говорить о достоверности события. В гл. IX взгляды автора подвергаются критическому сопоставлению с другими концепциями. В гл. V автор показывает, что порядок преференции между актами может быть выражен (единственно с точностью до линейного преобразования) через численную функцию $f \in F$, называемую «полезностью». Далее автор делает экскурс в историю и критику понятия полезности. Остальная часть работы содержит применение вышеизложенных понятий для исследования, критики и обзора основных проблем и методов теории игр и математической статистики. R. Fortet

Перевод из Math. Revs, 1955, **16**, № 2, 147.

ТЕОРИЯ ИГР И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЭКОНОМИКА

10125. Общая теория игр для *n* человек. Берж (Théorie générale des jeux à *n* personnes. Berge Claude. Mém. sci. math., 1957, № 138, 114 p., ill.) (франц.)

10126. Механическое устройство, решающее некоторые задачи исследования операций. Леви (Dispositif mécanique résolvant certains problèmes de recherche opérationnelle. Lévi Robert), C. r. Acad. sci., 1957, **245**, № 25, 2166—2168 (франц.)

Описывается механическая модель, пригодная для решения некоторых задач линейного программирования. С. С. Кислицын

10127. Объяснение экономических циклов нелинейной моделью с запаздывающим регулированием. Алле (Explication des cycles économiques par un modèle non linéaire à régulation retardée. Allais M.), Colloq. internat. Centre nat. rech. scient, 1955, **62**, Paris, 1956, 169—290. Discuss., 291—308 (франц.)

Попытка объяснения цикличности развития капиталистической экономики на нелинейной экономической модели. Приведена стенограмма обсуждения этой модели видными математиками и экономистами. А. А. Корбут

10128. Обобщение теории предприятия. Сиротти (Di una generalizzazione della teoria dell'impresa. Sirotti Vittorio), Econ. internaz., 1957, **10**, № 3, 450-477 (итал.; рез. англ., франц., нем., исп.)

Математическая теория фирмы в общем случае совместного производства многих продуктов обычно была основана на предположении о полной конкуренции. Теория монополии, с другой стороны, почти всегда сводилась к случаю, когда фирма производит только один продукт; даже те немногие авторы, которые устранили это ограничение, только вкратце упомянули об условиях устойчивого равновесия. В этой статье в обычных итоговых терминах производится анализ производственных планов для общего случая совместного производства; причем цены факторов производства и цены продуктов предполагаются зависимыми от количеств, приобретаемых или продаваемых фирмой. Автор сначала поясняет данные проблемы (преобразующая функция, цены факторов и продуктов) и, используя подвижность цен, находит зависимость или независимость последних от соответствующих количеств. При помощи двух крайних предположений о подвижности цен (подвижность цен равна нулю — конкуренция; подвижность цен не равна нулю — отсутствие конкуренции) автор излагает решение проблемы, т. е. условия равновесия для фирмы и условия того, чтобы это равновесие было устойчивым. Затем он рассматривает влияние изменений в состоянии цен на решение проблемы, и в заключение указывает на возможность ее дальнейшего обобщения. Резюме автора

10129. Задача о поставщике. Джейкобс (The caterer problem. Jacobs Walter), Naval Res. Logist. Quart., 1954, **1**, № 2, 154—165 (англ.)

Проблема связана с рациональным снабжением некоторого авиационного парка запасными моторами, потребность в которых удовлетворяется капитальным ремонтом различной скорости (и стоимости) моторов, изъятых из аппаратов вследствие порчи, или просто покупкой, с целью сохранения заданного уровня эксплуатации парка. Автор перефразирует эту проблему, рассматривая действия поставщика салфеток, и описывает соответствующую задачу как задачу линейного программирования. Содержание работы заключается в том, что для одного частного случая автор настолько упрощает последнюю задачу несколькими преобразованиями, что она в конце концов получает точное решение. Указывается, что употребленный метод может быть приложен и к некоторым другим проблемам линейного программирования. О. В. Шалаевский

10130. Исследование операций — орудие управления. Де-Смет (La recherche opérationnelle, outil de gestion. De Smet André), Sucrerie belge, 1957, **77**, № 2, 49—69 (франц.)

Научно-популярная статья об исследовании операций, использующая весьма простой математический аппарат. В историческом очерке автор указывает, что термин «исследование операций» появился в мае 1941 г. для обозначения деятельности группы ученых в британской армии. Отмечаются широкие возможности применения исследований операций в мирных целях, дается некоторое представление о размахе этих работ за рубежом. Описан метод Монте-Карло. Приведены примеры конкретных задач исследования операций, в частности числовой пример линейного программирования. А. А. Корбут

10131. Исследование операций и национальное планирование. Аккофф (Operations research and national planning. Ackoff Russell L.), Operat. Res., 1957, **5**, № 4, 457—468 (англ.)

Обзорная статья о состоянии, целях и перспективах применения исследования операций для народнохозяйственного планирования в Индии. Автор указывает, что Индия является первой страной, систематически применяющей исследование операций в мирных целях. Сведения об этих работах можно найти у Махаланобиса (Mahalanobis P. C., Санкия, 1955, **16**, parts 1, 2, December).

Автор делает попытку высказать довольно общие критерии эффективности различных экономических мероприятий. Указывается, что ввиду нелинейности многих реальных зависимостей аппарат линейного программирования не всегда применим к конкретным вопросам исследования операций. А. А. Корбут

10132. Схемы для решения задач линейного программирования. Кринс (Schema's ter oplossing van lineaire programmeringsproblemen. Kriens J.), Statist. neerl., 1956, **10**, № 1, 45—53 (гол.; рез. англ.)

Описание симплекс-метода.

10133. Принятие экономических решений для предотвращения наводнений. Данциг (Economic decision problems for flood prevention. Dantzig D. van), Econometrica 1956, **24**, № 3, 376—288) (англ.)

10134. Оптимизация квадратичной функции при линейных ограничениях. Марковиц (The optimization of a quadratic function subject to linear constraints. Markowitz Harry), Naval Res. Logist. Quart., 1956, **3**, № 1—2, 111—133 (англ.)

Пусть X — вектор, компоненты $X_1, \ldots, X_N$ которого удовлетворяют условиям $\Sigma a_{ij}X_j = b_i$ $(i = 1, \ldots, m_1 \leqslant m)$, $\Sigma a_{ij}X_j \geqslant b_i$ $(i = m_1 + 1, \ldots, m)$, $X_j \geqslant 0$ $(j = 1, \ldots N_1 \leqslant N)$, причем матрица $\| a_{ij} \|_{m_1}^{M}$ имеет ранг m_1. Пусть далее $R = \Sigma r_j X_j$, где r_j — случайные величины, причем $M(R) = E$ и $D(R) = V$.

Пара (E, V) называется эффективной комбинацией, если на ней достигаются минимум V при данном E и максимум E при данном V. Множество векторов X, связанных с эффективными комбинациями (E, V), называется эффективным.

В статье приводится алгорифм для нахождения эффективных элементов (множество эффективных (E, V)-комбинаций оказывается кусочно-параболичным). Вычислительная процедура, метод критической линии, требует конечного числа интераций. Подробно рассматривается только проблема минимизации, включающая квадратичную форму V, матрица которой положительно полуопределена. Некоторая адаптация метода критической линии может быть употреблена для проблемы максимизации или минимизации квадратичной формы при линейных условиях. Н. М. Митрофанова

10135. Планирование работы на складе. Монхеимус (Work schedule in a warehouse. Monheimius W.), Papers Internat. Conf. Operat. Res., Bristol, Stonebridge Press, 1957, 404—406 (англ.)

На склад, персонал которого объединен в десять независимых групп, ежедневно поступает серия заказов. Вследствие нерегулярности числа и объемов заказов склад задерживает их выполнение. Задача состоит в уменьшении времени ожидания.

В качестве основы для анализа была принята формула Кокса

$$\overline{W} = \left[\frac{r}{2(1-4)} C_s^2 - 0{,}6\ (r - 0{,}1)\ C_s \right] ar,$$

где $\bar{w}$ — среднее время ожидания, r — занятость персонала, a — интервалы между прибытиями последовательных партий заказов (в данном случае достигающие 8 час.), C_s — коэффициент вариации распределения частоты времени выполнения одной партии заказов.

Исследована также возможность уменьшения времени ожидания с помощью использования сверхурочного времени. Были просчитаны двадцать пять серий по сто дней с помощью вычислителя по способу Монте-Карло. На основании анализа сделаны практические рекомендации. О. Г. Фаянс

10136. Системы связи в шахтах. Клапем, Данн (Communications in collieries. Clapham J. C. R., Dunn H. D.), Papers Internat. Conf. Operat. Res., Bristol, Stonebridge Press, 1957, 297—312 (англ.)

Работа возникла под влиянием катастрофы в угольной шахте, имевшей человеческие жертвы, которых можно было бы избежать в случае своевременного оповещения, и касается исследования систем связи в угольных шахтах. Эти исследования базируются на детальном изучении 6 угольных шахт, выбранных из 48 шахт. И. А. Ибрагимов

10137. Линейные модели распределения в промышленности. Примеры практического применения линейного программирования в предпринимательской деятельности. Ветцель (Lineare Verteilungsmodelle in der Betriebswirtschaft — Beispiele für den praktischen Einsatz der Linearplanung in Unternehmungen. Wetzel W.), Unternehmensforschung, 1956—1957, **1**, № 2, 45—60 (нем.; рез. англ.)

Приведены примеры конкретных промышленных вопросов, приводящих к задачам транспортного типа. Описан метод нахождения первого приближения.

А. А. Корбут

10138. Заметка к одной проблеме линейного программирования. Абрам (A note on a linear programming problem. Abrham Jaromír), Чехосл. матем. ж., 1957, **7**, № 1, 124—129 (англ.; рез. русск.)

Работа содержит несколько теорем о поведении решений транспортной задачи линейного программирования. Резюме автора

10139. Пузырьки в стеклянных трубках — выбор методов производства массовой продукции. Селигман (Belletjes in glasbuizen — de keuze van de fabricagemethode van een massaproduct. Seligmann P. S.), Statist. neerl., 1956, **10**, № 1, 27—33 (гол.; рез. англ.)

Задача, сходная с известной задачей о раскрое материала.

10140. Заметка о задаче сглаживания производства Модильяни — Хона. Манн (A note on the Modigliani — Hohn production smoothing model. Manne Alan S.), Manag. Sci., 1957, **3**, № 4, 371—379 (англ.)

Модильяни и Хон рассмотрели задачу о составлении расписания (для T последовательных равных периодов времени) производства некоторого товара x так, чтобы удовлетворить заданным потребностям $s, \ldots, s_T$ в эти периоды и понести минимальные издержки (Econometricia 1955, **23**, № 1, 46—66). Они дали общее решение этой задачи и установили, что оптимальный план состоит из последовательности планов для каждого периода, причем последние совпадают с оптимальными планами для соответствующих периодов, рассматриваемых отдельно.

Автор указывает, что в предположении кусочной линейности функции издержек производства задача Модильяни—Хона может быть сведена к транспортной задаче. А. А. Корбут

10141. Метод анализа структурных взаимосвязей (анализ по схеме «затраты — выпуск»). Као-Пинна (El método de análysis de las interdependencias estructurales — «input — output analysis». Cao-Pinna Vera), An. econ., 1956, **16**, № 62, 191—280 (исп.)

Статья содержит шесть глав, четыре таблицы в приложении и список литературы (49 назв). В первой главе («Происхождение и теория метода») прослеживается развитие анализа баланса затрат производства и выпуска продукции от «экономической таблицы» Кене к работам В. В. Леонтьева. Автору, по-видимому, остался неизвестным первый практический опыт построения такого баланса Ц. С. У. СССР в 1925 г., что в свое время отметил В. В. Леонтьев (Плановое хозяйство, 1925, № 12, стр. 254).

Следующие четыре главы содержат подробное изложение метода «затраты — выпуск». В основе этого метода лежит таблица шахматного типа, в горизонтальных строках которой записывается распределение выпуска продукции каждой отрасли народного хозяйства, а в вертикальных графах — затраты каждой отрасли, необходимые для обеспечения этого выпуска. Для каждой клетки такой таблицы вычисляются «тех-

нические коэффициенты», показывающие, какое количество одного товара следует затратить для производства единицы другого (или того же самого) товара. Так как эти коэффициенты могут отражать не только фактические соотношения, но и новую технику,— анализ «затрат — выпуска» может иметь известное значение для прогноза развития отдельных отраслей народного хозяйства. Автор высказывает ряд критических замечаний об элементарном характере исходных функций (предположение о простой пропорциональности), о представлении, что домашние хозяйства «затрачивают» потребительские товары и «выпускают» рабочую силу, о попытках построить «замкнутую систему» народного хозяйства. Математический аппарат используется лишь в небольшой степени в необходимых случаях. Сообщаются сведения о построении таблиц затрат — выпуска в ряде стран. В последней главе («Одно из приложений метода для анализа потребностей итальянского импорта») рассматриваются взаимосвязи 25 секторов в матрице экономики Италии в 1953 г. Автор приходит к выводу, что полученные результаты, с оговорками относительно изменений техники и международных цен, могут быть использованы для практических прогнозов относительно будущих импортных потребностей итальянской экономики.

А. А. Конюс

10142. О методах анализа некоторых экстремальных планово-производственных задач. Канторович Л. В., Докл. АН СССР, 1957, **115**, № 3, 441—444

Рассматриваются задачи, связанные с составлением рационального плана, обеспечивающего наилучшее использование ресурсов и максимальный выпуск потребной продукции, и излагается метод анализа математических моделей для задач такого типа.

Пусть заданы способы производства $\pi_1, \ldots, \pi_n$. Ищется план производства, имеющий вид линейной комбинации заданных планов: $\sum_{s=1}^{n} p_s = \pi_s$. Требуется, чтобы план был осуществимым и оптимальным, т. е. удовлетворял условиям

$$\sum_{s=1}^{N} p_s Z^{(s)} \geqslant -Z_0, \quad \sum_{s=1}^{n} Y^{(s)} \geqslant 0,$$

$$\sum_{s=1}^{n} p_s X^{(s)} \geqslant kX_0,$$

где k имеет максимальное возможное значение. Здесь $X^s Y^s Z^s$ суть векторы, характеризующие соответственно конечную продукцию, промежуточную продукцию, производственные факторы в плане π_s. X_0, Z_0 суть заданные положительные векторы. X_0 характеризует требуемую комплектность, Z_0 — наличные производственные факторы.

Доказывается, что при некоторых естественных предположениях, что оптимальный план существует и характеризуется наличием так называемых оценок, т. е. векторов Ξ, H, Z таких, что

$$(\Xi,\ X^{(s)}) + (\mathrm{H},\ Y^{(s)}) + (\mathrm{Z},\ Z^{(s)}) \leqslant 0,$$

причем неравенство переходит в равенство для тех значений s, для которых в этом плане $p_s > 0$.

Далее рассматриваются различные обобщения, существующие способы численного нахождения оптимального плана. В частности, указывается, как рассматриваемая схема может применяться в том случае, когда план составляется для ряда последовательных моментов времени.

Данная работа обобщает результаты ряда предыдущих работ автора.

М. К. Гавурин

10143. Анализ «затраты — выпуск» для интенсивной фермы. Бесселл (An input — output analysis for intensive grassland dairy farms. Bessell J. E.), Incorp. Statist., 1958, 8, № 2, 67—87 (англ.)

В последние годы обнаружился большой интерес к функциям производства как средству интерпретации выпускаемой продукции через количество затраченных средств. Среди широко используемых функций этого рода представляет интерес логарифмическая линейная форма, которая в экономических приложениях известна под названием функции Кобба-Дугласса. Эта функция приобрела известность среди эконометриков несомненно из-за своей простоты и экономичному использованию данных при вычислении параметров. Функция имеет очень широкое применение, начиная с экономики целых областей промышленности и кончая изучением продуктивности на молочных фермах.

Первоначально исследования предпринимались без должного внимания к недостаткам метода. Это привело к изобилию критики и упреков, которые не совсем прекратились и в настоящее время. Статья представляет собою попытку суммировать основные свойства и главные пункты критики функции Кобба-Дугласса, а также представить того же рода исследование продуктивности скота на молочной ферме.

Резюме автора

10144. Письмо редактору. Салвесон (Letter to the editor. Salveson M. E.), Manag. Sci., 1956, 3, № 1, 114—115) (англ.)

Замечания автора к его статье (РЖМат, 1958, 4999).

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕТИКО-ВЕРОЯТНОСТНЫХ И СТАТИСТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ

10145. Математическое ожидание погрешности определения по методу наименьших квадратов положения засекающими направление устройствами. Харкин (The expected error of a least-squares solution of location from direction-finding equipment. Harkin B.), Austral. J. Appl. Sci., 1956, **7**, № 4, 263—272 (англ.)

Рассматривается задача инструментальной засечки снаряда. Пусть O-истинное положение снаряда, A, B, C,... — положения инструментов, $\lambda = OA$. Для простоты считается, что луч «снаряд-инструмент» — случайная прямая, параллельная своему среднему положению OA; проекция на нее O — случайный двумерный нормальный вектор с корреляционной матрицей $\begin{Vmatrix} \lambda\delta & 0 \\ 0 & \lambda\sigma \end{Vmatrix}$; для разных инструментов σ — одно и то же, а лучи статистически независимы.

Для оценивания истинного положения O берется точка P с минимальной суммой квадратов расстояний до всех наблюденных лучей. Подсчитывается соответствующая ей корреляционная матрица. Далее приводятся соображения об эллипсоидальных доверительных областях для случая двух и трех инструментов.

Примечание референта. Как замечает и сам автор, последовательное применение метода наименьших квадратов к линеаризованной схеме требует минимизации взвешенной суммы квадратов, с учетом расстояний до инструментов. Если эти расстояния не сильно различаются, то и предлагаемый способ достаточно точен.

Ю. В. Линник

10146. Распределение вероятностей ошибок в неоднородных совокупностях. Бём (Verteilung der Fehlerwahrscheinlichkeiten in ungleichartigen Kollektiven. Böhm Josef), Studia geophys. et geod., 1958, **2**, № 1, 14—30 (нем.; рез. русск.)

В теории ошибок большое значение имеет гипотеза об элементарных ошибках, которая объясняет, почему в ряде наблюдений одинаковой точности возникают ошибки разной величины. Слишком простая форма

нормального распределения ошибок предполагает постоянство условий во всем ряде измерений, что, однако, противоречит действительности. Например, при геодезических измерениях неустанно возникают различия в численности, величине и среднем значении элементарных ошибок, что в свою очередь вызывает колебание точности и колебание систематических ошибок. Вследствие этого возникает неоднородная совокупность ошибок, отличная от гауссовской.

Объяснить возникновение значительной асимметрии или эксцесса в кривой фактических частот ошибок можно с помощью гипотезы о непостоянстве параметров нормального закона при отдельных измерениях. Эта гипотеза имеет более общий характер и лучше соответствует действительности, чем прежние.

Автор исходит из более старых работ Ферреро, Шолза, Гельмерта и Иордана, хотя в своих работах они ограничились только исследованием вариации точности. Розен (Rosen K., Veröff. Finn. Geod. Inst. Helsinky, 1949, 36) также исследовал непостоянство систематической ошибки, но и он ограничился исследованием только симметрических кривых. Автор ссылается на свои ранние работы (см., например, Sbor. fak. zeměměř. inž., Pedagog. nakl, Praha, 1955) о влиянии переменных систематических ошибок на точность измерений и стремится построить свое учение на более прочной основе, а именно на выяснении того, как вариации точности и средней величины влияют на величину первых 4 моментов.

На основе этого он выбирает параметры и приходит к аналитическим формулам распределения частот в неоднородной совокупности.

Значения параметров автор определяет из условия, что уравнение должно точно отвечать действительным значениям первых 4 моментов; с их помощью он производит необходимый сдвиг и асимметрическую и эксцитативную деформацию кривой Гаусса, чтобы новая кривая лучше отразила фактическое распределение частот.

Далее автор интегрирует выражение для распределения частот и составляет таблицы для построения кривой частот и определения ожидаемого количества ошибок в интервалах. При решении численных примеров получается существенное улучшение согласия между теорией и действительностью в области больших ошибок в сравнении со старым классическим нормальным распределением.

Также вводится новое истолкование средней (квадратической) ошибки и доказывается факт образования мнимой совокупности Гаусса даже в неоднородной совокупности при нормальном распределении частот систематических влияний. Резюме автора

10147. Критерий «минимум момента квадрата ошибки» для работы сервомеханизмов. Уэстколт (The minimum-moment-of-errorsquared criterion: a new performance criterion for servo mechanisms. Westcott J. H.), Proc. Instr. Electr. Engers, 1954, 101, Part 2, 471—480 (англ.)

Даются стандартные интегральные формулы и описывается техника применения нового критерия действия сервомеханизмов, основанного на минимизации временного момента квадратической ошибки системы в ответ на заданный сигнал. В примерах на использование этого критерия описываются новые графические методы анализа сервомеханизмов. Резюме автора

10148. Статистический анализ и его приложение в текстильной промышленности. Брени (L'analyse statistique et son application au textile. Breny H.), Ind. text., 1956, № 835, 413—420

Начальная статья серии последующих публикаций по приложениям математико-статистических методов к текстильному делу. Дается сжатое, но четкое приложение основ теории вероятностей (поле событий, вероятностная мера, случайные величины и их распределения). Н. В. Смирнов

10149. Применение закона Пуассона теории вероятностей. Бейер (Eine Anwendung des Poissonschen Gesetzes der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Beyer Otfried), Wiss. Z. Hochschule Schwermaschinenbau Magdeburg, 1957, 1, № 2, 81—83 (нем.)

Приводится обычный вывод формул Пуассона и Эрланга и дается пример их использования для определения необходимого числа резервных станков для обеспечения бесперебойности работы предприятия. Н. В. Смирнов

10150. Об изучении отношений между слабо зависимыми случайными переменными. Ами (Contribution à l'étude des relations entre variables aléatoires faiblement liées. Amy Lucien), J. Soc. statist. Paris, 1957, 98, № 7-9, 161—178 (франц.)

Применение методов корреляционного анализа к изучению горючести материалов. А. К. Митропольский

10151. Статистический аспект измерений зерен металла. Базен (Aspect statistique des mesures de grain. Bazin A. H.), Rev. statist. appl., 1957, 5, № 2, 45—75 (франц.)

Проблема заключается в изучении однородности зерен металла: 1) Определение «однородного зерна», 2) Определение критерия однородности, позволяющего решить, представляет ли данная металлургическая выборка однородное зерно или неоднородное.

Настоящее исследование ограничено чистыми металлами и сплавами в твердых растворах (т. е. однофазовыми веществами), полностью рекристаллизованных после сварки при достаточно низкой температуре для разрушения литейной структуры. Изучение ведется главным образом по цветным тяжелым металлам (медь и латунь), но некоторые аналогичные исследования, проведенные по алюминию и мягкой стали другими авторами, заставляют думать, что обобщение на все эти металлы может быть сделано без затруднений. Резюме автора

10152. Возможности использования методов математической статистики на обогатительных фабриках. Стоев (Възможности за използуване методите на математичната статистика при обогатителните фабрики. Стоев Ст.), Техника (Бълг.), 1958, 7, № 1, 23—26 (болг.)

10153. Статистическое изучение разграничения сортов обогащаемой руды. Суганами Сабуро, Хинсицу канри, Statist. Quality Control, 1957, 8, № 12, 894—898 (японск.)

10154. Определение среднего, дисперсии и максимального значения генеральной совокупности по замеренным данным величин связей *N* рамок (для телефонного кабеля). Маэно Сумио, Хинсицу канри, Statist. Quality Control, 1957, 8, № 12, 921—924 (японск.)

10155. Стохастический анализ величин, характеризующих механические свойства стальных плит. Фудзита Харухико, Хинсицу канри, Statist. Quality Control, 1957, 8, № 12, 880—882 (японск.)

10156. Об ошибках измерений в сборочной схеме головки швейной машины. Хорасава Хироо, Хинсицу канри, Statist. Quality Control, 1957, 8, № 12, 903—907 (японск.)

10157. Применение статистического метода для анализа условий работы склерометра при измерении твердости стали по Виккерсу. Тагая Масаёси, Сояма Иосио, Хинсицу канри, Statist. Quality Control, 1957, 8, № 12, 877—880 (японск.)

10158. О выборочном контроле продукции на агломерационных предприятиях. Симомура Ясу-

то, **Окано Хисао**, Хинсицу канри, Statist. Quality Control, 1957, 8, № 12, 863—866 (японск.)

10159. О коэффициенте корреляции генеральной совокупности. Катаяма Тадааки, Хинсицу канри, Statist. Quality Control, 1957, 8, № 12, 915—917 (японск.)

10160. Определение оптимальной периодичности контроля. Вейвекате (Bepaling van het optimale controle-interval. Wijvekate M. L.), Statist. neerl., 1956, 10, № 1, 55—63 (гол.; рез. англ.)

Задача, связанная с автоматизированным производством. Результаты приложимы к химическим процессам, контролю качества продукции и т. д.

По резюме автора

10161. Измерение флюктуации функции. Гарсайд (The measurement of function fluctuation. Garside R. F.), Psychometrika, 1958, **23**, № 1, 75—83 (англ.)

Предлагается метод измерения флюктуации функции и указывается подходящий критерий значимости. Предлагаемый метод сравнивается с бифакторным анализом и с некоторыми другими методами измерения флюктуации функции. Резюме автора

10162. Прибор для мгновенного корреляционного преобразования функций. Самойлов А. И., Сб. Ленингр. ин-та инж. ж.-д. трансп. 1958, вып. 158, 352—367

Описывается прибор, измеряющий корреляционную функцию случайного процесса, подаваемого на его вход. Математические рассуждения содержат ряд неточностей. Б. С. Цыбаков

10163. Обобщение метода решения интегрального уравнения, возникающего при отыскании зависящих от времени оптимальных линейных систем с нестационарными функциями на входе. Шинброт (A generalization of a method for the solution of the integral equation arising in optimization of time-varying linear systems with nonstationary inputs. Shinbrot Marvin), IRE Trans. Infrom. Theory, 1957, 3, № 4, 220—224 (англ.)

Пусть $u_i(t)$ — случайный процесс (вообще говоря, нестационарный) с корреляционной функцией $Mu_i(t)u_i(\tau) = \varphi_{ii}(t, \tau)$; $u_\mu(t)$ — другой процесс, корреляционно связанный с первым, причем $Mu_\mu(t)u_i(\tau) = \varphi_{\mu_i}(t, \tau)$ (средние значения обоих процессов считаем равными нулю). Известно (см., например, Booton R. C., Proc. IRE, 1952. **40**, № 8, 977 — 981), что если формально искать наилучшее (в смысле метода наименьших квадратов) приближение к $u_\mu(t)$ вида $\tilde{u}_\mu(t) = \int_0^t g(t, \tau)u_i(\tau)d\tau$, то для $g(t,\tau)$ получается интегральное уравнение вида

$$\varphi_{\mu_i}(t, \tau) = \int_0^t g(t, \sigma)\varphi_{ii}(\tau, \sigma)d\sigma, \quad 0 \leqslant \tau \leqslant t; \qquad (1)$$

решение этого уравнения еще осложняется тем что $g(t, \sigma)$ вполне может оказаться обобщенной функцией и, в частности, может иметь особенности типа δ-функции и ее производных.

Дается метод решения интегрального уравнения (1) для случая, когда функции $\varphi_{ii}(t, \tau)$ и $\varphi_{\mu i}(t, \tau)$ при $t \geqslant \tau$ представимы в виде

$$\varphi_{ii}(t, \tau) = \sum_{k=1}^{p} a_k(t)b_k(t), \qquad (2)$$

$$\varphi_{\mu i}(t, \tau) = \sum_{k=1}^{p} c_k(t)b_k(\tau) \qquad (3)$$

(ср. РЖМат, 1958, 6960; Nat. Advis. Com. Aeronautics, Techn. Note № 3791, 1956, где, наряду с этим, на $\varphi_{ii}(t, \tau)$ и $\varphi_{\mu i}(t, \tau)$ накладывалось еще одно условие более искусственного характера; отметим, что использование в (2) и (3) одних и тех же функций $b_k(\tau)$ не является добавочным ограничением, так как часть функций $a_k(t)$ и $c_k(t)$ можно считать равными нулю). Метод заключается в том, что решение $g(t, \tau)$ с самого начала ищется в виде

$$g(t, \tau) = \sum\nolimits_k g_k(t)\gamma_k(\tau)\cdot u(t-\tau) + h(t)\cdot\delta(t-\tau),$$

где $g_k(t)$ и $\gamma_k(\tau)$ — некоторые функции одного переменного (может быть типа δ-функции или производных δ-функций), $h(t)$ — обычная функция от t, $\delta(t)$ — δ-функция Дирака и $u(t)$ — функция единичного скачка (т. е. $u(t) = 0$ при $t < 0$ и $u(t) = 1$ при $t > 0$). При этом для функций $\gamma_k(\tau)$ удается получить систему линейных дифференциальных уравнений, а функции $g_k(t)$ и $h(t)$, после того как $\gamma_k(\tau)$ найдены, определяются из системы алгебраических линейных уравнений. В качестве примера подробно разобран случай, когда $\varphi_{ii}(t, \tau) = \alpha^2 t\tau + \lambda e^{-\beta|t-\tau|}$ и $\varphi_{\mu i}(t, \tau) = \lambda e^{-\beta|t-\tau|}$; здесь соответствующие дифференциальные уравнения явно решаются, и может быть выписан изящный окончательный ответ. Отметим только, что для рассмотренного конкретного примера решение хорошо известно; оно может быть найдено и при помощи целого ряда имевшихся ранее методов. А. М. Яглом

10164. Проблемы, связанные со случайным входом. Колс (Problems of random inputs. Coales J. F.), Process Control and Automat., 1958, **5**, № 4, 164—168 (англ.)

Краткий обзор основных задач теории автоматического регулирования в случае, когда на вход устройства поступают сигнал и аддитивный шум. Отдельно освещены проблема линейной и нелинейной фильтрации и вопросы, связанные с гауссовским и негауссовским шумом. Б. С. Цыбаков

10165. О выборе оптимальных параметров линейных динамических систем. Кухтенко В. И., Тр. Моск. авиац. ин-та, 1957, вып. 84, 30—32

Рассматривается задача об определении импульсной переходной функции $k(t)$ или (что равносильно этому) передаточной функции $W(p)$ линейной системы, такой, что если на вход системы подать функцию $m(t) + g(t)$, где $m(t)$ — стационарный случайный процесс с известным спектром, а $g(t)$ — заданная (не случайная) функция времени, то функция на выходе будет представлять из себя сумму той же самой функции $g(t)$ и стационарного процесса $x_m(t)$, средний квадрат отклонения которого от $h(t) = Hm(t)$ (где H — заданный линейный оператор) — наименьший возможный. Указывается, что условие неискажаемости такой системой функции $g(t)$ может быть записано в силу результатов С. П. Стрелкова (Автоматика и телемеханика, 1948, 9, № 3, 233—244) в виде конечного числа условий, налагаемых на $W(p)$, после чего поставленная задача легко сводится к изопериметрической вариационной задаче. Указывается конкретный пример (решение которого известно: см. Zadeh L. A., Ragazzini, Z. Appl. Phys., 1950, 21, № 7, 645—655), близкий к поставленной задаче (но не совпадающий с ней точно; в этом примере требуется, чтобы функция $g(t)$ преобразовывалась системой в $g(t + T)$, а не сохранялась неизменной). А. М. Яглом

10166. Синтез оптимальных экстраполяционных устройств на основе временных соотношений. Стиг (A time domain synthesis for optimum extrapolators. Steeg Carl W., Jr), IRE Trans. Automat, Control, 1957, № 3, 32—41 (англ.)

Рассматриваются нестационарные случайные процессы вида $x_I(t) = x_S(t) + x_N(t)$, где $x_S(t)$ и $x_N(t)$ («сигнал» и «шум») некоррелированы между собой. Ставится задача об отыскании функций (может быть, обобщенных) $g(t, t_1)$ и $h(t, t_1)$ таких, что $x_R(t) = \int_{-\infty}^{t} g(t, t_1) x_I(t_1) dt_1$ является наилучшим (в смысле метода наименьших квадратов) линейным относительно $x_I(t_1)$ $(-\infty < t_1 < t)$ приближением к величине $x_S(t)$, а $x_{RP}(t) = \int_{-\infty}^{t} h(t, t_1) x_I(t_1) dt_1$ — наилучшим приближением к $x_S(t+\alpha)$, $\alpha > 0$. При этом $x_R(t)$ называется «отфильтрованным сигналом», а $x_{RP}(t)$ — «экстраполированным сигналом» (фактически во втором случае речь идет о фильтрации, соединенной с экстраполяцией); функции $g(t, t_1)$ и $h(t, t_1)$ — импульсные переходные функции оптимального линейного фильтра и, соответственно, оптимального линейного экстраполятора.

Решение задачи излагается без привлечения преобразований Фурье (т. е. исходя из анализа лишь временных, но не частотных соотношений). Следуя Боде и Шеннону (Bode H. W., Shannon C. E., Proc. I. R. E., 1950, 38, № 4, 417 — 425), $x_R(t)$ представляется в виде $x_R(t) = \int_{-\infty}^{t} y(t, t_1) x_E(t_1) dt_1$, где $x_E(t_1) = x_I(t)_1 - x_R(t_1)$; при этом для функции $y(t, t_1)$ получается несложное интегральное уравнение, которое в важном случае, когда $x_N(t)$ — «белый шум» с постоянной спектральной плотностью α, сводится к соотношению

$$y(t, t_1) = \frac{1}{\pi\alpha} \gamma_{ss}(t, t_1),$$

(где $\gamma_{ss}(t, t_1)$ — корреляционная функция сигнала $x_S(t)$), сразу однозначно определяющему эту функцию. Доказывается, в том же предположении, что шум $x_N(t)$ является «белым», что решение $x_{RP}(t)$ задачи по оптимальной экстраполяции на время α вперед дается равенством

$$x_{RP}(t) = \int_{-\infty}^{t} y(t+\alpha, t_1) x_E(t) dt_1,$$

где $y(t, t_1)$ и $x_E(t_1)$ — величины, входящие в решение задачи об оптимальной фильтрации; таким образом в случае «белого шума», зная решение последней задачи, мы сразу можем выписать и решение задачи об оптимальной экстраполяции (точнее говоря — о фильтрации с упреждением).

Основную часть статьи занимает изложение прямого метода построения решения $x_{RP}(t)$ для случая, когда сигнал $x_S(t)$ и шум $x_N(t)$ представляют собой решения некоторых линейных дифференциальных уравнений с, вообще говоря, переменными коэффициентами, в правой части которых стоит «белый шум». В терминах функции $y(t, t_1)$ это означает, что указанная функция является функцией Грина какого-то дифференциального уравнения. В этой связи много места уделяется изложению некоторых частично известных математических фактов общей теории линейных дифференциальных уравнений. Наряду с этом обсуждается физический смысл операций, осуществляемых фильтром или экстраполятором, т. е. вопрос о практическом синтезе соответствующих устройств. В заключение рассмотрен конкретный пример, в котором $x_S(t)$ является решением дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами, в правой части которого стоит «белый шум», т. е., иначе говоря, является стационарным случайным процессом с рациональной спектральной плотностью; найденное выражение для $x_{RP}(t)$ совпадает с тем, которое может быть получено с помощью обычного метода (см., например, Яглом А. М., Успехи матем. наук, 1952, 7, № 5 (51), 3 — 168). А. М. Яглом

10167. Полностью доступная группа линий с произвольным распределением промежутков времени между вызовами и экспоненциальным распределением времени разговора. Коэн (The full availability group of trunks with an arbitrary distribution of the inter-arrival times and a negative exponential bolding time distribution. Cohen J. W.), Simon Stevin, 1957, 31, № 4, 169—181 (англ.)

Рассматривается группа из n телефонных линий. Промежутки времени между поступлениями вызовов независимы и одинаково распределены по произвольному закону $A(\tau)$. Время продолжительности разговора распределено по закону $B(\nu) = 1 - e^{-\nu}$. Любая свободная линия может быть занята поступающим вызовом (полностью доступная группа линий). Если в момент поступления вызова все линии заняты, то вызов теряется. Найдено стационарное распределение $\{P_j\}$ числа занятых линий к моменту поступления вызова, а также $\lim_{n\to\infty} P_j$. Распределение $\{P_j\}$ совпадает с распределением $\{Q_j\}$ числа занятых линий в момент t и дается формулой Эрланга с параметром.

Далее рассматривается группа $n + m$ линий ($m \leqslant \infty$). Если первые n линий заняты, то «избыточные» вызовы поступают на одну из m линий. Изучается распределение числа «избыточных» вызовов. М. Фортус

10168. Недвоичные коды исправления ошибок. Ульрих (Non-binary error correction codes. Ulrich Werner), Bell System Techn. J., 1957, 36, № 6, 1341—1388 (англ.)

Если канал с шумом используется для передачи более чем двух различных сигналов, то для того чтобы случайные ошибки корректировались, информация иногда должна быть закодирована особым образом. Если используется импульсно-амплитудная модуляция, то наиболее вероятная ошибка незначительна, например: 6 изменяется на 5 или 7. Строятся коды для 1) корректировки единичных малых ошибок, 2) для корректировки единичных малых ошибок и обнаружения двойных малых ошибок в передачах произвольной длины для произвольного числа различных сигналов в канале. В более специализированных случаях ошибка не обязательно ограничена малыми значениями. Строятся коды для корректировки любой единичной неограниченной ошибки в передаче произвольной длины и для произвольного числа различных сигналов. Наконец, описывается множество кодов, частично основанных на кодах Рида-Мюллера для корректировки числа ошибок в более ограниченном классе длин передач для произвольного числа различных сигналов. Описанные коды легко осуществимы. Используется много приемов, имеющих аналоги в двоичной системе. Другие приемы во многих своих частях или аналогичны двоичному коду или же являются его особыми адаптациями. Резюме автора

10169. Сингулярные входящие потоки вызовов. Зитек (Singulární vstupní proudy. Zítek František), Časop. pěstov. mat., 1958, 83, № 1, 41—55 (чешск.; рез. русск., франц.)

Первый параграф служит введением (большинство определений и обозначений). Затем (§§ 2—6) изучаются сингулярные входящие потоки вызовов.

Во второй части (§§ 7—9) введено понятие сингулярных аппроксимаций регулярных потоков. Если $x(t)$ — финитный регулярный поток, то последовательность $\{x^{(r)}(t)\}_{r=0}^{\infty}$ сингулярных потоков $x^{(r)}(t) = x\left(\frac{[2^r t]}{2^r}\right)$

называется последовательностью p-аппроксимаций потока $x(t)$. Изучаются некоторые свойства p-аппроксимаций, и после этого в § 8 исследуется B-аппроксимация (последовательность сингулярных потоков, сходящаяся к $x(t)$ в смысле Бернулли).

В последнем параграфе установленные результаты используются в одном простом примере из теории обслуживания. Метод аппроксимаций дает те же результаты, что и прямой метод для непрерывного случая.

Резюме автора

10170. Сводка полезных формул в теории очередей. Саати (Résumé of useful formulas in queuing theory. Saaty Thomas L.), Operat. Res., 1957, 5, № 2, 161—200 (англ.)

Дан обзор основных результатов теории очередей для лиц, занимающихся исследованием операций. После краткого исторического очерки и объяснения основных понятий и обозначений перечислены основные схемы моделей, встречающихся при расчете очередей. В конце помещен краткий перечень областей применения теории очередей. Библ. 68 назв.

Б. А. Севастьянов

10171. Обзор задач теории очередей, встречающихся в теории телефонной и телеграфной связи. Коэн (A survey of queueing problems occurring in telephone and telegraph traffic theory. Cohen J. W.), Papers Internat. Conf. Operat. Res., Bristol, Stonebridge Press, 1957, 137—145 (англ.)

Дается краткая характеристика различных вопросов в теории очередей, освещенных в обширной литературе, указанной в библиографии (34 назв.). О. Г. Фаянс

10172. О вычислении вероятностей координат по методу Гиббса. Магалинский В. Б., Терлецкий Я. П., Ж. эксперим. и теор. физ., 1958, 34, № 3, 729—734 (рез. англ.)

Статистический метод Гиббса используется для вывода общих формул, позволяющих полностью определить как стационарную плотность вероятности, так и плотность вероятности перехода в нестационарном процессе для произвольной обобщенной координаты, если известно поведение ее среднего значения при наличии (или включении) дополнительных постоянных сил, действующих в направлении этой координаты.

Резюме автора

10173. Бесконечные модели в физике. Улам (Infinite models in physics. Ulam S. M.), Appl. Probability. New York-Toronto-London, McGraw-Hill Book Co., 1957, 87—95 (англ.)

В обзорном стиле излагаются две нестандартные теоретико-вероятностные модели, имеющие физическую интерпретацию. В первой части статьи предполагается, что в евклидовом пространстве R^k случайным образом разбросаны точечные массы, которые движутся в соответствии с законами ньютоновой механики. При столкновении они сливаются, причем масса и скорость новой частицы определяются законами сохранения массы и момента. Обсуждается асимтотическое поведение системы частиц. Указывается, что для $K = 1$ проводилось экспериментальное изучение методом Монте-Карло на вычислительных машинах, и кратко описываются результаты этого изучения.

Во второй части рассматривается следующая ситуация. Вначале точка с массой единица расположена в центре интервала [0,1]. Затем эта масса может с вероятностью P_1 остаться неизменной в первоначальном положении, а с вероятностью $P_2 = 1 - P_1$ разделиться на две равные массы, расположенные в точках $^1/_2$ и $^3/_4$. Если произошло второе, то каждая из двух масс может (независимо одна от другой) или разделиться на две массы, расположенные в точках $^1/_8$ и $^3/_8$ для первой массы ($^5/_8$ и $^7/_7$ — для второй) или остаться неизменной. Этот процесс продолжается безгранично. Если $P_2 < 1$, то замыкание полученного множества точек будет с вероятностью 1 нигде не плотным множеством канторова типа.

Указываются многомерные обобщения и ставится вопрос о топологических свойствах получающегося случайного континуума. Ставится вопрос о распределении момента инерции и гравитационной энергии получаемой системы точек. Обсуждаются результаты экспериментального анализа модели на вычислительной машине.

Р. Л. Добрушин

10174. О некоторых проблемах, связанных с замедлением нейтронов. Пал (A neutronok lelassitásának néhány kérdéséről. Pál Lénárd), Magyar tud. akad. Mat. kutato int. közl., 1956, **1**, № 1-2, 41—54 (венг.; рез. русск., англ.)

С помощью вероятностных методов исследуется процесс замедления нейтронов и выводятся более точные выражения для плотности столкновения и вероятности избежать резонансный захват.

Пусть $P_n(u)\,du$ — вероятность того, что летаргия нейтрона u будет в интервале $(u, u + du)$ после n столкновений, $r_i(u)$ — вероятность нейтрону не быть захваченным при столкновении с j-м ядром; $\omega(u)du$ — вероятность того, что после столкновения летаргия нейтрона возрастает на величину, лежащую в интервале $(u, u + du)$, тогда при некоторых ограничительных условиях, наложенных на среду,

$$P_n(u) = \int_0^{u'} P_{u-1}(u') \sum_{i=1}^{n} r_i(u')\omega_i(u - u')du'.$$

Находятся точное и приближенное выражения для $P_n(u)$. Далее вводится плотность столкновения $f(u) = \sum_{n=1}^{k} P_n(u)$ и устанавливается соотношение между $f(u)$ и вероятностью «резонансного захвата» $p(u)$

$$\frac{dp(u)}{du} = -\left[1 - \sum_{i=1}^{k} r_i(u)\right] f(u).$$

Характер функции плотности столкновений для больших значений летаргии имеет важное значение для целого ряда вопросов. С помощью некоторых теорем Таубера и Абеля определяется асимптотическое поведение плотности столкновения в разных случаях. В случае однородной неноглощающей среды найдено точное выражение для $f(u)$

$$v_n(u) = \int_0^{u} \{P_n(Pu') - P_{n+1}(u')\}du'$$

— вероятность того, что в интервале летаргии $(0, u)$ происходит n столкновений.

В простых случаях, на основе выражения для $v_n(u)$, вводя производную функцию, можно легко получить среднее значение и дисперсию числа столкновений в интервале $(0, u)$ для больших u.

По резюме автора

10175. Новый вывод закона Максвелла о распределении скоростей. Реньи (A new deduction of Maxwell's law of velocity distribution. Rényi A.), Изв. Матем. ин-т. Бълг. АН, 1957, **2**, № 2, 45—55 (англ.; рез. болг., русск.)

§ 1 работы содержит краткий обзор предложенной автором аксиоматики теории вероятностей, подробно изложенной в РЖМат, 1958, 4859. В § 2 эта теория применяется при новом простом выводе закона Максвелла о распределении скоростей. Точнее говоря, доказывается следующая

Теорема. Допустим, что дано N частиц некоторого идеального газа. Если компоненты скоростей

каждой из этих частиц независимы друг от друга, если они не зависят от компонент скорости остальных частиц, а также если эти случайные величины априори распределены регулярно-равномерно, то апостериорное распределение компонент скорости каждой частицы (при условии, что кинетическая энергия всей системы задана) для больших N асимптотически приближаются к распределению Максвелла. Резюме автора

10176. Оптимальное поле археологических исследований. Кухарчик, Щепановский (Optymalne poletko poszukiwiń archeologicznuch. Kucharczyk S., Szczepanowski H.), Zastosow. mat., 1957, 3, № 2, 154—163 (польск.)

При археологических исследованиях среди прочего материала регистрируется число объектов, найденных в квадрате со стороной a, расположенном в слое фиксированной толщины. Из проверки гипотезы о случайном распределении обьектов в таких квадратах можно сделать некоторые археологические заключения. Цель настоящей статьи — определить a таким образом, чтобы некоторые индексы, зависящие от a и характеризующие недостаток случайности, были достаточно велики. Рассматриваются два индекса, один,— основанный на свойствах распределения Пуассона, другой,— на свойствах дисперсий внутри классов и между классами квадратов. Используя этот метод, автор для определенного конкретного случая нашел, что оптимальный размер квадрата равен 2×2 м². J. Oderfeld

10177. Методы вычисления объема подроста на экспериментальных лесокультурных площадках. Эраль, Абади (Méthode de calcul du volume des peuplements sur pied dans les places d'essais de sylviculture: I. Définition et présentation. Ayral P. II. Etudes mathématiques et statistiques. Abadie J.), Ann. École nat. eaux et forêts et Stat. rech. et expér., 1956, 15, № 1, 1—135 (франц.; рез. англ., нем.)

Составление тарифных таблиц требует возможно более точного определения объема деревьев для каждой ступени толщины. Такая задача была решена при помощи выборочного исследования подроста на лесокультурных площадках. Для избежания систематических ошибок была применена групповая случайная выборка. Общая совокупность деревьев была разбита на группы, однородные по месту произрастания, ходу роста и качеству стволов. Из каждой ступени толщины в таких группах брались наудачу деревья пропорционально числу стволов в группе. В составленной таким образом частичной совокупности все деревья были перенумерованы, после чего каждое дерево было тщательно измерено.

При исследовании зависимости объема дерева от других таксационных признаков были рассмотрены различные виды уравнений. Из этих уравнений наиболее точно выражающим исследуемую зависимость оказалось следующее:

$$V = a + bc^2,$$

где V — объем дерева, c — окружность дерева на высоте груди. Постоянные a и b определялись по способу наименьших квадратов, причем основная ошибка не выходила из пределов от 1 до 2%. При помощи найденных постоянных вычислялся объем подроста из N деревьев по формуле

$$V = Na + b\Sigma n_i c_i^2.$$

А. К. Митропольский

10178. Бонитет и вид древостоев. Баттек, Перкаль (Bonitacja i wysmukłość drzewostanów. Batek J., Perkal J.), Zastosow. mat., 1958, 3, № 3—4, 285-306 (польск.; рез. русск., англ.)

Стать является продолжением другой статьи авторов (Sylwan, 1955, 99, № 1, 12—31). По средним диаметрам на высоте груди, высоте и возрасту деревьев в древостое объективно определяются с помощью номограммы два новых признака древостоя: бонитет и вид.

Из статистической совокупности возрастов (числа слоев в разрезе пня) деревьев в экспериментальном древостое в Рогове (Польша), приведенной в табл. 1, видно, что определение возраста древостоя с точностью до одного года нерентабельно. Более рентабельна группировка древостоев на 10-летние возрастные классы. Исходным материалом были данные, относящиеся к 149 древостоям, разбросанным по всей Польше. В табл. 2 приводится распределение этих древостоев по возрастным классам и лесному бонитету; в табл. 3 внесены диаметры на высоте груди, высоты и возраста деревьев, принадлежащих к одной выборке; табл. 4 содержит исходные данные о 148 деревьях (один, слишком старый, отброшен).

Анализ дисперсии диаметров на высоте груди и дисперсии высот привел к заключению, что дисперсия между деревьями, являющаяся следствием дисперсии внутри древостоев, равняется 52; дисперсия, вытекающая из различия между древостоями внутри возрастных классов, в 14 раз больше и равняется 729; дисперсия, вытекающая из различия между возрастными классами, равняется 19837, т. е. почти в 30 раз больше, чем дисперсия, вызванная различием древостоев. Из этого следует, что имеются существенные различия среди древостоев различных возрастов. Это делает невозможным рассматривать древостои как выборки деревьев из одного возрастного класса.

После нормирования величин «диаметр на высоте груди» и «высота» среди линейных комбинаций этих двух признаков были найдены (с помощью векового уравнения) две некоррелированные комбинации, одна из которых (прямая ортогональной средней квадратической регрессии) была названа бонитетом древостоя, а другая — видом древостоя. Эти два новые признака древостоя можно найти в номограмме на чертеже 3 по средним диаметрам на высоте груди, высоте и возрасту древостоя, нанесенным на неподвижную часть монограммы.

Новые признаки b (бонитет) и w (вид) находят на решетке, начерченной на подвижной части номограммы.

Табл. 9 содержит коэффициенты корреляции в отдельных возрастных классах: $r_{b\bar{v}}$ — между предложенным бонитетом и средним объемом дерева в древостое; $r_{b\bar{v}}$ — между лесным бонитетом и средним объемом; r_{bV} — между предложенным бонитетом и общим объемом всех деревьев в древостое на 1 га; r_{BV} — между лесным бонитетом и общим объемом на 1 га, $r_{w\bar{v}}$ — между видом и объемом.

Предложенный бонитет дает лучшее представление об объеме, чем употребляемый до сих пор лесной бонитет. Вид, однако, не является существенно коррелированным с объемом. Резюме автора

10179. Факториальный анализ урожайности. Банкс (The factorial analysis of crop productivity. A re-examination of Professor Kendall's data. Banks Charlotte), J. Roy. Statist. Soc., 1954, B16, № 1, 100—111 (англ.)

Главная цель статьи — проиллюстрировать, как развитый психологами метод факторного анализа для исследования так называемой умственной продуктивности может с пользой быть применен к сельскохозяйственным данным в такой проблеме, как посевная продуктивность. Резюме автора

10180. Графические решения и статистические задачи. Дюфренуа (Résolutions graphiques et problèmes statistiques. Dufrénoy Jean), J. Soc. statist. Paris, 1957, 98, № 4-6, 126—139 (франц.)

Краткие указания о применении нормального распределения, логарифмически нормального распределения и распределения Пуассона к решению статистических задач. А. К. Митропольский

10181. Статистические задачи в медицинской диагностике. Чжан, Ходжес, Ерушалми (Statistical problems in medical diagnosis. Chiang C. L., Hodges J. L. Jr, Yerushalmy J.), Proc. 3-rd Berkeley Sympos. Math. Statistics and Probability. Vol. 4. Berkeley-Los Angeles, 1956, 121—133 (англ.)

В медицинской практике для распознавания первых стадий некоторых хронических заболеваний применяются способы диагностики, которые 1) столь просты, что допускают массовое применение; 2) не точны, так как часть здоровых людей на них реагирует положительно, а часть больных — отрицательно. В статье формулируются некоторые задачи математической статистики, связанные с этим кругом вопросов, например об оценке вероятностей ошибок обоих родов по данным наблюдений и др. Г. К. Энгелис

10182. Замечание к работе Юванца и Липтака «Некоторые вопросы приложения математической статистики в медицине и биологии» (Kiegészítés Juvancz: Iréneusz dr és Lipták Tamas: «A matematikai statisztika orvosi-biologiai alkalmázásának néhány prollémájá rol» C. Dolgozathoz), Magyar tud. akad. Alkalm. mat. int. közl., 1953, 2, 239 — 242 (венг.)

См. РЖМат, 1958, 8126.

10183. Попытка математического подхода к рельефу как фактору эрозии. Зубжицкий (Próba matematycznego ujecia rzezby terenu jako czyńnika erozji. Zubrzycki S.), Zastosowania mat., 1956, 2, № 4, 390—398 (польск.)

Проблема заключается в установлении связи между пересеченностью местности, выражаемой через несколько легко подсчитываемых параметров, и коэффициентом эрозии. Автор дает следующее решение. Три идентичные копии гипсометрической карты, разделенной на равносторонние треугольники (со сторонами, соответствующими 2 *км*), были разосланы трем экспертам. Эксперты возвратили свои оценки (градуированные от 0 до 9) эффектов влияния рельефа внутри каждого треугольника на эрозию. Среднее значение оценок трех экспертов автор называет эмпирическим коэффициентом эрозии, находит дисперсию для каждого треугольника и среднее значение дисперсий всех треугольников. Множество оценок подвергается испытанию на однородность и выясняется, что один из экспертов систематически давал более высокие оценки. Далее автор эмпирически определяет коэффициенты уравнения регрессии $v = 2{,}22\,t - 0{,}197\,t^2 + 0{,}08\,u + 0{,}231\,u^2 - 0{,}0118\,r - 4{,}61$, где v — коэффициент эрозии, t — длина изогипсы в треугольнике, u — число изогипс с различными ординатами и r — некоторый индекс среднего превышения треугольника над уровнем моря.

Рассуждения проводились на основании (здесь не представленного) исследования корреляции. Полученные результаты показывают, что, вопреки первоначальным предположениям, измерения экспертов устанавливают зависимость эрозии не только от рельефа, но и от высоты изучаемой области над уровнем моря. P. Mikulski

10184. Оценка объема биологической совокупности маркировкой и повторным выловом. Де-Лури (The estimation of population size by a marking and recapture procedure. De Lury D. B.), J. Fisheries Res. Board Canada, 1958, 15, № 1, 19—25 (англ.)

Даются две разные формулы для оценки объема совокупности из эксперимента отмечивания, в котором маркировка и выбор производятся одновременно в замкнутой совокупности. Одна из них, полученная Шнабель (Schnabel Zoe E., Amer. Math. Monthly, 1938. 45 (6), 348 — 352) методом максимального правдоподобия, требует значительных арифметических вычислений, так как уравнение, из которого выводится оценка, решается методом итераций. Другая, введенная профессором Шумахером (Schumacher F. X., J. Tennessee Acad. Sci., 1943, 18, 228—249) с помощью выравнивания по способу взвешенных наименьших квадратов, более удобна для использования, так как не требует итераций. На практике обычно использовалась оценка максимального правдоподобия, причем для того чтобы избежать громоздких вычислений, бралось приближение первого порядка. Построенные с помощью формулы Шумахера оценки параметров, характеризующих происходящие в совокупности процессы размножения и гибели, могут быть сильно ошибочны; однако этот метод пригоден в тех случаях, когда более эффективные методы, требующие применение нумерованных отметок, не могут быть использованы.

Из введения автора

10185. Критерий для разниц в способах приготовления рыбы, основанный на дискриминантной функции. Бейтен, Так, Бейдер (Testing for differences. Baten W. D., Tack P. I., Baeder Helen A.), Industr. Quality Control, 1958, 14, № 7, 6—10 (англ.)

Используя дискриминантную функцию, составляемую из отметок по четырем характеристикам (характеристики относятся к запаху, вкусу, текстуре и влажности), можно построить критерий значимости в разнице методов приготовления рыбы, а также установить ранги важности характеристик. Дискриминантные функции, таким образом, дают критерий для сравнения комбинаций из нескольких величин. Они могут быть полезными для научных работников в области пищевой промышленности при обнаружении разниц в способах приготовления, включающих в себя комбинации двух или более факторов. Этот тип статистического анализа является полезным и мощным инструментом, поскольку он дает возможность сравнивать комбинации из различных характеристик. Предпочтительность одного из двух способов приготовления оценивалась знатоками, которые свое решение основывали на вкусе, запахе, текстуре и влажности рыбных блюд. Знатоки сделали отметки по отдельным факторам, а дискриминантная функция дала отметку, относящуюся к совокупности всех вместе взятых факторов. Резюме автора

10186. О предсказании сезонности скупки молока. Гутман (O przewidywaniu sezonowości skupu mleka. Gutman M.), Zastosowania mat., 1957, 3, № 2, 191—203 (польск.)

Автор рассматривает следующую проблему: Каково распределение по отдельным месяцам общего количества молока, поставляемого крестьянами на скупочные центры в течение года? Как это распределение должно быть запланировано на следующий год? Автор характеризует распределение годовой поставки молока двенадцатимесячными средними долями (относящимися к нескольким годам и 26 районам) и средними квадратическими отклонениями этих долей. При идеальном снабжении каждый месяц поставляются одинаковые доли молока, т. е. $\frac{1}{12} = 0{,}0833$. Оказывается, что в летние месяцы (с мая по сентябрь) эта доля превышается, а в зимние месяцы (с ноября до марта) крестьяне поставляют молока меньше этой доли.

Автор желает запланировать скупку молока по отдельным месяцам таким образом, чтобы поставщики доставляли месячные доли молока, близкие к идеальным. Так, на летние месяца он планирует уменьшение средних долей на количества, пропорциональные средним квадратическим отклонениям (в отдельные месяца);

на зимние месяца автор планирует увеличение фактических средних долей на количества, также пропорциональные средним квадратическим отклонениям. На апрель и октябрь он сохраняет фактические средние доли. Коэффициенты пропорциональности — один для зимних месяцев, а другой для летних — подсчитываются следующим образом: Сумма квадратов отклонений отдельных месячных долей от идеальной доли 0,0888 называется индексом сезонности на данный год. Показывается, что эта доля убывала в 1949—1953 гг. Автор устанавливает, что зависимость этого индекса от времени выражается в виде линейной функции, и, экстраполируя ее, оценивает индекс сезонности на 1954 г. Численное значение этого индекса дает возможность подсчитать необходимые коэффициенты пропорциональности. Автор строит план, который может быть использован практически и улучшить состояние сезонности, заключающееся в неравномерном снабжении молоком. J. Perkal

10187. Об эффективности исследования мазков слизи из горла носителей дифтерита. Лукашевич (O skuteczności pedzlowego badania nosicielstwa dyfteriił. Łukaszewicz J.), Zastosowania mat., 1956, **3**, № 1, 46—50 (польск.)

Носителями дифтерита называются лица, которые не обнаруживают каких-либо симптомов дифтерита, но, тем не менее, содержат дифтеритные бактерии в горловой слизи. Одна из задач эпидемиологии заключается в исследовании, является ли данное лицо носителем или нет.

Испытание состоит из а) взятия пробы слизи из горла обследуемого лица на ватные тампоны, б) проверки, содержится ли данная бактерия в одной из колоний, культивируемых из слизи с тампона. Для того чтобы увеличить вероятность обнаружения носителя, операции а) и б) повторяются несколько раз, т. е. пробы берутся на несколько тампонов и с каждого тампона выращивается по несколько колоний. Автор предполагает, что результаты проб слизи различными тампонами, так же как и результаты, относящиеся к различным колониям, являются независимыми и, пользуясь этим, он на основании экспериментального материала, собранного Институтом матери и ребенка в Варшаве, вычисляет вероятность p_{ik} того, что носитель будет обнаружен при взятии проб слизи i тампонами и проверки по k колоний из слизи с каждого тампона. Например, оказывается, что проверка по одной колонии с каждого тампона дает вероятность обнаружения носителя, равную приблизительно 0,5; проверка по 3 колонии с каждого из 4 тампонов дает значение той же вероятности, равное 99%. J. Perkal

10188. Прием Монте-Карло применительно к получению критериев и доверительных интервалов для страховых показателей смертности. Уолш (A Monto Carlo technique for obtaining tests and confidence intervals for insurance mortality rates. Walsh John E.), Sympos. Monte Carlo Methods, New York, John Wiley and Sons, Inc., 1956, 265—277

Наблюденные показатели смертности в страховании обычно основываются на единицах (полисы, денежные суммы и т. д.), которые не являются статистически независимыми, и включают в себя жизни, которые не полностью однородны. Разумное и точное определение вероятностных свойств этих наблюденных показателей должно основываться на методе, который учитывал бы эту зависимость и разнородность. В большинстве исследований главное внимание уделяется стоимости используемого метода. Поскольку количество данных всегда велико, то процедура регистрации и обработки добавочной информации может быть очень дорогостоящей. Статья предлагает метод, с помощью которого разумные точные критерии и доверительные интервалы могут быть получены для математического ожидания наблюденного показателя без добавочной информации и с малыми добавочными затратами. Процедура заключается в введении дополнительного вероятностного процесса с известными свойствами (прием Монте-Карло). Из-за стоимости этого метода эффективность его использования для получения результирующих критериев и доверительных интервалов незначительна (обычно около 5%—20%). Однако количество данных обычно настолько велико, что даже при такой низкой эффективности метод дает полезные результаты. Метод также удобен в любой ситуации, где наблюденные показатели смертности и число объектов, подверженных риску, известны (в частности, когда исследование смертности завершено и получение дальнейшей информации невозможно или нерентабельно). Резюме автора

10189. Последовательная процедура контроля за частотой прекращений страхования. Вюнше (Ein Sequenz-Test zur Kontrolle von Ausscheidehäufigkeiten. Wünsche Günther), Mitt. Verein. Schweiz. Versicherungsmathematiker, 1956, 56, № 1, 77—89 (нем.)

Излагается известная последовательная процедура Вальда для контроля за параметром пуассоновского процесса и указывается ее приложение в страховании. Н. В. Смирнов

10190. Z-метод Лидстона без закона Макехама. Манро (Lidstone's Z-method without Makeham's law. Munro N. A.), J. Inst. Actuaries, 1957, 83, № 3, 268—276 (англ.)

Лидстон показал, что если таблица смертности подчиняется закону Макехама, Z — функция, из которой его массовым методом оценки страховых взносов определяется «средний возраст зрелости», может быть подходяще выбран в виде $Z(M) = A + Bc^M$; M — переменный возраст зрелости. Однако, если закон Макехама неприменим, несколько искуственно ограничивать функцию $Z(M)$ выражением $A + Bc^M$, хотя Лидстон и показал (J. Inst. Actuaries, **38**, 1; **64**, 478), что можно найти подходящие функции такого вида для применения его метода к (полным) страховым таблицам O^M и $A_{1924-29}$ в пределах наиболее распространенных тогда возрастов зрелости. В статье приводится метод получения более общей Z-функции.

Этот метод затем используется для построения новой Z-функции применительно к недавно опубликованной (полной) таблице $A_{1949-52}$. Для этой таблицы приводится несколько примеров, иллюстрирующих, что, хотя Z-метод все еще может быть используем с той же самой Z-функцией, подходяще выбранной для таблицы $A_{1924-29}$ (полной) смертности, новая Z-функция другого вида (не $A + Bc^M$) более удовлетворительна. Резюме автора

10191. Проблемы выбора в исследованиях рынка. Новые таблицы доверительных интервалов. Дженнаро (Problèmes de choix dans les recherches de marché, nouvelles tables d'intervalles de confiance. Gennaro P.), Rev. statist. appl., 1957, 5, № 3, 17—35 (франц.)

Приводится таблица, позволяющая испытать значимость наблюденного расхождения в числе появлений объектов с несовместимыми признаками A, B,... в случайной выборке, т. е. проверить гипотезу их равновероятия. Другая таблица указывает необходимый минимум числа наблюдений, чтобы с достаточной надежностью ($P = 0{,}95$) выявить различие вероятностей двух признаков.

Указываются примеры из области торговли на приложение вычислительных таблиц. Резюме автора

См. также: 9396, 9409, 9422, 9947

ГЕОМЕТРИЯ

Редакторы *С. П. Фиников, А. М. Васильев*

10192. Из истории дифференциальной геометрии в нашей стране. Миллер (Despre inceputul geometriei diferențiale în țara noastră. Myller A.), Lucrările consfăt. geom. diferenț. 1955. Timișoara Acad. RPR., 1956, 17—22 (рум.)

Доклад на совещании Академии Румынской Народной Республики по дифференциальной геометрии в 1955 г. Автор останавливается сначала на работах Монжа, Гаусса и Римана в области дифференциальной геометрии, а затем на содержании статьи, опубликованной в 1859 г. Бакалоглу, первым румынским математиком, занимавшимся вопросами дифференциальной геометрии. И. К. Парно

10193. Доклад Джефри относительно евклидовой геометрии. Фер (The Jeffrey report on Euclidean geometry. Fehr Howard F.), Math. Teacher, 1957, 50, № 8, 577—579 (англ.)

Предлагается, следуя докладу Джефри относительно евклидовой геометрии, касающемуся английских школ, преодолеть существующий в американских школах шаблон, ограничить место, отводимое в программе синтетической геометрии (год планиметрии и полгода стереометрии), и использовать освободившееся время для включения в курс элементов аналитической геометрии. Предлагается в продолжение первых четырех месяцев преподавать геометрию в духе синтетической геометрии, дойти до теоремы Пифагора, от этой теоремы перейти к введению расстояния и к координатной геометрии; изучение аналитической геометрии будет идти бок о бок с синтетической геометрией при рассмотрении свойств плоских фигур. Естественные стереометрические обобщения могут быть сделаны интуитивным путем. Сокращение преподавания геометрии даст возможность перейти к изучению тригонометрии с координатной точки зрения, что позволит, включением в общее русло преподавания алгебры, геометрии (синтетической и аналитической) и тригонометрии, легче усмотреть единство математики. Автор считает, что от предлагаемого им ограничения материала синтетической геометрии не пострадает усвоение дедукции, как математического способа доказательства, поскольку с дедукциями имеют дело также в арифметике, алгебре и аналитической геометрии. Л. П. Гокиели

10194. Эквиаффинное преобразование. Марцани (Die flächentreue Affinität. Marzani Th.). Math.-phys. Semesterber., 1957, 5, № 3—4, 272—280 (нем.)

При изучении аффинного преобразования учащегося затрудняет то обстоятельство, что он не видит непрерывного перехода исходной фигуры в преобразованную. Автор показывает (только для случая аффинного сдвига), как сделать этот непрерывный переход наглядным. Рассматриваются некоторые приложения аффинного сдвига (кривизна конических сечений, упрощение уравнений конических сечений, аффинное преобразование эллипса в равновеликий круг, построение равновеликих секторов гиперболы). Н. М. Бескин

10195. Об одном свойстве звездной области $|xy| \leqslant 1$. Малер (A property of the star domain $|xy| \leqslant 1$. Mahler K.), Mathematika, 1956, 3, № 5, 80 (англ.)

Пусть K состоит из тех точек плоскости xy, для которых $|xy| \leqslant 1$. Известно, что K содержит ограниченную замкнутую звездную относительно начала координат область, критический определитель которой таков же, как и у K (именно $\sqrt{5}$). Автор доказывает: любой замкнутый многоугольник с конечным числом сторон, содержащийся в K и звездный относительно начала, имеет критический определитель меньший, чем $\sqrt{5}$. С. М. Лозинский

10196. Углы с соответственно параллельными сторонами (О преподавании геометрии в 6-м классе). Гимпель (Winkel an geschnittenen Parallelen. Ein Beitrag zum Geometrieunterricht in der 6. Klasse. Gimpel Manfred), Math. und Phys. Schule, 1958, 5, № 2, 90—96 (нем.)

Для повышения активности и интереса учащихся автор рекомендует на многочисленных примерах (изгородь, перила лестницы, разлинованный лист, картонная модель) убедить учеников в правильности известных свойств углов с соответственно параллельными сторонами, опустив формальное доказательство соответствующей теоремы. В. С. Малаховский

10197. Геометрический парадокс, связанный с переносом угла. Росье (Un paradoxe géométrique relatif au report d'un angle. Rossier Paul), Arch. sci., 1957, 10, № 3, 473 (франц.)

Показано, что в случае гиперболической кэлиевой метрики в пучке прямых на плоскости возможно построение угла, равного данному, с помощью одной линейки. В эллиптическом случае, когда появляются мнимые элементы, такое построение невозможно. Ю. И. Левин

10198. Рассечение квадранта. Финли (Quadrant dissection. Finlay A. H.), Math. Gaz., 1957, 41, № 338, 279 (англ.)

Приводится простая задача на рассечение квадранта. Л. П. Гокиели

10199. Оригинальное в геометрии. Биман (Originality in geometry. Beeman William E.), Math. Teacher, 1957, 50, № 8, 589—593 (англ.)

Цель статьи заключается в том, чтобы показать, как можно привлечь внимание школьника к геометрическим вопросам, заинтересовав его оригинальностью подхода при решении геометрических задач. В статье приведено несколько простых задач из плоской евклидовой геометрии, для которых указаны сначала своеобразные конструктивные решения, а после дан подробный аналитический разбор приведенных решений. Последняя из разобранных автором задач показывает, что конструктивному решению нельзя доверять без соответствующей аналитической проверки. В. А. Яблоков

10200. О некоторых геометрических преобразованиях. Кошницэ (Asupra unor transformări geometrice. Coșniță C.), Bul. Inst. politehn. Bucuresti, 1956, 18, № 3-4, 99—107 (рум.; рез. русск., франц.)

Автор исходит из соотношения

$$\overline{OM'} \cdot \overline{OM}^n = k, \qquad (1)$$

характеризующего преобразования гомотетии и инверсии, где O — полюс, k — модуль, M и M' — две соответственные точки, лежащие на одной с точкой O прямой, а $n = \mp 1$.

Если в случае гомотетии и инверсии m и m' — точки, в которых нормали в M и M' к кривым (M) и (M') пересекают перпендикуляр в O к радиусу вектору, то имеет место соотношение

$$\overline{Om'} / \overline{Om} = \pm \overline{OM'} / \overline{OM}.$$

Здесь результат обобщается для преобразования типа (1), где n — любое рациональное число, а именно доказывается, что

$$\overline{Om'} / \overline{Om} = -n\overline{OM'} / \overline{OM}.$$

При этом используется соотношение

$$\overline{Om'} / \overline{Om} = f'(\overline{OM}),$$

при условии что между кривыми (M) и (M') существует зависимость

$$\overline{OM'} = f(\overline{OM}).$$

Затем рассматриваются преобразования типа

$$\alpha \cdot \overline{OM'}^p + \beta \overline{OM}^q = \gamma,$$

где p, q — рациональные числа, а α, β, γ — любые постоянные, и соответствующее построение касательной в M', если известна касательная в M, вытекающее из соотношения

$$\frac{\overline{Om'}}{\overline{Om}} = -\frac{q\beta}{p\alpha} \frac{\overline{OM}^{q-1}}{\overline{OM'}^{p-1}}.$$

Предыдущие преобразования обобщаются, наконец для случая, когда прямая, соединяющая соответственные точки M, M', огибает некоторую кривую класса n

И. К. Парно

10201. Сферы Эйлера ортоцентрического симплекса. Крейцер Г. П., Тюрин Г. И., Матем. просвещение, вып. 2, 1957, 187—194

Окружность Эйлера или окружность девяти точек треугольника обобщается на случай n-мерного симплекса, высоты которого пересекаются в одной точке (ортоцентре). Формулируется предложение: при любом фиксированном k центры тяжести всех k-мерных граней (точнее k-мерных подсимплексов) n-мерного ортоцентрического симплекса лежат на одной сфере. Эта сфера названа $(n-k)$-й сферой Эйлера ортоцентрического симплекса. Доказывается, что на k-й сфере Эйлера $(k \leqslant n-1)$ лежат C_{n+1}^{k} центров тяжестей $(n-k)$-мерных граней, C_{n+1}^{k} оснований высот, проведенных в $(n-k+1)$-мерных гранях (ортоцентров $(n-k)$-мерных граней), и $(n-k+2)\, C_{n+1}^{k-1}$ точек, делящих отрезки этих высот от ортоцентров $(n-k+1)$-мерных граней до вершин в отношении $1:(n-k)$, считая от ортоцентров. Доказывается также, что центры всех n сфер Эйлера, ортоцентр и центр тяжести симплекса лежат на одной прямой (обобщение прямой Эйлера треугольника). Устанавливаются зависимости между радиусами-векторами всех упомянутых выше точек.

А. Г. Дорфман

10202 К. Полное собрание сочинений. Серия первая. Математические сочинения. Том XXVII. Геометрические работы. Том второй. Эйлер (Opera omnia. Series prima. Spera mathematica. Vol. XXVII. Commentationes geometricae. Vol. secundum. Eulerus Leonhardus. Edidit Andreas Speiser. Societatis Scientiarum Naturalium Helveticae, Lausanne, 1954, XLVII — 400 pp.) (латинск.)

Этот второй том, как и первый (РЖМат, 1955, 2492 К, 1956, 7825 К) содержит пояснительное введение Шпейзера. За исключением двух мемуаров (на французском языке) по сферической и сфероидальной тригонометрии, все остальные относятся к теории плоских кривых. Рассматриваются различные задачи, например: найти однопараметрическое семейство кривых, ортогональные траектории которых являются их зеркальными отражениями от оси y; найти кривые, отличные от конических сечений, которые обладают «диаметрами», делящими пополам системы параллельных хорд; найти кривые, с помощью которых световые лучи, исходящие из некоторой точки, возвратятся в нее после двух отражений; найти кривые, подобные их эволютам k-го порядка; найти кривые, отличные от параболы, обладающие взаимно перпендикулярными касательными в концах хорд, проходящих через некоторую точку. Есть также один мемуар о различных родах точек заострения, которые могут быть у алгебраической кривой, и один мемуар о поднормалях, приводящий к функциональному уравнению $f(x+f(x)) = nf(x)$.

H. S. M. Coxeter

Перевод из Math. Revs, 1955, 16, № 1, 1.

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

10203. Построение правильных многоугольников при помощи циркуля и линейки. Буиклиу (Construcţia poligoanelor regulate cu rigla şi compasul. Buiciu Gh.), Gaz. mat. şi fiz., 1957, B8, № 4, 170—176 (рум.)

Приведены способы точного или приближенного (с указанием погрешности) построения при помощи циркуля и линейки правильных многоугольников с числом сторон, не превосходящим 31.

К. С. Сибирский

10204. Недианы и образованный из них шестиугольник. Сатерли (Nediane and the nedian hexagon. Satterly John), Math. Gaz., 1957, 41, № 338, 289—291 (англ.)

В треугольнике ABC, наряду с медианами, проведены «недианы», т. е. прямые, соединяющие вершины треугольника с точками, расположенными на противоположных вершинам сторонах и отстоящих от вершин этой стороны на $\frac{1}{n}$ длины этой стороны. Так, например, для вершины A мы получим пару недиан AD и AD'; для вершины B — пару недиан BE и BE', для вершины C — пару недиан CF и CF'. С помощью первой группы недиан AD, BE, CF образуется недианный треугольник XYZ, с помощью второй группы недиан AD', BE', CF' — второй недианный треугольник $X'Y'Z'$. Их общая часть образует недианный шестиугольник.

В. А. Яблоков

10205. Обобщение теоремы Чевы. Фёрстенберг (An extension of Ceva's theorem. Furstenberg Harry), Scripta math., 1954, 20, № 3-4, 237—238 (англ.)

Теорема Чевы распространяется на многоугольник с нечетным числом сторон. Доказательство проводится переходом от многоугольника с n сторонами к многоугольнику с $n+2$ сторонами.

С. И. Зетель

10206. Обобщение теоремы Менелая. Фёрстенберг (An extension of Menelaus' theorem. Furstenberg Harry), Scripta math., 1954, 20, № 3—4, 238—239 (англ.)

Теорема Менелая распространяется на многоугольники. Доказательство проводится по индукции.

С. И. Зетель

10207. Глава из геометрии рекуррентности. Последовательности треугольников, производимых от двух данных треугольников. Миллер (Un capitol al unei geometrii a recurenţei. Şiruri de triunghiuri derivate din doua triunghiuri date. Myller A.), An. ştiinţ. Univ. Iaşi., 1956, Sec. 1, 2, № 1-2, 1—14 (рум.; рез. русск., франц.)

Рассматриваются свойства последовательностей треугольников

$$T_{-n}, \ldots, T_{-2}, T_{-1}, T_0, T_1, T_2, \ldots, T_n, \ldots \quad (1)$$

описанных вокруг данного треугольника T (вершины которого могут быть и коллинеарными), и последовательностей треугольников

$$t_{-n}, \ldots, t_{-2}, t_{-1}, t_0, t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots, \quad (2)$$

вписанных в данный треугольник t (который может быть также вырожденным в точку), таких, что каждый треугольник вписан в следующий за ним.

В частности, показано аналитически, что последовательность (1) стремится влево к одной точке, а вправо к треугольнику T, а последовательность (2) стремится влево к треугольнику t, а вправо к вырожденному треугольнику, вершины которого коллинеарны.

К. С. Сибирский

10208. Об изотомическом преобразовании. Корт (Sur la transformation isotomique. Court Nathan Altshiller), Mathesis, 1957, 66, № 7—9, 291—297 (франц.)

Следующая известная теорема является исходной: Три прямые, соединяющие середины трех прямых Чевы с серединами соответствующих сторон треугольника, пересекаются в одной точке, которая является изотопически-сопряженной точке пересечения прямых Чевы. Справедлива и обратная теорема. Рассматривается следующее известное квадратичное преобразование: Если точка M описывает прямую S, то точка M' треугольника ABC, изотомически-сопряженная точке M, определяет коническое сечение μ, описанное около треугольника ABC.

Показано, что касательные к μ в вершинах A, B, C образуют треугольник, перспективный треугольнику ABC с осью перспективы S', изотомически-сопряженной прямой S треугольника ABC. Если через точку окружности, описанной около треугольника ABC, провести три прямые Чевы, то три прямые, соединяющие середины прямых Чевы с серединами соответствующих сторон, пересекаются в одной точке. Коническое сечение, вписанное в треугольник ABC и описанное около треугольника PQR — треугольника оснований прямых Чевы: AMP, BMQ, CMR, называется: «чевиевым коническим сечением»; M — точка Жергона этого сечения. Изучаются свойства этих конических сечений. Треугольник PQR является также чевиевым треугольником для треугольников BCM, CAM, ABM. Рассматриваются свойства полного четырехугольника $ABCM$ и приводятся интересные частные случаи.

С. И. Зетель

10209. Два следствия из теорем Чевы и Карно. Уокер (Two theorems deduced from the theorems of Ceva and Carnot. Walker R. M.), Math. Gaz., 1957, 41, № 337, 206—208 (англ.)

Пусть на сторонах треугольника BC, CA и AB дано соответственно по паре точек D, D', E, E' и F, F'. Обозначим $BE \times CF' \equiv X$, $CF \times AD' \equiv Y$, $AD \times BE' \equiv Z$. Для того чтобы прямые AX, BY и CZ проходили через одну точку, необходимо и достаточно следующее условие:

$$\left(\frac{AE}{EC}\cdot\frac{BF}{FA}\cdot\frac{CD}{DB}\right)\left(\frac{AE'}{E'C}\cdot\frac{BF'}{F'A}\cdot\frac{CD'}{D'B}\right)=1. \qquad (A)$$

Из теоремы (A) выводится теорема Хопкинса и Дрэзина (Hopkins E. J., Drazin M. P., Math. Gaz., 1950, 34, 129—133): Если X, Y, Z — три точки в плоскости треугольника ABC и $\angle YAC = \angle ZAB$, $\angle ZBA = \angle XBC$ и $\angle XCB = \angle YCA$, то прямые AX, BY и CZ проходят через одну точку. Из теоремы (A) и известной из проективной геометрии теоремы Карно выводится: Для того чтобы прямые AX, BY и CZ проходили через одну точку, необходимо и достаточно, чтобы точки D, D', E, E', F, F' принадлежали одному коническому сечению.

Н. М. Бескин

10210. О пучках окружностей. Кошницэ (Asupra fascicolelor de cercuri. Coşniţă Cezar), Gaz. mat. şi fiz., 1957, 8, № 4, 190—194 (рум.)

Даны на плоскости две окружности с центрами O_1, O_2 и радиусами R_1, R_2; известно, что геометрическое место точек M на той же плоскости, таких что отношение их степеней относительно двух данных окружностей есть величина постоянная (k), представляет собой окружность (Г), принадлежащую пучку (O_1, O_2), причем центр этой окружности делит отрезок O_1, O_2 в отношении $\overline{OO_1}/\overline{OO_2} = k$.

Доказывается, что из точек M окружности (Г), расположенных вне окружностей O_1, O_2, эти окружности видны под равными углами.

Доказывается также теорема:

Даны окружности O_1, O_2 радиусов R_1, R_2, пересекающиеся в A и B; переменная секущая, проведенная из точки A, пересекает данные окружности в точках M_1, M_2. Геометрическое место точек M на этой секущей, таких что $\overline{MM_1}/\overline{MM_2} = \text{const}$ представляет собою окружность, принадлежащую пучку (O_1, O_2), и обратная ей:

Если (Г) — любая из окружностей пучка (O_1, O_2), то переменная секущая, проведенная из точки A, пересекает окружности O_1, O_2, (Г) соответственно в M_1, M_2, M так, что $\overline{MM_1}/\overline{MM_2} = \text{const}$.

И. К. Парно

10211. О связках шаров и кругов. Тебо (Sur des faisceaux de sphères et de cercles. Thébault Victor), Mathesis, 1957, 66, № 4—6, 172—176 (франц.)

Рассматриваются свойства связки F определенным образом описанных сфер и сферы двенадцати точек тетраэдра $T = ABCD$, аналогичной связке описанных кругов и круга девяти точек треугольника (связка Гриффитса).

Доказаны теоремы:

1. Степень точек (α), (β), (γ), (δ) центров тяжести A, B, C, D, граней тетраэдра относительно каждой сферы (ω) связки F описанных сфер и сферы двенадцати точек тетраэдра T пропорциональны суммам квадратов ребер соответствующих граней и отрезков. Для доказательства используются соотношения, полученные автором в других его работах, и теорема Стюарта.

2. Степени точек (α), (β), (γ) середин сторон относительно каждого круга связки (g) Гриффитса пропорциональны квадратам соответствующих сторон.

С. И. Зетель

10212. Об общих перпендикулярах тетраэдра. Тебо (Au sujet des bihauteurs d'un tétraèdre. Thébault V.), Mathesis, 1957, 66, № 4-6, 196—198 (франц.)

Даны условия на величины ребер, граней и диэдров, необходимые и достаточные для ортогональности соответствующих общих перпендикуляров противоположных ребер тетраэдра, а также характеристические признаки ортогональности и совпадения общих перпендикуляров и отрезков, соединяющих середины противоположных ребер (бимедиан). Рассмотрены некоторые специальные типы тетраэдров.

В. С. Малаховский

10213. Ортоцентрическая прямая трехгранного угла. До (Droite orthocentrique d'un trièdre. Deaux R.), Mathesis, 1957, 66, № 4-6, 192—194 (франц.)

Ортоцентрической прямой h трехгранного угла $SABC$ называется общая прямая пересечения трех плоскостей, каждая из которых проходит через ребро трехгранного угла перпендикулярно плоскости двух других ребер.

Теорема. Если $\mathbf{u}_a$, $\mathbf{u}_b$, $\mathbf{u}_c$ — единичные векторы ребер SA, SB, SC трехгранного угла $SABC$, двухгранные углы которого соответственно равны A, B, C, то направление прямой h определяется вектором

$$\mathbf{u}_a \operatorname{tg} A + \mathbf{u}_b \operatorname{tg} B + \mathbf{u}_c \operatorname{tg} C.$$

Определяется квадрат длины отрезка прямой h, ограниченного вершиной S тетраэдра $SABC$ и его гранью ABC и дано условие, при котором этот отрезок является диаметром шара, описанного около тетраэдра и

условие, при котором прямая h касается шара. Выведено необходимое и достаточное условие, при котором тетраэдр $SABC$ ортоцентричен. С. И. Зетель

10214. Элементарный вывод канонических уравнений кривых второго порядка. Алмейда (Uma dedução elementar da forma canónica das equações das conicas. Almeida Pedro R. de), Gaz. mat., 1957, 18, № 68-69, 29—30 (порт.)

Определяя кривую второго порядка как геометрическое место точек, отношение расстояний которых от фиксированной точки (фокуса) и фиксированной прямой (директрисы) равно постоянному числу (эксцентриситету), автор элементарными приемами аналитической геометрии выводит канонические уравнения эллипса, гиперболы и параболы. В. С. Малаховский

ПРИЛОЖЕНИЯ ГЕОМЕТРИИ

10215. Развертывание прямой переходной поверхности. Шмидбауэр (Abwicklung gerader Übergangsflächen. Schmidbauer H.), Konstruktion, 1957, 9, № 2, 70 (нем.)

Показываются ошибки при построении образующих прямых поверхности изгиба в существующих методах развертывания. Предлагаемый точный способ основан на том, что около краевых линий поверхности изгиба, лежащих в параллельных плоскостях, описываются многоугольники с соответственно параллельными сторонами и тогда прямая, соединяющая точки касания параллельных касательных к краевым линиям, будет искомой образующей поверхности изгиба. При качении последней по некоторой основной плоскости получается ее развертка. В случае, когда две краевые линии лежат в пересекающихся плоскостях, искомая прямолинейная образующая строится на некоторой плоскости развертывания аналогичным образом. В. С. Люкшин

10216. Новые исследования по почти периодическим движениям. Торнехаве (Recent investigations on almost periodic movements. Tornehave H.), 12-te Skand. matematikerkongr. Lund., 1953, Lund, 1954, 302—309 (англ.)

Через $[x, y]$ обозначается расстояние между точками x и y метрического пространства M. Непрерывная функция $x = f(t)$, $-\infty < t < \infty$, $x \in M$ называется почти периодическим движением в M, если при любом $\varepsilon > 0$ множество действительных чисел τ, для которых $\sup_{-\infty<t<\infty} [f(t), f(t+\tau)] \leqslant \varepsilon$, имеет относительную плотность. Метрическое пространство M называется однородно (uniformly) локально связным, если при некотором $\Delta > 0$ существует такая функция $z = \varphi(x, t, y)$, $z \in M$, непрерывная при $0 \leqslant t \leqslant 1$, $x, y \in M$ и $[x, y] \leqslant \Delta$, что $\varphi(x, 0, y) = x$, $\varphi(x, 1, y) = y$, $\varphi(x, t, x) = x$.

Основываясь на известном методе Н. Н. Боголюбова, автор намечает доказательство аппроксимационной теоремы: В полном однородно локально связном метрическом пространстве M для любого почти периодического движения $f(t)$ в M и $\varepsilon > 0$ существует такая непрерывная функция $x = g(u_1, \ldots, u_m)$, $x \in M$, периода 2π относительно действительных переменных $u_1, \ldots, u_m$ и такие рационально независимые действительные числа $\beta_1, \ldots, \beta_m$, что $[g(\beta_1 t, \beta_2 t, \ldots, \beta_m t), f(t)] \leqslant \varepsilon$ для всех t. Отображением m-мерного тора в M называется непрерывная функция $x = g(u_1, \ldots, u_m)$, $x \in M$, периода $2N\pi$ (N — постоянная) по каждому действительному переменному u_ν; $\nu = 1, \ldots, m$. Два почти периодических движения в M называются гомотопными, если они оба содержатся в однопараметрическом семействе $f_v(t)$ почти периодических движений в M, зависящих от параметра v так, что $\sup_{-\infty<t<\infty} [f_{v_2}(t), f_{v_1}(t)] \to 0$ при $|v_2 - v_1| \to 0$. Аналогично определяются гомотопные отображения m-мерного тора в M. Почти периодические движения в M, гомотопные периодическим движениям в M, называются сократимыми (reducible). Отображение m-мерного тора в M называется сократимым, если оно гомотопно отображению вида $g(h(u_1, \ldots, u_m))$, где $g(t)$, $-\infty < t < \infty$, — периодическое движение в M, периода 2π, h — непрерывная функция действительных переменных $u_1, \ldots, u_m$, принимающая действительные значения, e^{ih} имеет период $2N\pi$ по каждому переменному u_ν, $\nu = 1, \ldots, m$.

Теорема гомотопии: Пусть числа $\beta_1, \ldots, \beta_m$ — рационально независимы. Отображение m-мерного тора $g(u_1, \ldots, u_m)$ сократимо тогда и только тогда, когда сократимо почти периодическое движение в $Mg(\beta_1 t, \ldots, \beta_m t)$.

Строится пример несократимого отображения двумерного тора на двумерную сферу и несократимого почти периодического движения на двумерной сфере; пример можно обобщить на m-мерную сферу и проективное пространство. З. Л. Лейбензон

10217. Ковариантная формулировка уравнений движения. Инфельд Л., Плебанский Г., Бюл. Польской АН, 1956, Отд. 3, 4, № 11, 749—754

Как известно, уравнения движения в общей теории относительности могут быть получены либо из «принципа геодезической», либо методом последовательных приближений непосредственно из уравнений поля. Авторами доказана строгая эквивалентность обоих методов для случая движения сингулярностей поля. Доказательство опирается на тождества Бьянки при специализации тензора энергии — импульса принятой для описания «пылевидной» материи. Я. И. Пугачев

10218. О возможности установить нижние границы для внутренних компонент тензора напряжений в общих координатах. Бреccан (Sulla possibilità di stabilire limitazioni inferiori per le componenti intrinseche del tensore degli sforzi in coordinate generali. Bressan Aldo), Rend. Seminar. mat. Univ. Padova, 1956, 26, 139—147 (итал.)

Обобщаются относящиеся к упругому телу, находящемуся в равновесии, результаты Гриоли (Grioli G., Ann. mat. pura ed appl., 1952, 33, № 4, 239—246), указавшего нижние границы для максимальных значений модуля компонент тензора напряжений в декартовых координатах. Рассматривается случай общих криволинейных координат. С помощью тензорных методов и введения обобщенных гиперстатических координат автор находит путь отыскания неравенств искомого типа. В заключение в виде примера проводятся расчеты для случая цилиндрических координат.

Б. Л. Лаптев

ПРОЕКТИВНАЯ И НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

10219. О коммутативности сложения в исчислении отрезков. Неймаи (Asupra comutativităţii adunării în calculul segmentelor. Neumann M.), Lucrările consfăt. geom. diferenţ. 1955. Timişoara, Acad. RPR., 1956, 337—339 (рум.; рез. русск., франц.)

Автор показал, что в системе аксиом проективной геометрии (система аксиом Бибербаха) из частного случая теоремы Паскаля не вытекает общая теорема Дезарга и что этот частный случай теоремы Паскаля равносилен коммутативности сложения. При этом слово «частный» используется в том смысле, что ме-

стиугольник с вершинами, расположенными на двух данных прямых, подчинен дополнительному условию, а именно два из пересечений противоположных сторон лежат на прямой, проходящей через пересечение данных прямых. И. К. Парно

10220. Обоснование геометрии плоских сечений полуквадрики. Эвальд (Begründung der Geometrie der ebenen Schnitte einer Semiquadrik. Ewald Günther), Arch. Math., 1957, 8, № 3, 203—208 (нем.)

Предполагается, что даны системы элементов, называемых кругами, и симметричное отношение ортогональности, в котором могут находиться эти элементы, и рассматривается следующая система аксиом:

(A1.). Три круга всегда имеют общий ортогональный им круг.

(A2.). Существует семь кругов, из которых никакие четыре не имеют общего им ортогонального круга.

(A3.). Если различные между собою круги двух троек находятся восемь раз в отношении ортогональности, то ортогональность имеет место и в девятом случае.

(A4). Существует по крайней мере один круг, который не ортогонален самому себе.

Эту аксиоматическую систему можно интерпретировать, рассматривая полуквадрику, т. е. геометрическое место точек трехмерного проективного пространства, удовлетворяющих уравнению $xAx^T = 0$, где x есть совокупность четырех чисел, принадлежащих некоторому телу k, заданных с точностью до общего левого множителя, T — символ инволюционного антиавтоморфизма, а A — неособая матрица, удовлетворяющая условию $A' = A^T$ под кругами следует понимать плоские сечения полуквадрики, а под отношением ортогональности — полярную сопряженность плоскостей соответствующих сечений.

В зависимости от строения полуквадрики, аксиома (A4) может быть заменена, как более сильной, одной из следующих трех, в формулировке которых под точкой понимается круг, ортогональный самому себе:

1. Точек не существует.

2. Точки существуют, но всякие два круга имеют общий ортогональный круг, который не является точкой.

3. Точки существуют, но два круга могут иметь не более двух общих точек.

В четвертом случае аксиому (A4) можно сохранить, дополнив следующим положением:

4. Существуют такие два различных круга, что все их общие ортогональные круги являются точками. А. П. Норден

10221. Единственность проективной плоскости порядка 8. Холл, Свифт, Уокер (Uniqueness of the projective plane of order eight. Hall Marshall, Jr, Swift J. Dean, Walker Robert J.), Math. Tables and Other Aids Comput., 1956, 10, № 56, 186—194 (англ.)

Доказывается, что существует только одна проективная плоскость с 9 точками на каждой прямой. Вместе с ранее известными результатами это показывает, что наименьшая недезаргова проективная плоскость содержит 10 точек на каждой прямой. Для доказательства используется полный список латинских квадратов порядка 7, данный Нортоном (Norton H., Ann. Eugenics, 1939, 9, 269—307), и вычисления, выполненные на счетной машине СВАК (РЖМат, 1954, 3094). Приводится программа работы машины. Л. А. Скорняков

10222. Применение стереографической проекции точек поверхности 2-го порядка к решению некоторых задач. Анисимова Е. П., Уч. зап. Рязанск. гос. пед. ин-та, 1957, 15, 124—128

Рассматривается стереографическая проекция точек произвольной линейчатой (невыродившейся) поверхности 2-го порядка на произвольную плоскость, не являющуюся касательной к взятой поверхности. С помощью установленной проекции решаются задачи, имеющиеся у Етера (РЖМат, 1955, 5245). Доказывается теорема Альфана относительно свойств конических сечений на поверхности 2-го порядка. В. А. Маневич

10223. Об аффинной ортологии. Било (Sur l'affinité orthologique. Bilo J.), Mathesis, 1956, 65, № 10, 509—516 (франц.)

Пусть (a, b, c, d), (H_a, H_b, H_c, H_d), (a', b', c', d'), $(H_{a'}, H_{b'}, H_{c'}, H_{d'})$ — несобственные элементы граней и высот двух тетраэдров $ABCD$ и $A'B'C'D'$. На несобственной плоскости пространства определяется полярное соответствие Σ_∞, в котором четырехугольнику $H_aH_bH_cH_d$ соответствует четырехсторонник $abcd$.

Пусть $abcd$ и $H_{a'}H_{b'}H_{c'}H_{d'}$ полярно сопряжены в некотором полярном соответствии Ω_∞, тогда коллинеация $\Phi_\infty = \Sigma_\infty \cdot \Omega_\infty$ преобразует $abcd$ в $a'b'c'd'$.

Если три пары противоположных вершин четырехсторонника $abcd$ полярно сопряжены в Ω_∞, то прямые $AH_{a'}$, $BH_{b'}$, $CH_{c'}$, $DH_{d'}$ пересекаются в точке O, аналогично прямые $A'H_a$, $B'H_b$, $C'H_c$, $D'H_d$ пересекаются в точке O'. В этом случае данные тетраэдры называются ортологическими.

Коллинеация Φ_∞ устанавливается в несобственной плоскости аффинным соответствием Ф, переводящим $ABCD$ в $A'B'C'D'$.

Под аффинной ортологией в пространстве будем понимать аффинное соответствие, в котором три главных направления перпендикулярны друг другу.

Рассматриваются некоторые положения, как, например: аффинная ортология Ф пространства преобразует любой треугольник в треугольник ему ортологический. В. А. Маневич

10224. О геометрических построениях в плоскости Лобачевского при помощи прямой линии и точки. Кирищиев Р. И., Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1957, № 1, 161—165

Чертежный инструмент, состоящий из жестко соединенных прямой линии и точки, автор называет шаблоном; прямую линию его — бортом, точку — вершиной. Доказано, что любая конструктивная задача второй степени в плоскости Лобачевского может быть решена при помощи шаблона. В основание доказательства положены постулаты: Постулат I. Бортом шаблона можно пользоваться как обычной однобортной линейкой. Постулат II. Если в плоскости даны или построены две пересекающиеся прямые, то шаблон можно наложить на плоскость так, что его борт совпадает с одной из прямых, а вершина ляжет на другую; при этом можно отметить положение вершины в плоскости. В. И. Коба

10225. О квазиаффинных отображениях в пространстве абсолютной геометрии и пространстве Лобачевского. Заморзаев А. М., Уч. зап. Кишиневск. ун-та, 1957, 29, 3—10

Автор ссылается на неопубликованную дипломную работу выпускника Кишиневского университета Л. Молдавского «Элементы теории выпуклых тел в пространстве Лобачевского и аффинном пространстве», в которой введено понятие квазиаффинного преобразования пространства (с абсолютной геометрией) как взаимно однозначного преобразования, сохраняющего прямолинейность расположения точек и порядок точек на прямой. С помощью интерпретации Белтрами — Клейна нетрудно доказать, что: 1) квазиаффинные преобразо-

вания достаточно определить как взаимно однозначные преобразования пространства, сохраняющие прямолинейность расположения точек, 2) квазиаффинные преобразования плоскости и пространства Лобачевского исчерпываются движениями. Автором дается синтетическое доказательство обоих фактов, представляющее, по мнению автора, интерес для аксиоматического построения геометрии Лобачевского.

Л. Я. Березина

10226. **Применение неевклидовой геометрии к некоторым задачам проективной геометрии. Розенфельд Б. А., Левинов А. М.,** Тр. Семинара по вектор. и тензор. анализу. МГУ, 1956, вып. 10, 249—258

Рассматриваются поверхности второго порядка в n-мерном вещественном проективном пространстве P_n; авторы называют их квадриками. Если уравнение квадрики приведено к каноническому виду

$$-(x_0^0)^2-(x^1)^2-\ldots-(x^{l-1})^2+(x^l)^2+\ldots+(x^n)^2=0$$

$$\left(0\leqslant l\leqslant\frac{n+1}{2}\right),$$

то такая поверхность называется квадрикой индекса l. Рассматривается многообразие m-мерных плоских образующих квадрики индекса $m+1$ в P_n. В P_n вводится метрика n-мерного неевклидова пространства S_n с абсолютом $\sum_{i=0}^{n}x^{i^2}=0$. Тогда квадрику можно рассматривать как эквидистанту двух взаимно полярных плоскостей: m-мерной содержащей базисные точки $e_0, e_1,\ldots,e_m$, и $(n-m-1)$-мерной, содержащей базисные точки $e_{m+1},\ldots,e_n$. Эти плоскости называются базами эквидистанты. Все теоремы доказываются с помощью этого представления квадрики. В работе получены различные результаты о строении многообразия m-мерных плоских образующих квадрики индекса $m+1$ в проективном пространстве P_n. Наиболее подробно исследован случай, когда квадрика имеет индекс $\frac{n}{2}$ при четном n или $\frac{n+1}{2}$ при нечетном n. При переходе к комплексным координатам получаются аналогичные результаты для комплексного проективного пространства.

А. Л. Вернер

10227. **Об одном квадратичном преобразовании. Било** (Sur une transformation quadratique. Bilo Julien), Mathesis, 1957, 66, № 4-6, 176—182 (франц.)

Рассматривается частный случай бирационального преобразования двух совмещенных плоскостей, при котором каждая прямая, проходящая через пару соответственных точек, проходит через фиксированную точку. Предварительно обобщается следующее известное свойство точек Жергона и Нагеля. Точка Нагеля (N) треугольника ABC есть центр круга, вписанного в антидополнительный треугольник, точка Жергона Г обратна (изотомична) точке Нагеля. Приводится простое геометрическое доказательство обобщенной теоремы: Точка Жергона конического сечения γ, вписанного в треугольник ABC, обратна антидополнительной точке центра I конического сечения. Затем рассматривается I — произвольная точка плоскости как центр конического сечения γ, вписанного в треугольник ABC, и ей приводится в соответствие точка Жергона. Преобразование, устанавливающее соответствие, бирациональное — равное произведению двух преобразований: квадратичного и гомотетии (G; — 2). Бирациональное преобразование применяется к кривым третьего порядка, проходящим через центр тяжести треугольника ABC и через вершины дополнительного треугольника $A'B'C'$.

Из теорем, приведенных в статье, отметим следующую: Если Г, Γ_a, Γ_b, Γ_c — точки Жергона четырех кривых второго порядка, вписанных в треугольник ABC, образуют гармоническую четверку, то прямые, соединяющие эти точки с центрами I, I_a, I_b, I_c — соответственных кривых, проходят через одну точку.

С. И. Зетель

10228. **Новая интерпретация метода перемены плоскостей проекций. Габашвили Г. Н.,** Тр. Груз. политехн. ин-та, 1957, № 1 (49), 41—47

Основной результат: построенные на данном эпюре в результате перемены плоскостей проекций новые проекции объекта истолковываются как совмещенные с исходными плоскостями проекции объекта на новые плоскости.

А. С. Лейбин

10229. **Определение точек линии пересечения линейчатых поверхностей способом двух параллельных дополнительных проектирующих плоскостей. Левченко Ю. Д.,** Тр. Астраханск. техн. ин-та рыбн. пром-сти и х-ва, 1957, вып. 4, 83—98

Линия пересечения двух тел: конусов, пирамид, цилиндров или призм — проще всего строится при помощи пучка секущих плоскостей, ось которого S проходит через вершины обоих тел, причем одна из вершин может быть бесконечно удаленной (у призмы или цилиндра). Случаи, когда следы прямой S лежат за пределами чертежа (ортогонального эпюра) или неудобно расположены, обычно в учебниках не рассматриваются. Автор предлагает в этих случаях проводить одну или две дополнительные параллельные проектирующие плоскости так, чтобы точки пересечения их с прямой S заменили ее следы. Рассмотрено несколько разных случаев расположения прямой и оснований тел; приведены графические формулы этих построений. Метод автора сходен с методом вспомогательного проектирования.

А. С. Лейбин

10230. **Построение в аксонометрии линии пересечения линейчатых поверхностей способом двух параллельных дополнительных проектирующих плоскостей. Левченко Ю. Д.,** Тр. Астраханск. техн. ин-та рыбн. пром-сти и х-ва, 1957, вып. 4, 99—108

Перенесение на аксонометрию всех результатов, изложенных в другой статье автора (реф. 10229).

А. С. Лейбин

10231. **О построении перпендикуляра к плоскости в центральных и параллельных аксонометрических проекциях. Дешевой Г. М.,** Тр. Ленингр. технол. ин-та им. Ленсовета, 1957, вып. 38, 26—46

Предлагаются различные способы построения перпендикуляра к плоскости общего положения в центральных и параллельных аксонометрических проекциях. Для случая, когда при центральном проектировании строится перпендикуляр к наклонной плоскости картины, используется теорема: Ортоцентр треугольника следов плоскости картины, изображение начала координат и ортоцентр треугольника схода расположены на одной прямой, являющейся изображением перпендикуляра, опущенного из начала координат на плоскость картины,— опубликованная в Тр. Ленингр. Ин-та авиаприборостроения, 1948, 1.

Н. М. Бескин

10232. **Новый способ установления видимости прямой на эпюре. Иорга** (Un nou procedeu pentru stabilirea vizibilităţii în epură a unei drepte. Iorga M.), Gaz. mat. şi fiz., 1957, B8, № 5, 237—240 (рум.)

Исходя из рассмотрения различных случаев расположения прямой относительно плоскости, с которой

она пересекается, автор устанавливает следующее общее правило:

В случае, когда прямая и плоскость пересекаются в первом угле, часть прямой, содержащаяся в этом угле, изобразится следующим образом: если отрезок прямой, заключенный между одним из следов прямой и проекцией того же наименования точки пересечения с плоскостью, пересечен следом того же наименования плоскости, то отрезок изобразится на эпюре сплошной линией, а продолжение его за проекцией точки пересечения изобразится пунктирной линией; если же отрезок не пересечен следом того же наименования плоскости, он изобразится пунктирной линией, а его продолжение за проекцией точки пересечения изобразится сплошной линией. И. К. Парно

10233. Основные теоремы центральной аксонометрии. Гавел (Základní věty centrální axonometrie. Havel Václav), Časop. pěstov. mat., 1957, 82, № 2, 175—181 (чешск.; рез. русск., нем.)

Пространственная дезаргова конфигурация называется координатной, если $O'A' \perp O'B'$, $O'B' \perp O'C'$, $O'C' \perp O'A'$, $O'A' = O'B' = O'C'$; точки A'_n, B'_n, C'_n — соответственно несобственные точки прямых $O'A'$, $O'B'$, $O'C'$. Плоская дезаргова конфигурация называется d-конфигурацией, если в каждой тройке коллинеарных точек OAA_n, OBB_n, OCC_n нет совпадающих точек, и прямые OA, OB и OC одновременно не совпадают. Если при этом точки A_n, B_n и C_n не коллинеарны, то конфигурация называется d_1-конфигурацией, а если коллинеарны, то d_2-конфигурацией. Обозначим через p дезаргову прямую треугольников ABC и $A_nB_nC_n$, а через P — гармонический полюс p относительно $A_nB_nC_n$. Обозначим через k мнимый эллипс, для которого треугольник $A_nB_nC_n$ — автополярный, а p и P полярно сопряжены. Наконец, назовем конфигурацией типа T такую d-конфигурацию, которая является проекцией из некоторой точки S координатной конфигурации.

Доказываются теоремы:

Каждая d-конфигурация типа T относительно собственной (несобственной) точки S есть d_1-конфигурация (d_2-конфигурация).

Если d_2-конфигурация есть типа T относительно точки S, то точка S несобственная. d_1-конфигурация есть типа T в том и только в том случае, если k — мнимая окружность (теорема Э. Круппа).

Далее исследуется d-конфигурация общего типа (без выполнения условия Круппа). Доказывается еще несколько теорем, суть которых в том, что всякая d-конфигурация может быть аффинно преобразована в конфигурацию типа T. Автор указывает, что эти вопросы были решены в советской литературе для более общего случая (вместо координатной конфигурации — произвольная пространственная дезаргова конфигурация), но без исследования случаев вырождения. Н. М. Бескин

10234 К. Начертательная геометрия. II. Проекции с числовыми отметками. Хак (Darstellende Geometrie. II. Körper mit krummen Begrenzungsflächen. Kotierte Projektionen. Haack Wolfgang. Sammlung. Göschen Bd 143. Berlin, Walter de Gruyter & Co., 1954, 129 pp. DM 2.40) (нем.)

I том см. РЖМат, 1956, 4772 К.

Второй том продолжает изложение применения ортографической проекции к цилиндру, конусу и сфере и их взаимным пересечениям. Затем следуют поверхности вращения и геликоиды. Последняя глава (31 страница) излагает проекции с числовыми отметками. Интересен вывод свойств конических сечений из свойства пары конгруэнтных конусов с параллельными осями, пересекающихся по коническому сечению, который принадлежит Герману (H. Herrmann). Глава о проекциях с числовыми отметками служит введением к книге Бартеля (Bartel K., Kotierte Projektionen, Teubner, Leipzig—Berlin, 1933). Несмотря на малые размеры книги, чертежи в первом и втором томах замечательно ясны. Ожидается, что в третьем томе будет подчеркнуто непосредственное визуальное впечатление чертежа. D. J. Struik

Перевод из Math. Revs, 1954, **15**, № 11, 981.

10235 Д. Определение формы и размеров сооружений по центральным проекциям. Эльясберг Е. Е. Автореф. дис. канд. техн. н., Высш. инж.-техн. краснознам. уч-ще, М., 1957

10236 Д. Задание технических поверхностей методом комплекса разверток. Карпеченко Ф. Т. Автореф. дис. канд. техн. н., Моск. авиац. ин-т, М., 1958

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

10237. Прибор для вычерчивания важнейших алгебраических кривых. Гаврилко (Прилад для вичерчування найважливіших алгебраїчних кривих. Гаврилко Г. І.), Наук. зап. Ворошиловградськ. держ. пед. ін-т, 1956, вип. 6, 119-130 (укр.)

Описывается прибор, состоящий из нескольких металлических стержней, скрепляемых скользящими или неподвижными шарнирами. При разных схемах прибора (приведено более 20 схем) и при разных соотношениях между рабочими длинами стержней прибор вычерчивает различные алгебраические кривые. Исследований подвижности прибора и возможности описать ту или иную кривую непрерывным движением прибора не приводится. А. С. Лейбин

10238. Некоторые замечания о косой симметрии плоских алгебраических кривых. Пьяццолла-Белок (Alcune osservazioni sulla simmetria obliqua nelle curve algebriche piane. Piazzolla Beloch M.), Ann. Univ. Ferrara, 1952—1953. Sez VII, № 2, 151—154 (итал.; рез. франц.)

В статье автора «Диаметральная теория плоских алгебраических кривых» (Annali, 1948,1 ser., vol. VII, parte 1, 39—121) дан метод отыскания ортогональных осей симметрии плоских алгебраических кривых. В данной работе дается более простой способ отыскания как ортогональных, так и неортогональных осей симметрии плоских алгебраических кривых. Подробно рассмотрена в качестве примера кривая Ламе: $\frac{x^4}{a^4} + \frac{y^4}{b^4} = 1$. И. Н. Григорьев

10239. Некоторые свойства алгебраических кривых, имеющих точку кратности $n-2$. Тальберг (Some properties of algebraic curves with a $(n-2)$-ple point. Thalberg Olaf M. Avh. Norske Vid. Akad. Oslo., 1954 (1955), **1**, № 2, 8 pp.) (англ.)

Пусть плоская алгебраическая кривая C_n порядка n содержит точку p кратности $n-2$ с простыми ветвями, пусть $t_1, t_2, \ldots, t_{2(n-1)}$ — точки касания касательных, проведенных из точки p к C_n, и пусть $s_1, s_2, \ldots s_{n-2}$ — остальные точки пересечения касательных в точке p. Используя инволюцию Жонкьера с центром в p и коинцидентной кривой C_n, автор изучает геометрические соотношения между точками p, t_i, s_j. G. B. Huff

Перевод из Math. Revs, 1956, **17**, № 5, 531

10240. О новом комплексе пространственных кубических кривых. Анисимова Е. П., Уч. зап. Рязанск. гос. пед. ин-та, 1957, **15**, 109—119

Рассматривается комплекс пространственных кубических кривых, проходящих через три данные точки

и имеющих две данные бисеканты, одна из которых проходит через одну из данных точек. Устанавливается взаимнооднозначное соответствие между кривыми комплекса и точками трехмерного проективного пространства посредством конических сечений линейной системы III ступени, которое позволяет изучить отображение кривых комплекса в точки трехмерного проективного пространства.

Рассматривается известная конгруэнция пространственных кубических кривых, проходящих через три данные точки P, Q, M и имеющих три данные бисеканты l, l_1, l_2, причем $l_1 \supset P$, $l_2 \supset M$. Указывается построение пространственных кубических кривых с помощью их отображения в пары конических сечений.

В. А. Маневич

10241. О действительной интерпретации кривых комплексной центроаффинной плоскости. Зуев И. В., Уч. зап. Казанск. ун-та, 1957, 117, № 2, 19—21

Известно, что всякая аналитическая кривая комплексной центроаффинной плоскости может быть изображена поверхностью нулевой кривизны биаксиального пространства B_3 эллиптического типа (Норден А. П., Матем. сб., 1949, 24(66), вып. 3). В заметке излагаются без доказательств некоторые свойства указанного отображения для алгебраических кривых. Отмечается, что соответствующие поверхности будут тоже алгебраическими, и устанавливается связь между порядком кривой и соответствующей поверхности; несобственные точки и касательные в центре плоскости переходят в особые (несобственные) прямые, принадлежащие поверхности; поверхность может содержать так называемые дополнительные точки, которым не соответствуют никакие точки кривой, и т. д.

В заключение устанавливается признак, характеризующий такую алгебраическую поверхность B_3, кривизна которой равна нулю.

А. П. Норден

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ ТРЕХМЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА И ОБОБЩЕНИЯ

10242. Об одном свойстве плоских кривых. Кошницэ (O proprietate a curbelor plane. Coşniţă C.), Bul. Inst. politehn. Bucureşti, 1956, 18, № 3-4, 81—88 (рум.; рез. русск., франц.)

Известно, что геометрическое место точек, из которых можно провести к плоской кривой (Г) две касательные, составляющие между собой угол, равный $\omega\left(\frac{\pi}{2}\right)$, есть кривая, называемая изоптикой (ортоптикой) данной кривой; если кривая (Г) является эллипсом или гиперболой, ее ортоптика — окружность, если же кривая (Г) — парабола, ее ортоптика — прямая.

В статье рассматривается обратная задача об определении плоских кривых (Г), которые имеют в качестве ортоптики данную окружность или данную прямую.

Для кривой (Г), являющейся огибающей прямой $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p(\alpha) = 0$, эта задача приводит к функциональному уравнению

$$f\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) - f(\alpha) = 0, \qquad (1)$$

решение которого получается в виде

$$f(\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} [A_{2k+1}\cos 2(2k+1)\alpha + B_{2k+1}\sin 2(2k+1)\alpha],$$

где $A_{2k+1}B_{2k+1}$ — постоянные на каждом периоде $\pi/2$.

Исходя из частных решений уравнения (1), автор получает кривые 2-го порядка, а также гипоциклоиду с тремя изгибами и другие кривые.

И. К. Парно

10243. Об одной трансцендентной кривой. Пахарес-Диас (Sobre una curva transcendente. Pajares Diaz E.), Ciencias, 1957, 22, № 4, 637—650 (исп.)

Рассматривается кривая следующего кинематического происхождения: точка движется по полупрямой $P_0\Delta$, расположенной в плоскости, которая вращается вокруг центра O, лежащего на перпендикуляре к $P_0\Delta$ в точке P_0 на расстоянии a; при этом угол α поворота плоскости растет пропорционально натуральному логарифму расстояния $P_0P = \delta$, проходимого движущейся точкой по полупрямой:

$$\alpha = c\ln\delta. \qquad (1)$$

Описываемая при этом кривая, экзоспираль, представляет собой обобщение логарифмической спирали, в которую и переходит при $a = 0$. Если начало координат поместить в O, а δ принять за параметр, то полярные координаты экзоспирали представятся в виде:

$$\theta = c\ln\delta - \operatorname{arctg}\delta/\alpha,$$
$$\rho = \sqrt{\alpha^2 + \delta^2}. \qquad (2)$$

При $\delta \to 0$ $\lim\theta = -\infty$, а $\lim\rho = a$: кривая асимптотически оборачивается около окружности радиуса a с центром в O. При $\delta \to 0$ θ и $\rho \to \infty$ и $\lim \operatorname{arc\,tg}\delta/a = \frac{\pi}{2}$. Это показывает, что экзоспираль при повороте на 90° асимптотически приближается к логарифмической спирали (1). Для экзоспирали в статье получены выражения угла касательной с радиусом-вектором, радиуса кривизны, отрезков полярных касательной и подкасательной, нормали и поднормали. Вычислена длина дуги экзоспирали и площадь соответствующего криволинейного сектора. Найдены точки перегиба кривой.

А. Г. Школьник

10244. Наложимые косые линейчатые поверхности. Франкс (Surfaces réglées gauches applicables. Franckx E d.), Bull. Soc. roy. sci. Liège, 1956, 25, № 2, 116—118 (франц.)

Пусть даны две линейчатые поверхности S_1 и S_2 и допустим, что за направляющие линии этих поверхностей взяты линии сжатия Γ_1 и Γ_2 с радиусами-векторами $\mathbf{M}_1(s)$ и $\mathbf{M}_2(s)$. Тогда поверхности S_1 и S_2 определяются уравнениями

$$\mathbf{P}_i(s,u) = \mathbf{M}_i(s) + \mathbf{e}_i(s),u,$$
$$\frac{d\mathbf{M}_i}{ds}\cdot\frac{d\mathbf{e}_i}{ds} = 0, \quad i = 1,2.$$

В каждой точке $\mathbf{M}_i(s)$ линии сжатия вводится трехгранник, образованный векторами $\frac{d\mathbf{M}_i}{ds} = \mathbf{t}_i$, $\mathbf{e}_i$, а $\mathbf{f}_i$ — единичный вектор, перпендикулярный $\mathbf{e}_i$ и определенный соотношением $\frac{d\mathbf{e}_i}{ds} = \frac{1}{K_i(s)}\cdot\mathbf{f}_i\cdot K_i(s)$ автор называет радиусом распределения образующей. При этих предположениях доказывается теорема: Для того чтобы две поверхности S_1 и S_2 были наложимы, необходимо и достаточно, чтобы в соответствующих точках $\mathbf{M}_1(s)$ и $\mathbf{M}_2(s)$ линий сжатия были: 1) одинаковые радиусы распределения, 2) одинаково расположены образующие по отношению к касательным к линиям сжатия.

И. Н. Григорьев

10245. Об одном типе кривых и поверхностей, встречающихся в линейном анализе. Булиган (Sur un type de courbes et de surfaces s'offrant a l'analyse linéaire. Bouligand Georges), Bull. cl.

sci. Acad. roy. Belgique, 1955, 41, № 7, 734—740 (франц.)

Как и в некоторых других сообщениях, автор рассматривает кривые C в евклидовой плоскости или поверхности S в евклидовом пространстве, подчиненные определенному условию. Если O — фиксированная точка, H — основание перпендикуляра, опущенного из этой точки на касательную прямую (плоскость) к C (S) в произвольной точке этой кривой (поверхности), а K — центр кривизны кривой (точка, делящая пополам отрезок между главными центрами кривизны поверхности), то должно выполняться соотношение $\vec{UK} = c\vec{OH}$, $c = \text{const}$. Сначала рассматривается плоская задача, затем пространственная. При введении сферических координат в пространстве и определении искомой поверхности, как огибающей своих касательных плоскостей $\sin u(x\cos v + y\sin v) + z\cos u - h(u, v) = 0$ для h получается уравнение $\operatorname{div}(\operatorname{grad} h) + 2(1 + e)h = 0$, где операции div и grad относятся к геометрии единичной сферы. Указывается связь с функциями Лежандра. В конце сообщения приводится постановка сходной задачи для аффинного случая. В. В. Рыжков

10246. Сети равных путей и сети равных кривизн. Комиссарук А. М., Уч. зап. Минск. гос. пед. ин-та, 1957, вып. 7, 11—20

В § 1 автор напоминает известные свойства равнопутных сетей Штаубера (см. § 69 книги референта — РЖМат, 1957, 6622 К). Кроме того, он показывает, что всякая сеть вращения, т. е. такая сеть на поверхности вращения, биссекторные линии которой совпадают с меридианами, будет равнопутной, и что чебышевская полосатая сеть (т. е. такая, у которой вдоль биссектарных линий сетевой угол постоянен) существует только на поверхностях вращения (или наложимых на них поверхностях).

В § 2 сетью равных кривизн называется такая сеть, геодезические кривизны линий которой в любой точке их пересечения равны между собой по абсолютной величине. Признаком такой сети является условие

$$(l + m)/2 = \operatorname{grad}\psi$$

где l и m — орты линий сети, ориентированные соответственно, а ψ — потенциал сети. Приводится признак обращения сети равных кривизн в геодезическую и дифференциальное уравнение 2-го порядка, которому удовлетворяет в этом случае потенциал сети. Полосатые геодезические (они же и равнопутные) сети существуют только на поверхностях, наложимых на поверхности вращения. А. П. Норден

10247. Конформное отображение поверхностей с сохранением линий постоянной геодезической кривизны. Бушманова Г. В., Уч. зап. Казанского ун-та, 1956, 116, № 1, 3—6

Рассматривается конформное соответствие поверхностей в 3-мерном евклидовом пространстве, при котором линии постоянной геодезической кривизны одной поверхности соответствуют линиям постоянной геодезической кривизны другой. Показано, что исходная и преобразованная поверхности будут поверхностями вращения, причем меридианы первой поверхности соответствуют меридианам второй поверхности. Поверхность постоянной кривизны преобразуется в поверхность постоянной кривизны. Показано, что через каждую точку произвольной поверхности вращения проходит ∞^1 таких линий постоянной геодезической кривизны, которые при конформном преобразовании переходят в геодезические линии второй поверхности. Семейство линий постоянной геодезической кривизны поверхности вращения определяются в квадратурах. Результаты, полученные для поверхностей 3-мерного евклидова пространства, распространены на двумерное пространство Вейля W_2. Геодезическим кругом называется такая кривая пространства W_2, которая развертывается на окружность евклидовой плоскости. Показано, что для того чтобы построить геометрию W_2, которая конформно отображается на другую геометрию W_2 с сохранением геодезических кругов, надо взять произвольную риманову геометрию и в ней поле векторов, касательных к геодезическим и равных по абсолютной величине половине геодезической кривизны ортогональных траекторий этих геодезических. Основной тензор римановой геометрии будет метрическим тензором пространства W_2, а вектор поля — его дополнительным вектором. Из общей теоремы о конформном преобразовании двух пространств W_2 как частный случай получается отображение двух поверхностей вращения. Другой частный случай получается из общей теоремы, когда исходная поверхность квазиевклидова. При этом геометрия этой поверхности преобразуется в геометрию некоторого пространства W_2. О. С. Редозубова

10248. О связи между минимальными поверхностями, которые пересекают сферу под постоянным углом, и кривыми Бертрана. Кручану (Asupra legăturii dintre suprafeţele minime care taie o sferă sub un unghi constant şi curbele Bertrand. Cruceanu V.), An. ştiint. Univ. Iaşi., 1956, Sec. 1, 2, № 1-2, 151—156 (рум.; рез. русск., франц.)

Каждой минимальной поверхности S_0, пересекающей единичную сферу вдоль некоторой кривой C под постоянным углом ω, ставится в соответствие кривая Бертрана C_0, радиусы кривизны и кручения которой ρ_0 и τ_0 удовлетворяют соотношению

$$\frac{\sin\omega}{\rho_0} + \frac{\cos\omega}{\tau_0} = 1, \qquad (1)$$

и обратно, каждой кривой Бертрана C_0, удовлетворяющей соотношению (1), ставится в соответствие минимальная поверхность S_0, пересекающая единичную сферу вдоль некоторой кривой C под постоянным углом ω.

Преобразуя кривую Бертрана C_0 в другую кривую C_θ с сохранением равенства дуг и параллелизма главных нормалей, автор показывает, что кривые C_θ составляют семейство кривых Бертрана, которым соответствует семейство минимальных поверхностей S_θ, пересекающих единичную сферу вдоль кривой C под постоянным углом $\omega - \theta$, где θ — угол, образованный касательными к кривым C_0 и C_θ в соответствующих точках. При $\theta = \omega$ автор получает, как частный случай, известный результат Коссера о связи между минимальными поверхностями, вписанными в сферу, и кривыми постоянного кручения; при $\theta = \omega - \pi/2$ получается результат Цицейки, устанавливающий связь между минимальными поверхностями, ортогональными сфере, и кривыми постоянной кривизны. К. С. Сибирский

10249. Пара поверхностей в точечном соответствии, при котором поверхности Софуса Ли пересекаются по распавшейся линии. Онищук Н. М., Докл. 7-й Научн. конференции, посвящ. 40-летию Великой Октябрьск. соц. революции. Вып. 2. Томск, Томский ун-т, 1957, 10

Доказана теорема существования. В. С. Малаховский

10250. Проективные свойства дуалистических преобразований. Сперанца (Proprietà proiettive delle trasformazioni dualistiche. Speranza Francesco), Boll. Unione mat. ital., 1957, 12, № 4, 552—565 (итал., рез. англ.)

Пусть π и $\bar{\pi}$ — совмещенные плоскости. Дуалистическое преобразование T устанавливает соответствие между точками плоскости π и прямыми плоскости $\bar{\pi}$. В статье

соответствующие точки и прямые предполагаются неинцидентными. Обозначим x, y координаты точки A и u, v координаты прямой a. Уравнения T будут: $u = f(x, y)$, $v = \varphi(x, y)$.

Некоторой кривой на плоскости π, проходящей через точку A, соответствует совокупность прямых на плоскости π, содержащая прямую a (огибающая). Касательная (луч) в точке перегиба A кривой называется характеристикой, если ей соответствует на прямой a точка возврата (характеристическая точка) огибающей. Совокупности характеристик (характеристической кривой) плоскости π соответствует совокупность огибающих плоскости $\bar{\pi}$. Пусть A', a' между собой соответствуют и до малых 2-го порядка бесконечно близки к A, a соответственно. Считая луч AA' и луч, проектирующий точку A в точку (a,a'), соответствующими друг другу, приходим к проективитету Γ в пучке прямых с центром в точке A (Enea Bortolotti, Rend. Accad. naz. Lincei, 1938, (6), 28, 224—229). Уравнение Γ: $\{\varphi_y + x[f\varphi_y]\}\bar{k}\bar{k} + \{\varphi_x + x[f\varphi_x]\}\bar{k} + \{f_y + y[\varphi f_y]\}k + \{f_x + y[\varphi f_x]\} = 0$, где $f_x = \partial f / \partial x$, $[\varphi f_x] = \varphi f_x - f\varphi_x$ и аналогично, $k, \bar{k}$ — угловые коэффициенты соответствующих лучей. Автор говорит об общей паре (A, a) ассоциированных элементов, параболической и идентической сообразно с тем, имеет ли проективитет Γ два двойных элемента, один или сколько угодно. Автор называет канонической кривую, которая касается во всех своих точках одного из двойных лучей проективитета Γ. Дуалистическое преобразование общего типа, если канонические линии образуют сеть; параболического типа, когда из канонических линий составляется одно семейство. В статье доказывается, что T не существует, если канонические кривые неопределенны. Автор выводит свойства дуалистических преобразований, ограничиваясь преимущественно окрестностью 1-го порядка порождающей пары (A, a), применяет метод внешних форм Картана. Получена полная система инвариантов для преобразования T каждого типа. При преобразовании T общего типа прямые канонические линии сливаются с характеристическими. Канонические линии прямые, если они совпадают с характеристическими. Два преобразования T, отличающиеся друг от друга гомографией в окрестности 2-го порядка соответствующих пар элементов, оба представляют собой гомографию. Преобразование T, осуществляющее проективное изгибание канонической сети (на основании предыдущих свойств состоящей из прямых) зависит от четырех произвольных функций одного аргумента. Дается построение такого преобразования. Приводятся свойства дуалистических преобразований параболического типа, аналогичные отмеченным. Автор решает задачи: 1) по данной сети линий на плоскости найти такие дуалистические преобразования, для которых данная сеть каноническая, 2) по данному семейству линий на плоскости найти параболические преобразования, для которых кривые семейства канонические. Автор нашел аналитическое представление преобразования параболического типа с прямыми каноническими линиями. К. Н. Тихоцкий

ГЕОМЕТРИЯ n-МЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА. ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

10251. **Определение ковариантной производной псевдотензоров.** Георгиу (Determinarea derivatei covariante a pseudotensorilor. Gheorghiu Octavian Em.), Bul. ştiinţ. şi tehn. Inst. politehn. Timişoara, 1956, 1, № 1, 27—30 (рум.; рез. франц., русск.)

Поскольку в группах членов, следующих за частной производной в известном выражении ковариантной производной псевдотензора $H^{\alpha_1\dots\alpha_s}_{\beta_1\dots\beta_t}$, компоненты псевдотензора входят линейно и однородно, автор рассматривает эти члены как линейную комбинацию некоторого дифференциально-геометрического образования $\Delta^{i_1\dots i_s q_1\dots q_t}_{p_1\dots p_s j_1\dots j_t}$ и компонент $H^{\cdots}_{\cdots}$ и устанавливает закон (8) преобразования компонент $\Delta^{\cdots}_{\cdots}$ при преобразовании координат, исходя из закона преобразования ковариантной производной.

В общем случае закон (8) зависит от множителя, входящего в формулы преобразования компонент псевдотензора, и лишь в случае абсолютного тензора является собственно дифференциально-геометрическим объектом второго класса.

Автор не отмечает, что объект $\Delta^{\cdots}_{\cdots}$ лишь на тензорное слагаемое отличается от определенной комбинации произвольных объектов аффинной связности Γ^i_{jk}, Γ_k с символами Кронекера δ^i_j, которую легко получить, вынося $H^{\cdots}_{\cdots}$ за скобки в упомянутых ранее группах членов. В заметке отсутствуют ссылки на работы Бомпьяни, (Bompiani E., Atti Accad. naz. Lincei. Rend., ser. 8, 1946, 1, № 5) и Коссу (РЖМат, 1957, 854, 857), имеющие тесную связь с исследованием автора и касающиеся тензоров 2-го порядка. Б. Л. Лаптев

10252. **О тензорных конкомитантах несимметрического тензора $g_{\mu\nu}$.** Икэда, Абэ (On tensorial concomitants of a non-symmetric tensor $g_{\mu\nu}$. Ikeda Mineo, Abe Shingo), Tensor, 1957, 7, № 1, 59—69 (англ.)

В четырехмерном пространстве рассматривается вопрос об алгебраических свойствах тензоров второй валентности, являющихся конкомитантами несимметрического тензора $g_{\mu\nu}$, т. е. тензоров, компоненты которых являются функциями $g_{\mu\nu}$. Симметрическая и антисимметрическая части тензора $g_{\mu\nu}$, определитель которого $g \neq 0$, обозначены соответственно $h_{\mu\nu}$ и $k_{\mu\nu}$, а их определители — h и k. Предполагается, что сигнатура $h_{\mu\nu}$ имеет вид $---+$ (следовательно, $h < 0$). Поднятие и опускание индексов производится с помощью тензора $h_{\mu\nu}$ и ему взаимного. При доказательствах компоненты $g_{\mu\nu}$ рассматриваются в канонических системах координат, в которых они принимают определенную каноническую форму двух видов, соответственно случаям $g \neq h$ или $g = h$, как это показал Главатый (Hlavaty V., J. Rational Mech and Analysis, 1952, 1, 539—562). Отыскивается ряд тензоров второй валентности, через которые каждый конкомитант такого рода может быть выражен линейно со скалярными коэффициентами. Такой «полный» ряд состоит при $k \neq 0$ из четырех линейно независимых (со скалярными коэффициентами) тензоров; $h_{\mu\nu}$, $k_{\mu\nu}$, $\underset{2}{k}_{\mu\nu}$ и $\underset{3}{k}_{\mu\nu}$, а при $k = 0$ из трех первых, вышеуказанных. Здесь $\underset{1}{k}_{\mu\nu} = k_{\mu\nu}$, $\underset{(n+1)}{k}_{\mu\nu} = k^\sigma_\mu \underset{(n)}{k}_{\sigma\nu}$. Скалярные конкомитанты оказываются функциями $\frac{g}{h}$ и $\frac{k}{h}$ (при $k=0$ соответственно функциями $\frac{g}{h}$). Далее строится путем повторного свертывания с k^λ_σ (соответственно с φ^λ_σ) ряд векторов $\underset{(n)}{V^\lambda} = k^\lambda_\sigma \underset{(n-1)}{V^\sigma}$ (соответственно $\underset{(-n)}{V^\lambda} = \varphi^\lambda_\sigma \underset{-n+1}{V^\sigma}$), исходящий из некоторого вектора $\underset{0}{V^\lambda}$, и изучаются

линейные зависимости между ними. В заключение рассмотрены приложения к единой теории поля. Предполагая, что гравитационный потенциал и напряжение электромагнитного поля представлены соответственно симметрическим и антисимметрическим тензорами второй валентности, конкомитантами $g_{\mu\nu}$, автор устанавливает, что гравитационный потенциал, представляет собою линейную комбинацию $h_{\mu\nu}$ и $\underset{2}{k}_{\mu\nu}$, а тензор электромагнитного поля — линейную комбинацию $k_{\mu\nu}$ и $\underset{3}{k}_{\mu\nu}$, причем различному выбору коэффициентов соответствуют различные представления основных физических величин. Поскольку контравариантный вектор не может быть конкомитантом $g_{\mu\nu}$, как это установлено автором, вектор плотности заряда тока не может зависеть от $g_{\mu\nu}$ только функционально. Он, следовательно, должен быть дифференциальным конкомитантом. Б. Л. Лаптев

10253. О тензорных конкомитантах несимметрического тензора $g_{\mu\nu}$. II. Икэда (On tensorial concomitants of a non-symmetric tensor $g_{\mu\nu}$, II. Ikeda Mineo), Tensor, 1957, 7, № 2, 117—127 (англ.)

Настоящая работа представляет собою продолжение и обобщение совместной работы Икэда и Абэ (реф. 10252). Рассматриваются конкомитанты, являющиеся псевдотензорами, т. е. величинами, закон преобразования которых подобен тензорному, но содержит дополнительный множитель, равный соответственно: $\frac{\Delta}{|\Delta|}$ (W — тензоры), $|\Delta|^{-w}$ (тензорные плотности веса w), $\frac{\Delta}{|\Delta|^{w+1}}$ (тензорные Δ-плотности веса w), где $\Delta = \det\left(\frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\nu}}\right)$, а w — целое число. Исследуются псевдотензорные конкомитанты второй валентности. Тензорные плотности обозначаются готическими буквами, соответственно чему детерминанты предыдущей работы g, h и k получают обозначение $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{k}$. Кроме тензоров $\underset{(n)}{k}_{\mu\nu}$, рассмотренных ранее, вводятся W-тензоры:

$$\widetilde{k}_{\mu\nu} \equiv \underset{1}{\widetilde{k}}_{\mu\nu} = \frac{1}{2!}\,\widetilde{e}_{\mu\nu\alpha\beta}k^{\alpha\beta}\sqrt{-\mathfrak{h}},$$

$$\underset{(n)}{\widetilde{k}}_{\mu\nu} = \widetilde{k}_{\mu\alpha}\widetilde{k}^{\alpha\beta}\underset{(n-2)}{\widetilde{k}}_{\beta\nu} \quad (n = 3,5,\ldots),$$

где $\widetilde{e}_{\mu\nu\alpha\beta}$ антисимметрическая единичная величина ($\widetilde{e}_{1234} = 1$). Установлено, что тензорный (соответственно W-тензорный) конкомитант однозначно представим следующим образом: $ph_{\mu\nu} + qk_{\mu\nu} + r\underset{2}{k}_{\mu\nu} + \widetilde{\omega}s\widetilde{k}_{\mu\nu}$ (соответственно $\widetilde{\omega}ph_{\mu\nu} + \widetilde{\omega}qk_{\mu\nu} + \widetilde{\omega}r\underset{2}{k}_{\mu\nu} + s\widetilde{k}_{\mu\nu}$), где p,q,r,s — скаляры, а ω является W-скаляром, принимающим значение $+1$ или -1, соответственно тому является ли система правой или левой. В случае $\mathfrak{k} = 0$ члены с $\widetilde{\omega}$ должны быть отброшены. Аналогичное представление имеет место для тензорных плотностей (соответственно тензорных Δ-плотностей): $\mathfrak{p}h_{\mu\nu} + \mathfrak{q}\underset{2}{k}_{\mu\nu} + \mathfrak{x}k_{\mu\nu} + \widetilde{\omega}\mathfrak{s}\widetilde{k}_{\mu\nu}$ (соответственно $\widetilde{\omega}\mathfrak{p}h_{\mu\nu} + \widetilde{\omega}\mathfrak{q}k_{\mu\nu} + \widetilde{\omega}\mathfrak{r}\underset{2}{k}_{\mu\nu} + \mathfrak{s}\widetilde{k}_{\mu\nu}$), причем в случае $\mathfrak{k} = 0$ члены с $\widetilde{\omega}$ тоже следует отбросить. Здесь $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \mathfrak{x}, \mathfrak{s}$ — скалярные плотности. Конкомитант, являющийся скалярной плотностью (соответственно Δ-плотностью) представим в виде $s(-\mathfrak{h})^{w/2}$ (соответственно $\widetilde{\omega}s(-\mathfrak{h})^{w/2}$), где s — скалярная функция от $\mathfrak{q}/\mathfrak{h}$, $\mathfrak{k}/\mathfrak{h}$. В заключение обсуждается вопрос о представлении электромагнитного напряжения в единой теории поля с помощью антисимметрического W-тензора $\widetilde{F}_{\mu\nu}$. Найдено его выражение через $k_{\mu\nu}$ и $\widetilde{k}_{\mu\nu}$, которое совпадает с выражением, предложенным ранее автором в релятивистской теории поля (реф. 10252). Новая теория поля, основанная на замене тензора $k_{\mu\nu}$ W-тензором и, следовательно, на представлении электромагнитного напряжения обыкновенным тензором, как указывает автор, разработана им и находится в печати

Б. Л. Лаптев

10254. Свойства внутренних производных первого и высших порядков единичного нормального вектора кривой в римановом пространстве. Нагаратхнамма (Properties of the intrinsic derivatives of the first and higher orders of the unit normal vector for a curve in a Riemannian space. Nagarathnamma H. S.), Proc. Nat. Inst. Sci. India, 1957, A23, № 1, 40—49 (англ.)

Рассматриваются кривые C на гиперповерхности V_n (координаты точки $x^1, \ldots, x^n$) в римановом V_{n+1} (координаты точки $y^1, \ldots, y^{n+1}$). Применяя внутреннее (intrinsic) дифференцирование по данному в V_n направлению e^i

$$\frac{\delta}{\delta s} = (\ )_{;i}\,e^i,$$

где символ «; i» обозначает ковариантную производную по x^i, и используя формулы Френе для C, как для кривой в V_n или в V_{n+1}, автор устанавливает ряд соотношений между кривизнами, их производными и другими дифференциально-геометрическими характеристиками C.

Выводится ряд свойств (13 теорем и несколько следствий) асимптотических линий, линий кривизны, геодезических линий и др. Приведем в виде примера несколько результатов автора.

Условие того, что кривая C обладает постоянным кручением в V_{n+1}, заключается в ортогональности $\delta^2\theta_1/\delta s^2$ и θ_2, где θ_1 и θ_2 — орты главных нормалей к C в V_{n+1}. Для асимптотической линии отношение кручений в V_n и в V_{n+1} равно взятому с минусом отношению косинуса угла между первой в V_{n+1} и второй в V_n нормалями к косинусу угла между второй в V_{n+1} и первой в V_n нормалями. Сумма квадратов $\delta N/\delta s$ в данной точке для n взаимно перпендикулярных направлений в V_n является инвариантом. Некоторые из теорем автора повторяют известные результаты (Схоутен И. Н., Стройк Д. Дж., Введение в новые методы дифференциальной геометрии. Т. II, ГИИЛ, М., 1948. Перевод с нем. изд. 1938 г. Раздел II, § 8).

Б. Л. Лаптев

10255. О приводимых симметрических пространствах аффинной связности. Фудзимото (On decomposable symmetric affine spaces. Fujimoto Atsuo), J. Math. Soc. Japan, 1957, 9, № 1, 158—170 (англ.)

Вначале доказывается следующая теорема, аналогичная известной теореме Картана о симметрических римановых пространствах: Если задана группа G_{n+r} следующей структуры:

$$[X_i, X_j] = C^{\alpha}_{ij}Y_{\alpha},\ [Y_{\alpha}, Y_{\beta}] = C^{\gamma}_{\alpha\beta}Y_{\gamma},\ [X_i, Y_{\alpha}] = C^{j}_{i\alpha}X_j$$

($i, j, k = 1, \ldots, n$; $\alpha, \beta, \gamma = n+1, \ldots, n+r$), причем подгруппа ее, соответствующая образующим Y_{α}, не содержит нормального делителя G_{n+r}, то существует

n-мерное симметрическое пространство аффинной связности A_n, группа аффинных коллинеаций которого содержит подгруппу, изоморфную G_{n+r}.

С помощью этой теоремы изучаются приводимые симметрические пространства (приводимыми называются пространства, допускающие систему координат, в которой $\Gamma^{k_1}_{i_1 j_1} = \Gamma^{k_1}_{i_1 j_1}(x^{i_1})$, $\Gamma^{k_2}_{i_2 j_2} = \Gamma^{k_2}_{i_2 j_2}(x^{i_2})$ $(i_1, j_1, k_1 = 1, \ldots, p$; $i_2, j_2, k_2 = p+1, \ldots, n)$, а все Γ^k_{ij} с разнородными индексами равны нулю). Доказано, что симметрическое пространство приводимо тогда и только тогда, когда существует система координат, в которой все компоненты тензора кривизны с индексами разного рода равны нулю. Найдено необходимое и достаточное условие, налагаемое на группу G_{n+r}, обеспечивающее приводимость пространства; рассмотрены (с точки зрения приводимости) случаи, когда G_{n+r} проста и полупроста. Ю. И. Левин

10256. Метрические связности и параллельные поля плоских элементов в многообразиях четырех измерений. Дебевер (Connexions métriques et champs d'éléments plans parallèles dans les variétés à quatre dimensions. Debever R.), Bull. cl. sci. Acad. roy. Belgique, 1958, 44, № 1, 56—61 (франц.)

Доказана теорема: для четырехмерного риманова многообразия с заданным на нем полем D_2 двумерных касательных элементов существует класс метрических связностей, зависящий от двух произвольных векторов λ_i и μ_i, для которых поле D_2 является параллельным (причем под метрической связностью имеется в виду такая аффинная связность, в которой метрический тензор данного риманова пространства ковариантно постоянен). Найден вид коэффициентов связности этого класса. Рассмотрены различные частные случаи, соответствующие определенной фиксации векторов λ_i и μ_i. Ю. И. Левин

10257. Обобщение дескриптивных коллинеаций в пространстве K-протяжений. Су Бу-цин (A generalization of descriptive collineations in a space of K-spreads. Su Buchin), Math. Nachr., 1957, 16, № 3-4, 227—232 (англ.)

Дескриптивные коллинеации или автоморфизмы пространств K-протяжений Дугласа (Douglas J., Math. Ann., 1931, 105, 707—773) изучались Дэйвисом (Davies E. T., J. London Math. Soc., 1943, 18, 100—107), Кларком (Clark R. S., Proc. Cambridge Philos. Soc., 1945, 61, 210—223), автором (Trans. Amer. Math. Soc., 1947, 61, 495—507) и др. Обобщение, вносимое рассматриваемым исследованием, касается вектора инфинитезимильного смещения

$$\bar{x}^i = x^i + \xi^i \delta t.$$

Если в предшествующих работах предполагалось, что ξ^i является функцией только координат $\xi^i = \xi^i(x)$, то в настоящей работе смещение рассматривается в пространстве опорных элементов (x^i, p^i_α), т. е. $\xi^i = \xi^i(x, p)$, где p обозначает совокупность векторов $p^i_\alpha = \partial x^i / \partial u^\alpha$, касательных к параметрическим линиям K-протяжений, определяющую направление касательной K-плоскости. Соответственно обобщается и понятие производной Ли.

Условия интегрируемости определяющего уравнения $\Delta\Pi^i_{jk} = 0$ и при обобщенной постановке вопроса сохраняют свою прежнюю форму.

Подобное обобщение было ранее достигнуто автором в вопросах о геодезическом смещении в финслеровом пространстве (Acad. sinica. Sci. Record, 1949, 2, № 3, 220—226) и об экстремальном смещении в картановом пространстве (Acta Math., 1951, 85, 99—116). Б. Л. Лаптев

10258. Специальный класс тензорных связностей. Коссу (Una particolare classe di connessioni tensoriali. Cossu A.), Rend. mat. e applic., 1956, 15, № 1-2, 190—210 (итал.)

Тензорные связности L^{ik}_{rst}, введенные для ковариантных или контравариантных тензоров 2-го ранга Бомпьяни (Bompiani E., Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1946, ser. 8, 1, № 5) и изученные затем автором (РЖМат, 1957, 857), который ввел также связности E^{ik}_{rst} для смешанных тензоров (РЖМат, 1957, 854), подвергаются в настоящей работе дальнейшему исследованию.

Привлекая вектор-функции, построенные с помощью тензоров 2-го ранга, автор находит некоторые геометрические истолкования для ассоциированных с тензорным переносом объектов. При исследовании тензора кривизны тензорной связности автор вносит поправку в одну свою работу (РЖМат, 1958, 1540), показав, что контрактированный тензор кривизны всегда является ротором вектора. Далее рассмотрены интегрируемые переносы.

Основную часть работы составляет исследование тензорной связности типа

$$L^{ik}_{rst} = M^i_{rt}\,\delta^k_s + N^k_{st}\,\delta^s_r, \qquad (1)$$

где M^i_{rt} и N^i_{st} — объекты аффинной (векторной) связности. Автор находит выражения средней тензорной связности и кручения через соответствующие объекты векторных связностей (полусумму и полуразность):

$$\Gamma^{ik}_{rst} = L^i_{st}\delta^k_s + L^k_{st}\delta^i_r,$$

$$\Omega^{\ldots ik}_{rst\ldots} = P^{\ldots i}_{rt.}\delta^k_s - P^{\ldots k}_{st.}\delta^i_r,$$

и показывает, что они не меняются при сохраняющих строение (1) преобразованиях M и N:

$$\bar{M}^i_{rt} = M^i_{rt} + \delta^i_r\varphi_t, \quad \bar{N}^i_{rt} = N^i_{rt} - \delta^i_r\varphi_t.$$

Отсюда выводятся некоторые геометрические следствия. Далее устанавливаются признаки интегрируемости переноса для связности (1) и условия эквивалентности двух тензорных связностей типа (1). Аналогичные результаты выводятся для тензорных связностей E^{ik}_{rst}, соответствующих переносу смешанных тензоров.

Б. Л. Лаптев

10259. О внутренней геометрии кубического поляритета. Кириллов Г. И., Уч. зап. Казанск. ун-та, 1957, 117, № 2, 11—15

В теории нормализаций показывается, что всякому дифференцируемому соответствию между точками и гиперплоскостями проективного пространства взаимно однозначно соответствуют геометрии пространства проективно-евклидовой связности. В частности, поляритетам относительно алгебраических гиперповерхностей соответствуют специальные классы эквипроективных связностей (Норден А. П., Пространства аффинной связности, ГИТТЛ, 1950, § 60).

В реферируемой работе исследуется связность, определяемая поляритетом относительно образа 3-го порядка (гиперповерхности или кривой при $n = 2$), она характеризуется тем, что она а) эквиаффинна, б) проективно-евклидова и в) тензор p_{ij}, связанный с тензором кривизны известным соотношением, характеризующим эквипроективную связность $R_{ijk}{}^l = -\delta^l_{[k}P_{j]i}$, удовлетворяет дифференциальному уравнению $\nabla_r\nabla_k p_{ij} = 30 p_{r(k}p_{ij)}$.

Рассматривается геометрия 2-го рода того же кубического поляритета и приводится геометрическая ха-

рактеристика кривых 3-го порядка, определяющих такую среднюю риманову связность связностей 1-го и 2-го рода, которая имеет постоянную гауссову кривизну

А. П. Норден

10260 Д. Поверхности с плоскими образующими, вдоль которых касательная плоскость постоянна. Савельев С. И. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., МГУ, М., 1958

ГЛОБАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ МНОГООБРАЗИЙ И ОБОБЩЕННЫЕ ПРОСТРАНСТВА

10261. О погружении пространства проективной связности. Такэда (On the imbedding of a projective space of connection. Takeda Kusuo), Yokohama Math. J., 1959, 11, № 2, 95—105 (англ.)

Известно, что если кривые n-мерного, $n>3$, пространства проективной связности допускают наложения четвертого порядка на свои развертки в касательном пространстве, то пространство проективной связности сводится к проективному пространству. В реферируемой работе автор видоизменяет подход к задаче погружения пространства проективной связности P_n в проективное пространство S_{n+N}, пользуясь понятием доминирующей проективной связности (Kanitani J., Japan. J. Math., 1947, 19) и устанавливая, что при порядке наложимости кривых P_n на их развертки в пространстве доминирующей проективной связности, равном четырем, последнее пространство становится плоским; при порядке наложения, равном трем, исчезает только кручение (но, вообще говоря, не кривизна) этого пространства. В. В. Рыжков

10262. Проблема вложения римановых многообразий. Наш (The imbedding problem for Riemannian manifolds. Nash John), Ann. Math., 1956, 63, № 1, 20—63 (англ.)

Автором получены замечательные результаты о C^k-изометричных вложениях римановых многообразий класса C^k в евклидово пространство. Основные результаты этой статьи следующие.

Теорема 1. Пусть $\mathfrak{M}$ — компактное многообразие, аналитически вложенное в евклидово пространство E_m. Пусть $z_\alpha(x_1, \ldots, x_n)$ $(\alpha = 1, \ldots, m)$ — функции определяющие вложение $\mathfrak{M}$ в E_m, и линейные уравнения

$$\sum_\alpha \frac{\partial z_\alpha}{\partial x_i}\, \dot z_\alpha = 0,$$

$$-2\sum_\alpha \frac{\partial^2 z_\alpha}{\partial x_i\, \partial x_j}\, \dot z_\alpha = \dot g_{ij}$$

(g_{ij} — вариация метрического тензора вложения $\mathfrak{M}$) относительно $\dot z_\alpha$ не сингулярны во всех точках вложения. Тогда, если G — симметрический ковариантный тензор класса C^k $(3 \leqslant k \leqslant \infty)$, компоненты которого вместе с производными до третьего порядка достаточно малы, то посредством определенного изменения вложения $\mathfrak{M}$ (при котором измененное вложение принадлежит классу C^k) разность между метрическими тензорами измененного и начального вложений будет равна G. Для доказательства этого предложения автор построил специальные сглаживающие операторы, определенные на многообразии $\mathfrak{M}$, а также специальный рекуррентный процесс изменения вложения, посредством которого можно достичь нужного малого изменения метрики. Далее, легко заметить, что если $g_z = \sum_\alpha \frac{\partial z_\alpha}{\partial x_i}\frac{\partial z_\alpha}{\partial x_j}$ и $g_y = \sum_\beta \frac{\partial y_\beta}{\partial x_i}\frac{\partial y_\beta}{\partial x_j}$ — два метрических тензора вложений $\mathfrak{M}$ в E_m и E_p, то функции $z_1 z_2, \ldots, z_m, y_1, y_2, \ldots, y_p$ вместе определяют вложение $\mathfrak{M}$ в $E_m \times E_p$, причем метрический тензор этого вложения равен $g_z + g_y$. Используя этот факт, автор строит в E_m, $m = s + 2n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{5}{2}n$, Z-вложение $\mathfrak{M}$, и в E_p, $p = 2(s+n)$ Y-вложение $\mathfrak{M}$, причем сумма метрических тензоров $g_z + g_y$ этих вложений вместе с производными до третьего порядка включительно достаточно мало отличаются от реализуемого метрического тензора g. Полученный результат позволяет применить теорему 1 и сформулировать теорему 2: Каждое компактное n-мерное риманово многообразие с положительно определенной метрикой класса C^k $(3 \leqslant k \leqslant \infty)$ может быть C^k-изометрично вложено в любую малую часть евклидова пространства размерности $4s + 4n = (n/2)(3n + 11)$. Автором получена теорема 3, относящаяся к вложению некомпактных римановых многообразий: Каждое риманово n-мерное многообразие класса C^k может быть C^k-изометрично вложено в любую малую часть евклидова пространства размерности

$$\frac{3}{2}n^3 + 7n^2 + \frac{11}{2}n.$$

Э. Г. Позняк

10263. Вложение цилиндра и евклидовой плоскости в сферические пространства. Блануша (Immersion du cylindre et du plan euclidiens dans des espaces sphériques. Blanuša Danilo), Glasnik mat.-fiz. i astron., 1954, 9, № 3-4, 161—166 (франц.; рез. хорв.)

В сферическом пространстве S_3, которое определяется уравнением $\Sigma x_i^2 = 1$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ в R_4, рассматривается поверхность

$$x_1 = \Phi(\rho)\sin[f(\rho) + \sigma],\ x_2 = \Phi(\rho)\cos[f(\rho) + \sigma],$$
$$x_3 = \Psi(\rho)\sin[g(\rho) - \sigma],\ x_4 = \Psi(\rho)\cos[g(\rho) - \sigma];$$

функции $\Phi(\rho)$ и $\Psi(\rho)$ берутся из $C^{(1)}$ и подчинены условиям: $\Phi^2 + \Psi^2 = 1$, $0 < \Phi' < \Psi$,

$$\lim_{\rho\to-\infty}\Phi(\rho) = 0, \qquad \lim_{\rho\to+\infty}\Phi(\rho) = 1.$$

Например,

$$\Phi(\rho) = \operatorname{th} e^\rho,\ \Psi(\rho) = \frac{1}{\operatorname{ch} e^\rho},$$

Если

$$f(\rho) = \int_0^\rho \frac{\sqrt{[\Psi(\rho)]^2 - [\Phi'(\rho)]^2}}{\Phi(\rho)}\, d\rho,$$

$$g(\rho) = \int_0^\rho \frac{\Phi(\rho)\sqrt{[\Psi(\rho)]^2 - [\Phi'(\rho)]^2}}{[\Psi(\rho)]^2}\, d\rho,$$

то $ds^2 = d\rho^2 + d\sigma^2$; доказывается, что в этом случае рассматриваемая поверхность в целом изометрична бесконечному круглому цилиндру. Поверхность

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\Phi(\rho)\sin[\sqrt{2}f(\rho) + \sqrt{2}\sigma],$$

$$x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\Phi(\rho)\cos[\sqrt{2}f(\rho) + \sqrt{2}\sigma],$$

$$x_3 = \Psi(\rho)\sin[g(\rho) - \sigma], \quad x_4 = \Psi(\rho)\cos[g(\rho) - \sigma],$$

$$x_5 = \frac{1}{\sqrt{2}}\Phi(\rho),$$

лежащая в сферическом пространстве $S_4 \subset R_5$, изометрична евклидовой плоскости. Н. В. Ефимов

10264. Изометричное вложение евклидова листа Мёбиуса бесконечной ширины в евклидово пространство R_5. Блануша (Le plongement isométrique de la bande de Möbius infiniment large euclidienne dans un espace R_5. Blanuša Danilo), Bull. internat. Acad. yougosl. sci. et beaux-arts, 1954, № 12, 7—10 (франц.)

Дается построение двумерной поверхности в R_5, изометричной листу Мёбиуса, который внутренним образом получается путем отождествления накрест противоположных сторон бесконечной полосы. Если расстояние между сторонами полосы равно 2π, то искомая поверхность дается уравнениями:

$$x_1 = f(\rho), \quad x_2 = \rho\cos\frac{u}{2}, \quad x_3 = \rho\sin\frac{u}{2},$$

$$x_4 = \frac{1}{2}\sqrt{4-\rho^2}\cos u, \quad x_5 = \frac{1}{2}\sqrt{4-\rho^2}\sin u$$

($0 \leqslant u \leqslant 2\pi$, $-2 < \rho < +2$), где $f(\rho)$ подчинена некоторым условиям. Например, можно взять $f(\rho) = \frac{1}{\sqrt{4-\rho^2}}$; в этом случае получается алгебраическая поверхность. Н. В. Ефимов

10265. Дифференциальная геометрия пространств с аналитическими расстояниями. Мацумото (The differential geometry of spaces with analytic distances. Matsumoto Makoto), Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, 1957, A. Math., 30, № 2, 119—141 (англ.)

Рассматривается n-мерное аналитическое многообразие, в котором для любых двух точек p, q определена функция — расстояние $d(p, q)$, удовлетворяющая условиям: 1) $d(p, q) = 0$, если $p = q$; 2) $d(p, q) = d(q, p)$. Предполагается, что существуют координатные окрестности, содержащие рассматриваемые пары точек $p(x)$, $q(y)$, причем квадрат расстояния выражается как аналитическая функция x и y. Это пространство S^n названо автором пространством с аналитическими расстояниями, а аналитическая функция

$$g = g(x, y) = -\frac{1}{2}[d(x, y)]^2$$

названа фундаментальной. В рассматриваемой работе исследованию подвергаются дифференциально-геометрические свойства S^n. Вводится понятие тензора, который может иметь индексы как относительно (x), так и относительно (y); обозначения ясны из примера:

$$\overline{T}^{i\,(k)}_{j} = T^{a\ (c)}_{b}\,\frac{\partial\bar{x}^i}{\partial x^a}\,\frac{\partial x^b}{\partial\bar{x}^j}\,\frac{\partial\bar{y}^k}{\partial y^c}.$$

Строятся векторы

$$g_i = \partial g/\partial x^i, \tag{1}$$

$$g_{(i)} = \partial g/\partial y^i \tag{2}$$

и релятивный метрический тензор

$$g_{i\,(j)} = \frac{\partial^2 g}{\partial x^i\,\partial y^j}. \tag{3}$$

В дальнейшем предполагается, что рассматриваемая область собственная, т. е. в ней $\det|g_{i\,(j)}| \neq 0$. Поднятие и опускание индексов осуществляется с помощью тензора (3), свертывание тензора — с помощью векторов (1) и (2). Полученные тензоры называются сопряженными исходным. Вводится релятивное ковариантное дифференцирование двух родов, относительно x^i (обозначаемое; i) и относительно y^i (обозначаемое; (i)), с помощью соответственных объектов связности

$$\Gamma^h_{ik} = \frac{\partial g_{i\,(j)}}{\partial x^k}\,g^{h\,(j)}; \quad \Gamma^{(h)}_{(i)\,(k)} = \frac{\partial g_{j\,(i)}}{\partial y^k}\,g^{j\,(h)}.$$

Лемма Риччи выполняется $g_{i\,(j);\,k} = 0$, $g_{i\,(j);(k)} = 0$. Ковариантные дифференцирования одного какого-либо рода оказываются перестановочными. При рассмотрении альтернированных смешанных ковариантных производных появляются релятивные тензоры кривизны $S^i_{jk\,(l)} = \frac{\partial\Gamma^i_{jk}}{\partial y^l}$, $S^{(i)}_{(j)\,(k)\,l} = \frac{\partial\Gamma^{(i)}_{(j)\,(k)}}{\partial x^l}$. Установлены тождества, которым удовлетворяют тензоры кривизны, в том числе аналоги тождеств Бианки. Пространство C^n постоянной релятивной кривизны характеризуется следующим образом:

$$S_{i\,(j)\,k\,(l)} = \rho\,(g_{i\,(j)}\,g_{k\,(l)} + g_{k\,(j)}\,g_{i\,(l)}),$$

где $\rho = \text{const}$. Пространству S^n можно ассоциировать риманово пространство V^n так, чтобы квадрат расстояния точек (x) и $(x + dx)$ был одинаков в обоих пространствах. Фундаментальный тензор и символы Кристоффеля ассоциированного пространства таковы:

$$g_{ij}(x) = g_{i\,(j)}(x, x) = -g_{i;\ j}(x, x);$$

$$\{^i_{jk}\} = \Gamma^i_{jk}(x, x) = \Gamma^{(i)}_{(j)\,(k)}(x, x).$$

Тензор кривизны

$$R^i_{j\,kl} = S^i_{j\ k\,(l)}(x, x) - S^i_{j\ l\,(k)}(x, x).$$

Риманово V^n, ассоциированное C^n, является пространством постоянной кривизны ρ. Понятие параллельного перенесения в S^n вектора $u^{(i)}(x)$ (взятого в ассоциированном V^n) из точки (x_0) в точку (x) вводится следующим образом: $v^i = u^{(a)}(x_0)\,g_{j\,(a)}(x, x_0)\,g^{ij}(x)$.

Аналогично переносятся тензоры. При бесконечно малой разности $x - x_0$ перенесение сводится к параллелизму Леви — Чивита в V^n. Если условие неизменности длины вектора при параллельном переносе выполняется $g_{(a)\,(b)} = g_{i\,(a)}\,g_{j\,(b)}\,g^{ij}$, то пространство S^n называется допускающим параллелизм и обозначается P^n. Автор обнаружил многие интересные его свойства, например, рефлективность параллельности двух векторов, равенство угла между ними нулю или π, релятивное ковариантное постоянство тензора g_{ij}, обращение релятивного тензора кривизны в нуль и, следовательно, локальная евклидовость ассоциированного V^n и др. Далее рассмотрены некоторые вопросы теории кривых, в частности аналоги главного нормального вектора и геодетик, изучены их свойства в пространствах P^n и C^n, изучены некоторые свойства замкнутых P^n в целом. В заключение рассмотрены пространства $(S^n)^2$ — «квадраты пространств S^n», в которых точки определяются $2n$ координатами $(x^1, \ldots, , \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^n)$, причем преобразование координат x и y происходит раздельно. Компоненты тензора $T_{\alpha\beta}$ в таком пространстве будут подразделяться на 4

фактора T_{ij}, $T_{i\,(j)}$, $T_{(i)\,j}$, $T_{(i)\,(j)}$, причем тензор $T_{\alpha\beta}$ называется продолжением (extension) какого-либо из факторов. В пространстве $(P^n)^2$ продолжение определяется однозначно по любому из факторов путем образования сопряженных тензоров. Так, например, продолжения метрического тензора g_{ij} и релятивного тензора $g_{i\,(j)}$ совпадают и дают фундаментальный тензор $g_{\alpha\beta}$ пространства $(P^n)^2$. Построив ковариантный дифференциал составного типа

$$T^{\cdots}_{\cdots\,|\,j} = T^{\cdots}_{\cdots;\,j} + T^{\cdots}_{\cdots;\,(a)}\, g^{b\,(a)} g_{bj}$$

(лемма Риччи для него тоже справедлива), автор показывает, что в пространстве $(P^n)^2$ продолжения $T^{\alpha}_{\beta|\gamma}$ тоже определяются однозначно по любому из факторов. Б. Л. Лаптев

10266. Геометрия пространств с ареальной метрикой. Су Бу-цин (The geometry of spaces with areal metrics. Su Buchin), Math. Nachr., 1957, 16, № 5-6, 281—287 (англ.)

Ареальное пространство (т. е. n-мерное пространство с m-мерной ареальной метрикой) определяется следующим образом. Пусть

$$x^i = x^i(u^\alpha) \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n;\ \alpha, \beta = 1, 2, \ldots, m)$$

— уравнения m-мерного дифференцируемого многообразия V_m, лежащего в арифметическом пространстве S_n, и пусть «объем» некоторой m-мерной области $R \subset V_m$ задан m-мерным интегралом

$$V = \int_R F(x^i, p^k_\alpha)\,(du)^m,$$

где $p^k_\alpha = \partial x^k/\partial u^\alpha$, $(du)^m = du^1 du^2 \ldots du^m$

и функция $F(x^i, p^k_\alpha)$ удовлетворяет некоторым условиям инвариантности. Построением геометрии таких пространств занимались Дейвис, Дебевер, Кавагути, Вагнер и др. Все теории ареальных пространств в основном основаны на введении метрического тензора, при помощи которого в пространстве определялась аффинная связность. Проблему определения пространств метрического класса решил Тандаи (РЖМат, 1955, 411). Он доказал, что лишь пространства Римана, Финслера и Картана являются пространствами метрического класса.

Ареальное пространство называется пространством субметрического класса, если существует метрический тензор g_{ij}, $\det \| g_{ij} \| \neq 0$, такой, что

$$\det \| g_{\alpha\beta} \| = F^2, \quad p^\alpha_i = g_{ij}\, p^j_\beta\, g^{\alpha\beta},$$

где

$$g_{\alpha\beta} = g_{ij}\, p^i_\alpha\, p^j_\beta, \qquad p^\alpha_i = \frac{\partial \log F}{\partial p^i_\alpha}, \quad g^{\alpha\gamma} g_{\gamma\beta} = \delta^\alpha_\beta.$$

В работе автор рассматривает аффинные связности ареального пространства, связанные с первой и второй вариациями фундаментального интеграла, налагая следующие условия на фундаментальную функцию F:

[I] $F_{.i} - F\,|^\alpha_h\, p^j_\alpha\, \Gamma^h_{ij} = 0$ (уравнения связности пространства),

[II] $\Gamma^h_{jk}\,|^\alpha_i\, P^j_\alpha\, p^k_h = 0$,

где

$$F_{.i} = \frac{\partial F}{\partial x^i}, \quad p^k_h = p^k_\alpha\, p^\alpha_h, \qquad F\,|^\alpha_i = \frac{\partial F}{\partial p^\alpha_i}.$$

Доказана теорема: Уравнения связности выполняются в ареальном пространстве субметрического класса, если аффинная связность этого пространства евклидова.

Для случая $\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{kj}$ найдены формулы для выражения первой и второй вариации фундаментального интеграла, причем формула для $\delta^2 V$ обобщает формулу Дейвиса для риманова пространства (Davies E. T., Quart J. Math. (Oxford Ser.), 1942, 13, 58—64). Библ. 42 назв. В. И. Близникас

МЕТРИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ГЕОМЕТРИИ

10267. Об одной проблеме комбинаторной геометрии. Данцер (Über ein Problem aus der kombinatorischen Geometrie. Danzer L.), Arch. Math., 1957, 8, № 5, 347—351 (нем.)

Доказывается следующее предложение: Если расстояние любых двух точек конечного множества точек евклидовой плоскости больше или равно единице, а толщина любого пятиугольника, образованного из точек множества, не более единицы, то и толщина всего множества не более единицы. При этом под толщиной множества точек понимается наименьшая толщина покрывающей его полосы, ограниченной прямой, проходящей через две точки множества, и другой прямой, ей параллельной, проходящей через некоторую третью точку множества. Из теоремы вытекает следующее равносильное ей предложение: Если конечная система непересекающихся равных кругов евклидовой плоскости обладает свойством, что любые 5 кругов этой системы пересекаются одной прямой, то вся система кругов пересекается одной прямой. Показано, что 5 нельзя заменить меньшим числом. А. Г. Школьник

10268. Дифференциалы с интегрируемым квадратом на открытых римановых поверхностях. Альфорс (Square-integrable differentials on open Riemann surfaces. Ahlfors Lars V.), Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1956, 42, № 10, 758—760 (англ.)

Автор высказывает мысль, что условия, налагаемые на открытые римановы поверхности, сближающие их с замкнутыми поверхностями (например, несуществование на них гармонических или аналитических дифференциалов того или иного типа), можно заменять такими ограничениями, налагаемыми на рассматриваемые классы дифференциалов (с интегрируемым квадратом, см. Неванлинна, Теория униформизации РЖМат, 1954, 2571 К; 1956, 7313 К), которые носили бы характер требований ортогональности и исчезали бы для соответствующих более узких классов поверхностей.

В связи с этим в работе введен ряд подпространств пространства дифференциалов с интегрируемым квадратом и рассмотрены соотношения ортогональности и разложимости для этих подпространств.

Приводим некоторые из определений. Пусть W — риманова поверхность, Γ — гильбертово пространство дифференциалов с интегрируемым квадратом на W. Замыкания подпространств Γ, образованных замкнутыми и точными формами, обозначаются через Γ_c и Γ_e. Верхний индекс $^\perp$ обозначает переход к ортогональному дополнению в Γ, индекс * — переход от $\omega = p\,dx + q\,dy$ к $\omega^* = -q\,dx + p\,dy$. Подпространства Γ_{eo} и Γ_{co} вводятся как $\Gamma_{eo} = \Gamma^{*\perp}_{c}$, $\Gamma_{co} = \Gamma^{*\perp}_{c}$.

Класс гармонических форм определяется соотношением $\Gamma_h = \Gamma_c \cap \Gamma^*_c$, класс $\Gamma_h \cap \Gamma_{co}$ обозначается через Γ_{ho}; $\Gamma_{he} = \Gamma_h \cap \Gamma_e$.

Для конечносвязной римановой поверхности Ω определяется класс дифференциалов Шоттки Γ_s, как дифференциалов, допускающих гармоническое продолжение в удвоение Ω. Для произвольной римановой поверхности W класс дифференциалов Шоттки Γ_s определяется с помощью надлежащей аппроксимации этой поверхности подобластями Ω (конечносвязными). Получаются разложения $\Gamma_s = Cl(\Gamma_{ho} + \Gamma^*_{ho})$, $\Gamma_s^{\perp} = \Gamma_{he} \cap \Gamma_{he}^*$. Рассмотрены также некоторые классы дифференциалов, связанные с одномерной группой гомологии W, и соотношения между ними.

В. В. Рыжков

ВЫПУКЛЫЕ МНОГООБРАЗИЯ

10269. Некоторые признаки жесткости для поверхностей вращения. Сунь Хэ-шен, Докл. АН СССР, 1957, 116, № 5, 758—761

Рассматривается односвязный сегмент S выпуклой поверхности вращения, ограниченный параллелью L и находящийся в идеальном контакте вдоль L с абсолютно жестким соосным конусом вращения Σ. Пусть θ — угол между S и Σ вдоль L. Показывается, что S жесткий тогда и только тогда, когда θ не принадлежит некоторой последовательности значений θ_k, $\theta \neq \theta_k$, $k = 1, 2, \ldots$; $\frac{\pi}{2} < \theta_k < \tilde{\theta} < \pi$ и $\theta_k \to \frac{\pi}{2}$ при $k \to \infty$.

Указывается геометрический смысл угла $\tilde{\theta}$. В двух примерах точно подсчитаны значения критических углов θ_k. На примере двусвязного сегмента двуполостного гиперболоида вращения показывается, что аналогичные связи на поверхностях отрицательной кривизны, вообще говоря, нежестки и неустойчивы. Указываются дополнительные достаточные условия устойчивой жесткости.

Б. В. Боярский

10270. Интегральная кривизна криволинейных полигонов. Бай Чжэн-го (On the integral curvature of a curvilinear polygon. Pa Chen-kuo), Scientia sinica, 1958, 7, № 1, 11—18 (англ.)

Перевод статьи автора (РЖМат, 1958, 4107).

Автор доказывает следующие предложения:

1. Пусть C — криволинейный полигон с h угловыми точками, внутренние углы которых равны $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$. Тогда интегральная кривизна C удовлетворяет неравенству $\oint_{(c)} k ds \geqslant \theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_n - (n-2)\pi$, причем равенство осуществляется только для плоских полигонов, все стороны которых являются выпуклыми дугами.

2. Пусть C — замкнутая кривая на поверхности S. Если C не имеет кратных точек (за исключением конечного числа угловых точек) и область (D), ограниченная C на S, аналитическая, то $\iint_D K ds \leqslant \oint_{(C)} (k - \tau) ds$, где τ — геодезическая кривизна C, а K — полная кривизна S. Указанные результаты обобщаются на случай пространств большего числа измерений.

Э. Г. Позняк

10271. Геометрия полуокрестности кривой в двумерном многообразии ограниченной кривизны. Борисов Ю. Ф., Тр. 3-го Всес. матем. съезда. 1, М., АН СССР, 1956, 142—143

Автореферат доклада. Рассматривается кривая L в многообразии ограниченной кривизны, гомеоморфная отрезку, с поворотом ограниченной вариации, не имеющая точек с поворотом π. Для нее рассматривается полуокрестность и специальные координаты в ней. Указываются приложения к изопериметрической задаче (в многообразиях с нерегулярной метрикой).

В. В. Рыжков

10272. Усиление изопериметрического неравенства гиперболической плоскости. Оман (Eine Verschärfung der isoperimetrischen Ungleichung in der hyperbolischen Ebene. Ohmann D.), Arch. Math., 1957, 8, № 5, 355—359 (нем.)

Пусть A — ограниченное замкнутое множество на гиперболической плоскости кривизны $\varkappa = -1$ и $F(A)$ — лебегова мера множества A. Интеграл Минковского по сечениям U для множества A определяется по формуле

$$U = \liminf_{\tau \to 0} \frac{1}{\tau} (F(A_\tau) - F(A)),$$

где A_τ — множество точек, удаленных от A не более чем на $\tau > 0$. Мера W множества прямых, пересекающих A, определяется следующим образом. Пусть P — некоторая фиксированная точка, g — прямая, пересекающая A, точка H — основание перпендикуляра, опущенного из P на g, и h — длина отрезка PH. Если A_0 — множество концов перпендикуляров, опущенных из P на всевозможные прямые, пересекающие A, то

$$W = \int_{A_0} \operatorname{ct\,h}\, h dH.$$

Если A — выпуклая замкнутая область, то $U = W$. Доказываются следующие неравенства:

$$W \leqslant U; \tag{1}$$

$$W^2 \geqslant F(A)(4\pi + F(A)). \tag{2}$$

Эти соотношения доказываются сначала для множеств, представимых как сумма конечного числа выпуклых областей, а затем распространяются на произвольные ограниченные замкнутые множества.

Автор указывает, что приведенное доказательство (1) справедливо также для сферической и евклидовой геометрии. Доказательство соотношения (2) может быть перенесено только для доказательства соотношения, аналогичного (2), в евклидовом случае и не переносится для сферического случая.

А. Л. Вернер

10273. Краткий вывод одной оценки для ширины при покрытии выпуклыми телами. Оман (Kurzer Beweis einer Abschätzung für die Breite bei Überdeckung durch konvexe Körper. Ohmann D.), Arch. Math., 1957, 8, № 2, 150—152 (нем.)

В работе с помощью симметризации Штейнера доказывается следующая теорема: Если выпуклое тело K n-мерного евклидова пространства покрыто m выпуклыми телами $K_1, K_2, \ldots, K_m$, то при произвольном выборе m направлений $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$ имеет место неравенство

$$\sum_{\mu=1}^{m} \frac{b(K_\mu, \xi_\mu)}{b(K, \xi_\mu)} \geqslant 1;$$

здесь $b(K_\mu, \xi_\mu)$ и $b(K, \xi_\mu)$ — ширина тела K_μ (соответственно K) в направлении ξ_μ (т. е. расстояние между перпендикулярными ξ_μ опорными гиперплоскостями тела). Эта теорема обобщает теорему, высказанную, но не доказанную Бангом (ср. РЖМат, 1957, 2668), согласно которой если выпуклое тело K покрыто полосами, ограниченными параллельными гиперплоскостями, перпендикулярными векторам $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$, и имею-

щими ширину $h_1, h_2, \ldots, h_m$, то

$$\sum_{\mu=1}^{m} \frac{h_\mu}{b(K, \xi_\mu)} \geqslant 1;$$

тем более она обобщает полученную Бангом оценку для суммы ширин, покрывающих выпуклое тело K полос, решающую «проблему дощечек» Тарского (см. указанный выше реферат). И. М. Яглом

10274. Теорема о распространении аддитивных функционалов, определенных на выпуклых многогранниках в евклидовом пространстве. Фолланд (Ein Fortsetzungssatz für additive Eipolyederfunktionale im euklidischen Raum. Volland Walter), Arch. Math., 1957, 8, № 2, 144—149 (нем.)

Пусть $\mathfrak{M}_0$ — класс выпуклых многогранников в k-мерном евклидовом пространстве, содержащий также пустое множество Λ, и $\mathfrak{M}$ — класс произвольных многогранников в этом пространстве, тоже содержащий Λ. Пусть φ_0 (φ) — однозначное отображение $\mathfrak{M}_0$ ($\mathfrak{M}$) в некоторую аддитивную абелеву группу $\mathfrak{F}$ такое, что $\varphi_0(\Lambda) = 0$ ($\varphi(\Lambda) = 0$), где 0 — нуль группы $\mathfrak{F}$. φ_0 (φ) называется аддитивным, если

$$\varphi_0(A \cup B) + \varphi_0(A \cap B) = \varphi_0(A) + \varphi_0(B),$$
$$[A, B, A \cup B \in \mathfrak{M}_0];$$
$$\varphi(A \cup B) + \varphi(A \cap B) = \varphi(A) + \varphi(B), \quad [A, B \in \mathfrak{M}].$$

Автор доказывает следующую теорему: Для каждого аддитивного отображения φ_0 класса $\mathfrak{M}_0$ в группу $\mathfrak{F}$ существует единственное аддитивное отображение φ класса $\mathfrak{M}$ в $\mathfrak{F}$, являющееся распространением отображения φ_0.

Построение отображения φ по отображению φ_0 проводится способом, предложенным Хадвигером (реф.). В качестве примера применения доказанной теоремы строятся эйлерова характеристика и интеграл Минковского по сечениям для множеств класса $\mathfrak{M}$. А. Л. Вернер

10275. Интегральные теоремы в кольце, образованном выпуклыми телами. Хадвигер (Integralsätze im Konvexring. Hadwiger H.), Abhandl. Math. Semin. Univ. Hamburg, 1956, 20, № 3-4, 136—154 (нем.)

Пусть $\mathfrak{K}_0$ — класс ограниченных выпуклых замкнутых множеств в k-мерном евклидовом пространстве E_k. Автор называет кольцом, образованным выпуклыми телами $\mathfrak{K}$ (Konvexring) минимальное кольцо множеств над $\mathfrak{K}_0$, т. е. каждое множество $A \in \mathfrak{K}$ может быть представлено как сумма конечного числа выпуклых множеств $A_\nu \in \mathfrak{K}_0$; $\mathfrak{K}$ включает также пустое множество Λ.

Вещественный функционал φ, определенный на $\mathfrak{K}$, называется аддитивным, если

$$\varphi(A) + \varphi(B) = \varphi(A \cup B) + \varphi(A \cap B), \quad [A, B \in \mathfrak{K}], \text{ и}$$
$$\varphi(\Lambda) = 0.$$

В работе даются абстрактные характеристики различных аддитивных функционалов, определенных на $\mathfrak{K}$. Например, приводятся следующие теоремы:

Теорема 1. Пусть φ — аддитивный, инвариантный относительно движения и непрерывный функционал, заданный на $\mathfrak{K}$. Тогда существуют такие $k+1$ постоянных коэффициентов a_ν $[-\infty < a_\nu < +\infty; \nu = 0,1,\ldots,k]$, что

$$\varphi(A) = \sum_0^k a_\nu W_\nu(A).$$

Теорема 2. Пусть φ — аддитивный, инвариантный относительно движения и монотонный функционал, заданный на $\mathfrak{K}$. Тогда существуют такие $k+1$ неотрицательных постоянных коэффициента a_ν $[0 \leqslant a_\nu < +\infty$, $\nu = 0,1,\ldots,k]$, что $\varphi(A) = \sum_0^k a_\nu W_\nu(A)$. Здесь $W_\nu(A)$ — интеграл Минковского по сечениям. А. Л. Вернер

См. также: 9439, 9443, 9444, 9466, 9673, 9674, 9676, 9677, 9678, 9716, 9939, 9941

ЧИСЛЕННЫЕ И ГРАФИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

Редактор *В. К. Саульев*

10276. Численное интегрирование между 0 и 1 уравнения неоднородной вибрирующей струны с закрепленным концом 2-го порядка, зависящего от параметра $y'' + \lambda(2 - x^2)y = 0$, $y(0) = 0$, $2y(1) + y'(1) = 0$. Циллер (Intégration numérique entre o et 1 de l'équation paramétrique du second ordre: $y'' + \lambda(2 - x^2)y = 0$ avec les conditions: $y(0) = 0$, $2y(1) + y'(1) = 0$ corde vibrante non homogène l'un des bouts étant tenu, l'autre soutenu élastiquement. Ziller A.), Publs scient. et techn. Ministère air, 1955, N. T., № 52, 61—66 (франц.)

Для приближенного решения уравнения

$$y'' + \lambda(2 - x^2)y = 0, \; y(0) = 0, \; 2y(1) + y'(1) = 0 \quad (1)$$

автор предлагает с помощью подстановки $y(x) = xz(x)$ преобразовать его в уравнение

$$xz'' + 2z' = -\lambda(2x - x^3)z, \quad (2)$$

z и z' разложить в ряд Тейлора в окрестности $x = 0$ (все производные четного порядка в точке $x = 0$ в силу начального условия равны 0). Тогда граничные условия представятся в виде ряда

$$0 = 2y(1) + y'(1) = 3z(1) + z'(1) = P(\lambda) = 3z_0 + \frac{5}{2}z_0'' + \frac{7}{24}z_0^{IV} + \ldots \quad (3)$$

Параметр λ выбирается так, чтобы ряд (3) сходился. Так как коэффициенты в разложении (3) быстро убывают, для приближенного определения нужного λ можно ограничиться n первыми членами: $P_n(\lambda) = 0$.

Описывается процесс определения требуемого λ и приводится расчет, когда в рядах Тейлора удерживаются члены до x^{10}. В. Н. Кублановская

10277. Об одном методе приближенного решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений. Чернышенко Э. А., Укр. матем. ж., 1958, 10, № 1, 89—100

Исследуется метод осреднения Ю. Д. Соколова применительно к задаче Коши для обыкновенного дифференциального уравнения p-го порядка, которое может не содержать производных неизвестной функции нескольких порядков, непосредственно предшествующих наивысшему.

Рассматривается уравнение p-го порядка ($p \geqslant 1$) с заданными начальными условиями

$$f^{(p)} = V(t, f, f', f'', \ldots, f^{(q-1)}), \qquad (1 \leqslant q \leqslant p),$$
$$f(t_0) = a_0,\ f'(t_0) = a_1,\ \ldots,\ f^{(p-1)}(t_0) = a_{p-1}$$

n-ое приближение определяется по формуле

$$f_n(t) = P(t) + \underbrace{\int_{t_0}^{t} dt \ldots \int_{t_0}^{t}}_{p} V(t, f_{n-1} + \alpha_n^{(0)}, f_n' + \alpha_n', \ldots$$
$$\ldots, f_{(n-1)}^{(q-1)} + \alpha_n^{(q-1)})\, dt,$$

где $P(t) = \sum_{i=0}^{p-1} a_i \frac{(t-t_0)}{i!}$ — полином, удовлетворяющий тем же начальным условиям, а

$$\alpha_n^{(i)} = \frac{1}{h} \int_{t_0}^{t_0+h} [f_n^{(i)}(t,\ h) - f_{n-1}^{(i)}(t, h)]\, dt \ (i = 0,1, \ldots, q-1)$$

и h — некоторое положительное число.

Доказывается сходимость последовательных приближений к решению уравнения. Оценка погрешности производится по формуле:

$$|f^{(i)}(t) - f_n^{(i)}(t)| \leqslant |f^{(i)}(t) - f_{n+1}^{(i)}(t)| + |f_{n+1}^{(i)}(t) - f_n^{(i)}(t)| =$$
$$= \int_{t_0}^{t} dt \ldots \int_{t_0}^{t} \left(V(t, f, f', \ldots, f^{(q-1)}) - V(t, f_n + \alpha_{n+1}^{(0)},\right.$$
$$\left. f_n' + \alpha_{n+1}^{(1)}, \ldots, f_n^{(q-1)} + \alpha_{n+1}^{(q-1)})\right) dt| +$$
$$+ \left|\int_{t_0}^{t} dt \ldots \int_{t_0}^{t} \{V(t, f_n + \alpha_{n+1}^{(0)}, \ldots, f_n^{(q-1)} + \alpha_n^{(q-1)}) -\right.$$
$$\left. - V(t, f_{n-1} + \alpha_n^{(0)}, \ldots, f_{n-1}^{(q-1)} + \alpha_n^{(q-1)})\} dt\right|.$$

Приводятся примеры. М. А. Мертвецова

10278. О численном решении совместных дифференциальных уравнений при некоторых условиях. Адати (On the numerical solution of the simultaneous differential equations under some conditions. II. Adachi Ryuzo), Kumamoto J. Sci., 1954, **A2**, № 1, 24—39) (англ.)

В более ранней статье (тот же журнал, 1954, **1**, № 3, 14—33, № 4, 28—30) автор рассмотрел совместные обыкновенные дифференциальные уравнения, решения которых на пересечении с данной дугой должны удовлетворять некоторым условиям. В настоящей работе описано несколько полностью решенных подобных примеров и рассмотрен вопрос (на который автор не дал вполне удовлетворительного ответа) практической проверки сходимости процесса. W. E. Milne

Перевод из Math. Revs, 1956, **17**, № 5, 539.

10279. Применение момента интегральной кривой для численного решения дифференциальных уравнений. Фреи (Integrálgörbék momentumainak felhasználása differencialegyenletek numerikus megoldásánál. Frei Tamás), Magyar tud. akad. alkalm. mat. int. kozl., 1953, **2**, 395—414 (венг.; рез. русск., нем.)

При численном решении начальных и краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений автор упорядочивает данному дифференциальному уравнению систему интегральных уравнений; интегральные уравнения затем приближенно заменяются с помощью формул механических квадратур линейными алгебраическими уравнениями. Из множества таких уравнений выбираются некоторые комбинации, которые и применяются для решения проблемы.

Утверждается и показывается на примере, что при подходящем выборе названных уравнений в случае начальной задачи ошибки округления и квадратурные ошибки могут частично компенсироваться.

Описанный в статье метод особенно рекомендуется для решения краевых задач в случае дифференциальных уравнений высокого порядка. А. Békéssy

10280. Применение матричного исчисления в статике стержней и пластинок. Рожа (A matrix-számítás alkalmazása rudak és lemezek sztatikájaban. Rózsa Pál), Magyar tud. akad. Mat. kutató int. közl., 1956 (1957), **1**, № 4, 593—621 (венг.; рез. русск., нем.)

Дифференциальные уравнения $y^{(4)} = p(x)/JE$ и $\Delta\Delta W = t(x, y)/N$ с разнообразными краевыми условиями обычным образом заменяются разностными уравнениями. Получены явные формулы для обратных матриц систем разностных уравнений, которые представляют приближенно соответствующие функции Грина. В. К. Саульев

10281. Оценка ошибки, получающейся при решении задачи Дирихле для уравнения Лапласа методом конечных разностей. Сутюшева Ш. Ш., Тр. Ин-та матем. и механ. АН УзССР, 1957, вып. 21, 91—95

Приводятся без доказательства оценки максимумов модулей производных до 3-го порядка решения задачи Дирихле, выраженные только через кривизну границы области и производные граничной функции. Из этих оценок выводятся (при различных предположениях о гладкости границы и граничной функции) оценки ошибки при решении задачи Дирихле методом сеток. Более точные оценки ошибки получены Е. А. Волковым (РЖМат, 1958, 1574).

Примечание референта. В статье указано лишь, что величина R, входящая в оценки, не превосходит минимума радиуса кривизны границы области, и ошибочно опущены остальные ограничения на R, сформулированные в статье автора (РЖМат, 1957, 6686). А. Ф. Филиппов

10282. Замечание о девятиточечных аналогах уравнения Лапласа. Гринспан (Note on nine-point analogues of Laplace's equation. Greenspan Donald), J. Franklin Inst., 1957, **264**, № 6, 453—455 (англ.)

Пользуясь предположениями и определениями своей статьи (РЖМат, 1958, 3279), автор доказывает, что для уравнения Лапласа $u_{xx} + u_{yy} = 0$ не существует 9-точечной аппроксимации седьмого порядка, существенно отличной от аппроксимации вида $-20u_0 + 4\sum_{i=1}^{4} u_i + \sum_{i=5}^{8} u_i = 0$, где u_i ($i = 0,1,2, \ldots, 8$) — значения искомой функции в узлах квадратной сетки.

Д. Ф. Давиденко

10283. Об одном разностном методе решения уравнения Пуассона с осевой симметрией. Давиденко Д. Ф., Докл. АН СССР, 1958, **118**, № 6, 1066—1069

Применение полученных ранее (РЖМат, 1957, 5931) автором разностных формул для решения уравнения Лапласа к уравнению Пуассона. Н. П. Жидков

10284. Метод релаксации. Котал (Relaxationsmethode. Kotal Miroslav), Österr. Ingr-Arch., 1957, **11**, № 2, 93—102 (нем.)

Заменяя уравнения Лапласа и Пуассона разностными уравнениями, автор решает полученные системы алгебраических уравнений известным методом релаксации. Подробно рассмотрены вопросы краевых условий для различных релаксационных фигур (линейное и параболическое интерполирование), а также ме-

тод счета при наличии сингулярных точек. В качестве примера дается расчет поля трехфазного генератора.
Н. Я. Лященко

10285. О сходимости метода прямых при различных схемах его применения к решению первой краевой задачи для дифференциальных уравнений эллиптического типа. Костюкович Е. Х., Уч. зап. Гродненск. пед. ин-т, 1957, вып. 2, 60—78

Отмечается, что при решении эллиптических уравнений методом прямых в случае криволинейных границ соответствующая краевая задача для системы обыкновенных дифференциальных уравнений может не иметь решения.

Предлагается каждые три соседних уравнения системы метода прямых рассматривать лишь на некотором общем для них отрезке. При этом система решается методом последовательных приближений. Доказывается сходимость метода. Н. П. Жидков

10286. Численное решение уравнения возмущения линейного течения. Элайасен (Numerical solutions of the perturbation equation for linear flow. Eliasen Erik), Tellus, 1954, 6, 183-191 (англ.)

Автор рассматривает двумерные линейные течения и при помощи численного метода получает некоторые результаты, в частности условия для их неустойчивости. Он раньше при помощи некоторых аппроксимаций получил разложения для течения вблизи начала движения. Правдоподобность этого эвристического метода подтверждается рассмотрением течения Куэтта. Статья заканчивается дискуссией о симметрической гармонической функции скорости, которая относится к неустойчивости баротропной атмосферы.
H. H. Goldstine

Перевод из Math. Revs., 1955, 16, № 4, 407.

10287. Численное решение классической задачи мембраны. Герберич, Сангрен (Codes for the classical membrane problem. Gerberich C. L., Sangren W. C.), J. Assoc. Comput. Machinery 1957, 4, № 4, 477—486 (англ.)

Приведены таблицы наименьших собственных значений задачи мембраны: $\nabla^2\varphi + \lambda\varphi = 0$; $\varphi = 0$ на границе, для различных областей (видов L, T, креста, и т. д.), просчитанных на вычислительных машинах. Для аппроксимации оператора Лапласа $\nabla^2\varphi$ использовано выражение $h^{-2}(\varphi_{i+1,j}+\varphi_{i-1,j}+\varphi_{i,j+1}+\varphi_{i,j-1}-4\varphi_{ij})$. Для ускорения сходимости итеративного процесса использованы полиномы Чебышева (Flanders D. A., Shortly G., I. Appl. Phys., 1950. 21, 1326—1332). Юань Чжао-дин

10288. О численном решении одного класса уравнений в частных производных. Дуглас (On the numerical solution of a class of partial differential equations. Douglas A. S.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1958, 54, № 2, 214—218 (англ.)

Для отыскания собственных функций уравнения

$$\Delta^2 P + 2(E-V)P = 0, \qquad (1)$$

где E — постоянная, V — известная функция и граничные условия нулевые, рассматривается уравнение

$$\nabla^2 Y + 2(E^*-V)Y = \partial Y/\partial t, \qquad (2)$$

для которого решается та же краевая задача. Если совокупность собственных функций P_n уравнения (1) полна и $E_0 \leqslant E^* \leqslant E$, где E_0 и E_1 — первые собственные значения, то

$$Y \to P_0 \exp\{2(E^*-E_0)t\} \qquad (3)$$

при $t \to \infty$, чем и пользуются для отыскания P_0.

Разобраны различные известные численные методы решения уравнения (2) и их пригодность для быстрого получения предельного решения. Приведены практические результаты сравнения методов для случая одномерной задачи. Н. П. Жидков

10289. Применение метода электроаналогии при приближенном решении уравнения Фурье. Н у м е р о в С. Н. В сб.: Межвуз. конференция по применению моделирования в электротехн. задачах и матем. моделирования. М., 1957, 157—158

Для решения двумерных уравнений Пуассона, получающихся при применении метода прямых к уравнению Фурье, предлагается электрическая модель, состоящая из трех наклеенных друг на друга листов электропроводной бумаги, геометрически подобных рассматриваемой области среды. На нижнем листе бумаги, сопротивление которого значительно меньше сопротивления двух других листов, реализуется распределение потенциала, соответствующего правой части уравнения. На границах верхнего листа бумаги, сопротивление которого значительно меньше сопротивления среднего, реализуется граничное условие. Тогда распределение потенциала на верхнем листе определит искомую функцию. В. К. Саульев

10290. Кручение трубы с квадратным сечением. Синг, Кэйхилл (The torsion of a hollow square. Synge J. L., Cahill W. F.), Quart. Appl. Math., 1957, 15, № 3, 217—224 (англ.)

Если сечение стержня—многосвязная область, то компоненты срезывающего напряжения суть

$$\mu\alpha\frac{\partial}{\partial y}\left(\psi-\frac{1}{2}r^2\right), \quad -\mu\alpha\frac{\partial}{\partial x}\left(\psi-\frac{1}{2}r^2\right),$$

где μ — жесткость, α — угол кручения, $r^2 = x^2 + y^2$ и $\psi(x, y)$ — гармоническая функция, равная $\frac{1}{2}r^2$ на внешнем контуре B_0 и $\frac{1}{2}r^2 + C_\lambda$ на внутреннем контуре B_λ, где константы C_λ определены из условия $\int_{B\lambda}\frac{\partial\psi}{\partial n}dB_\lambda = 0$. Функцией кручения $\psi(x, y)$ будет функция, сопряженная к $\psi(x, y)$.

Дается приближенный метод определения функций $\psi(x,y)-\frac{1}{2}r^2$ и $\varphi(x, y)$ для трубы, поперечное сечение которой A, ограничено сторонами квадратов s и $\frac{1}{2}s$, а также верхней и нижней границами величины $\Gamma = \iint\left[x^2+y^2-\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2-\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2\right]dA$. Сечение триангулируется и каждой узловой точке приписывается вес b' (соответственно b''). По значениям b' (соответственно b'') определяется функция $\psi-\frac{1}{2}r^2$ (соответственно φ). Сами же веса b', b'' определяются соответствующими системами разностных уравнений, которые решаются итерационным способом. Одновременно вычисляются верхняя и нижняя границы для Г. Приводится схема вычислений на машине СЕАК и числовой пример. Я. М. Каждан

10291. Численное решение проблемы многократного рассеяния электромагнитной радиации. Чжу, Черчилл (Numerical solution of problems in multiple scattering of electromagnetic radiation. Chu Chiao-Min, Churchill S. W.), J. Phys. Chem., 1955, 59, № 9, 855—863 (англ.)

10292. О сходимости решения разностного уравнения к решению дифференциального уравнения. Жуков А. И., Докл. АН СССР, 1957, 117, № 2, 174—176

Указывается, что в пространстве Z целых аналити-

ческих функций $\varphi(z)$ (со сходимостью, равномерной в каждой ограниченной области) условия сходимости решения разностного уравнения к решению дифференциального уравнения значительно шире, чем обычные условия Куранта, накладываемые на отношение шагов сетки (Курант, Фридрихс, Леви, Успехи матем. наук, 1940, вып. 8, 125—160). Доказательства не приводятся.

Пусть область определения линейного непрерывного оператора A в пространстве Z содержит все многочлены от z и все экспоненты e^{az}; пусть вместе с каждой функцией $\varphi(z)$ она содержит все ее сдвиги $\varphi(z+h)$ и производную $\varphi'(z)$; a и h — любые комплексные числа. Пусть для любого h оператор A перестановочен с оператором сдвига E^h ($E^h\varphi(z) \equiv \varphi(z+h)$). Пусть D — оператор дифференцирования, $a_k = (Az^k)|_{z=0}$, тогда

$$A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k!} D^k;\ u(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k!} z^k$$

— целая функция. Если $a_0 \neq 0$, то $\ln u(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\chi_k}{k!} z^k$

Пусть оператор A_τ, зависящий от действительного параметра τ, удовлетворяет изложенным выше требованиям, и, кроме того, $a_0(\tau) \neq 0$, $\chi_k/\tau \to c_k$ при $\tau \to 0$; $c_k = 0$ при $k > p \geqslant 0$. Тогда при $n \to \infty$, $\tau = t/n$ последовательность операторов $(A_\tau)^n$ сходится к оператору, переводящему функцию $\varphi_0(z)$ в функцию $\varphi(t, z)$, удовлетворяющую уравнению

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \sum_{k=0}^{p} = \frac{c_k}{k!} \frac{\partial^k \varphi}{\partial z^k} \qquad (1)$$

и начальному условию $\varphi(0, z) = \varphi_0(z)$. В частности, если

$$\varphi(t+\tau, z) = A_\tau \varphi(t, z) = \sum_{|m| \leqslant M} b_m(t, h)\, \varphi(t, z+mh), \qquad (2)$$

где τ, h — шаги сетки, $h = h(\tau) \to 0$ при $\tau \to 0$, и оператор A_τ удовлетворяет приведенным выше условиям, то при $\tau \to 0$ решение разностного уравнения (2) сходится к решению дифференциального уравнения (1).

А. Ф. Филиппов

10293. Конференция по матричным вычислениям. (Conference on matrix computations. (Wayne State Univ. Sept. 3rd — 6th, 1957), J. Assoc. Comput. Machinery, 1957, 4, № 4, 520—523 (англ.)

Резюме 7 докладов. Форсайт доложил о полиномиальной аппроксимации функции $y(x)$ на прямой в смысле минимизации $\int_{-\infty}^{+\infty} [y - P_n(x)]^2\, dw(x)$, проводившейся на машине СВАК методом разложения в ряд по ортогональным (в смысле $(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x)\, v(x)\, dw$) полиномам, которые последовательно строились по рекуррентным формулам. Хеллер рассматривал вопрос о влиянии порядка исправления неизвестных на сходимость итерации при использовании итерационных методов решения линейных систем; выделен случай решения систем, получающихся при применении сеточных методов приближенного решения уравнений в частных производных. Хенрич докладывая о применении метода Якоби вычисления собственных значений симметрической вещественной матрицы и его видоизменений. Кахан сравнивал методы численного решения уравнения $x = Bx + b$, $B = U + L$, $L = U^*$, $U = \|u_{ij}\|_{i,j=1}^{n}$; $u_{ij} = 0\ (i \leqslant j)$; $u_{ij} \geqslant 0\ (i > j)$: простую итерацию, зейделевскую и экстраполированную зейделевскую ($x^{(n+1)} = x^{(n)} + (1+\delta)(b + Lx^{(n+1)} + Ux^{(n)} - x^{(n)})$. Использование последнего метода выгодно в случае медленной сходимости итерационных процессов; рассмотрен вопрос об оптимальном выборе δ. Ланцош доложил об итерационном методе решения систем $Ax = b$, основанном на использовании полиномов Чебышева от A. Если A симметрична и положительно определена, метод дает хорошие результаты вплоть до значения $\sigma \approx 10^4$, где σ — отношение наибольшего собственного значения A к наименьшему. Рассмотрен и случай несимметричной A. Полной формулировки метода в резюме не дано. Доклад Ньюмана и Тодда посвящен практическому испытанию методов и программ обращения матриц. Витмейер усовершенствовал разработанные им ранее методы нахождения собственных значений самосопряженных краевых задач (в частности, задач об изгибе и кручении консоли переменного сечения).

М. Л. Бродский

10294. О распаде систем канонических уравнений строительной механики. Нарец Л. К., Тр. Таллинск. политехн. ин-та, 1957, А, № 121, 48 стр. илл.

Данная квадратная матрица путем умножения справа и слева на специальные матрицы приводится к распадающемуся, в частности диагональному и квазидиагональному, виду. Приводятся подробные примеры с шаблонами из области строительной механики. Библ. 28 назв.

В. К. Саульев

10295. Сравнение градиентных методов. Чжао Фан-сюн (Chao F. H.), Шусюэ сюэбао, Acta math. sinica, 1957, 7, № 1, 63—78 (кит.; рез. англ.)

Производится сравнение на числовых примерах некоторых простейших градиентных методов в одно- и двух-шаговом варианте, с точки зрения эффективности метода и объема вычислений на итерацию. В частности, рассмотрен предложенный автором метод, в котором минимизируется величина $p^2 = (A^2x, x)(x, x) - (Ax, x)^2$; доказана сходимость при условии достаточной близости начального приближения.

Б. А. Самокиш

10296. Эксперименты на табуляторе по решению линейных уравнений ускоренным градиентным методом. Форсайт, Форсайт (Punched-card experiments with accelerated gradient methods for linear equations. Forsythe A. I., Forsythe G. E.), Nat. Bur. Standards. Appl. Math. Ser., 1954, № 39, 55—69 (англ.)

На примере двух матриц 6-го порядка показывается эффективность предложенного ранее (Forsythe G. E., Motzkin T. S., Bull. Amer. Math. Soc., 1951, 57, 304—305) ускоренного градиентного метода. Показывается, что хотя «почти оптимальный» метод и меденнее сходится, чем ускоренный оптимальный, он значительно проще для программирования.

10297. Некоторые замечания о краковяновом исчислении и его применении в способе наименьших квадратов. Крастинь А. Ф., LatvPSR Zinātnu Akad. vēstis, Изв. АН ЛатвССР, 1958, № 2, 107—110 (рез. лат.)

Автор сравнивает применение понятий матричного и краковянового исчислений к изложению вопросов метода наименьших квадратов и делает вывод, что «поскольку все те удобства, которые в уравнительных вычислениях представляют краковяны, тем более достигаются применением более простых общих понятий линейной алгебры, следует предпочесть вычислительные методы линейной алгебры краковяновому исчислению».

В. К. Саульев

10298. О прямых методах решения проблемы собственных значений для матриц. Унгер (Über direkte Verfahren bei Matrizeneigenwertproblemen. Unger Heinz), Wiss Z. Techn. Hochschule Dresden, 1952, 1953, 2, № 3, 449—456 (нем.)

Развивается общий взгляд на группу точных методов решения проблемы собственных значений, использующих последовательные итерации начального вектора (метод Крылова, метод Хессенберга, метод минимальных итераций и др.).

Исследуется влияние на ход изучаемых процессов выбора начального вектора и канонической формы матрицы, определяющей задачу. В. Н. Фаддеева

10299. Метод ступенчатой итерации и родственные методы для решения алгебраической проблемы собственных значений. Бауэр (Das Verfahren der Treppeniteration und verwandte Verfahren zur Lösung algebraischer Eigenwertprobleme. Bauer Friedrich L.), Z. angew. Math. und Phys., 1957, 8, № 3, 214—235 (нем.; рез. англ.)

Дается описание двух алгорифмов для решения первичной проблемы собственных значений. Метод ступенчатой итерации (алгорифм A) таков: A — данная матрица, B_0 — некоторая матрица из l столбцов, $B_0 = \Gamma_0 R_0$. Здесь Γ_0 — матрица из l столбцов с нулевыми элементами сверху главной диагонали, B_0 — квадратная матрица l-го порядка с нулевыми элементами ниже главной диагонали. Строятся две последовательности матриц Γ_i и R_i прежнего строения, $A\Gamma_i = \Gamma_{i+1}R_{i+1}$. Тогда диагональные элементы матрицы $R = \lim_{i\to\infty} R_i$ дают l собственных значений матрицы A, причем соответствующие собственные векторы $U_j = \Gamma_i V_j$, где V_j — собственные векторы матрицы R. Факторизацию матрицы $A\Gamma_i$ можно осуществлять по методу исключения без явного вычисления элементов матриц R_i, за исключением диагональных. Доказывается три теоремы относительно сходимости процесса. Далее рассматривается модификация процесса (стабилизирующаяся итерация) и ее обобщение (алгорифм B).

При $l = n$ алгорифмы (A) и (B) связаны с LR-алгорифмом (РЖМат, 1956, 4916) и AP-алгорифмом (РЖМат, 1956, 4917). В. Н. Фаддеева

10300. Связи между некоторыми итерационными процессами в линейной алгебре. Бауэр (Zusammenhänge zwischen einigen Iterationsverfahren der linearen Algebra. Bauer F. L.), Ber. Internat. Math.-Kolloq., 1955 (1957), Nov., 99—111 (нем.)

Обзорный доклад, посвященный краткому описанию и сравнению некоторых итерационных методов для решения частной и полной проблемы собственных значений для матриц (ступенчатый степенной метод, LR-алгорифм, AP-алгорифм и др.) В. Н. Фаддеева

10301. Границы всех собственных значений эрмитовой матрицы с преобладающей главной диагональю. Берш-Зупан, Боттенбрух (Eine Methode zur Eingrenzung sämtlicher Eigenwerte einer hermiteschen Matrix mit überwiegender Hauptdiagonale. Borsch-Supan W., Bottenbruch H.), Z. angew. Math. und Mech., 1958, 38, № 5-6, 169—171 (нем.)

Для верхней D_k и нижней d_k границ любого собственного значения λ_k ($k = 1,2, \ldots, n$) n-мерной эрмитовой матрицы $A = (a_{ij})$ с преобладающей главной диагональю, у которой диагональные элементы расположены так, что

$$a_{11} \geqslant a_{22} \geqslant \ldots \geqslant a_{nn},$$

авторы дают следующие выражения:

$$D_k = \frac{a_{kk} + D_{k+1}}{2} + \sqrt{\frac{(a_{kk} - D_{k+1})^2}{4} + Q_k^2},$$

$$k = n-1, n-2, \ldots, 2,1;$$

$$D_n = a_{nn};$$

$$d_k = \frac{a_{kk} + d_{k-1}}{2} - \sqrt{\frac{(a_{kk} - d_{k-1})^2}{4} + q_k^2},$$

$$k = 2,3, \ldots, n;$$

$$d_1 = a_{11},$$

где $Q_k^2 = \sum_{j=k+1}^{n} |a_{kj}|^2$, $q_k^2 = \sum_{j=1}^{k-1} |a_{kj}|^2$.

Имеется два числовых примера. Н. Я. Лященко

10302. Некоторые замечания об обращении матриц. Синомия (Some notes on the process of reversing a matrix. Shinomiya Tetsuro), Proc. 5th Japan Nat. Congr. Appl. Mech., 1955, Tokyo, 1956, 481—484 (англ.)

Приводятся удобные на практике схемы (шаблоны) для обращения матриц 1) по формулам Крамера и 2) с использованием известных обратных матриц низшего порядка. В. К. Саульев

10303. Комбинированный градиентный метод Ньютона—Рафсона для решения систем уравнений. Харт, Моцкин (A composite Newton—Raphson gradient method for the solution of systems of equations. Hart William L., Motzkin Theodore S.), Pacif. J. Math., 1956, 6, № 4, 691—707 (англ.)

Для системы вещественных уравнений

$$f_j(x) = 0 \quad (x = x_1, \ldots, x_n)$$

и данного приближения x к ее решению $\hat{x}$ «комбинированная градиентная поправка» вводится так: $y = x + \rho\Delta x$, $\Delta x = \Sigma_{j=1}^{k} \eta_j \Delta_j x$, η_j — весовая последовательность, $\Sigma\eta_j = \omega$; $\Delta_j x_i = -f_j(x) f_{ij}(\xi) / w_j^2(\xi)$, $f_{ij} = \partial f_j / \partial x_i$, $w^2 = \Sigma_i f_{ij}^2$, $\Delta_j x$ имеет направление градиента f_j. Итеративный метод с такой рекуррентной формулой имеет линейную сходимость, если x^0, ξ — произвольные точки в δ-окрестности $\hat{x}$ ρ^m выбираются соответствующим образом, $0 < \rho^m < 2\frac{n}{\omega}$ $\left(\text{достаточно положить } \rho^{(m)} = \rho < \frac{2}{\omega}\right)$.

В случае линейной системы (не обязательно совместной) показано, что x^m сходится к ее решению в смысле наименьших квадратов.

Комбинирование поправок с весами η_j отличает этот метод от метода Качмажа (Kaczmarz), в котором делаются последовательные поправки. Метод Качмажа может дать лишь ограниченную последовательность, в то время как предлагаемый — всегда сходящуюся. Авторы предполагают распространить метод на неравенства и на комплексные уравнения. Б. А. Самокиш

10304. Ускорение итеративного процесса с порядком сходимости выше первого. Островский (A method of speeding up iterations with super-linear convergence. Ostrowski A. M.), J. Math. and Mech., 1958, 7, № 1, 117—120 (англ.)

Пусть $z_{k+1} = \varphi(z_k)$ — итеративный процесс, сходящийся к ζ, причем $\frac{\varphi(z) - \zeta}{(z-\zeta)^n} \to \alpha \neq 0, \infty$ при $z \to \zeta$.

Пусть $\psi(z) = \varphi(\varphi(z)) - \dfrac{(\varphi(z) - \varphi(\varphi(z)))^{n+1}}{(z - \varphi(z))^n}$. Доказывается, что при $n > 1$, $\dfrac{\psi(z) - \zeta}{(z-\zeta)^{n^2}} = o(|z - \zeta|)$.

А. Н. Балуев

10305. Итеративные вычислительные методы. Хестинс (Iterative computational methods. Hestenes Magnus R.), Communs Pure and Appl. Math., 1955, 8, № 1, 85—95 (англ.)

Краткий обзор некоторых итеративных методов. Дана общая формулировка градиентных методов, в том числе разработанного автором и Штифелем метода сопряженных градиентов. Показано, что метод Ньютона также является градиентным методом при специальной метрике. Указывается, что в задачах, связанных с дифференциальными уравнениями, градиент следует вычислять в соответствующих пространствах; например, для задачи на min $\iint f(x, y, u, p, q)\,dxdy$ в метрике, связанной с интегралом Дирихле $\iint (p^2 + q^2)\,dxdy$. Рассмотрен один прямой метод обращения матрицы. Б. А. Самокиш

10306. Метод средней точки в численном интегрировании. Хаммер (The midpoint method of numerical integration. Hammer Preston C.), Math. Mag., 1958, **31**, № 4, 193—195 (англ.)

Для выпуклой и непрерывной на $[x_0, x_1]$ функции $f(x)$ доказываются неравенства

$$h\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1/2}) \geqslant \int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx \geqslant \sum_{i=0}^{n} f(x_i) - \frac{h}{2}(f(x_0) + f(x_n));$$

$$\left| h\sum_{i=1}^{n-1} f(x_{i+1/2}) - \int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx \right| \leqslant \left| h\sum_{i=0}^{n} f(x_i) - \frac{h}{2}(f(x_0) + f(x_n)) - \int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx \right|.$$

В. К. Саульев

10307. О некоторых интегралах, встречающихся в гидродинамической задаче. Миллер (On certain integrals occurring in a hydrodynamical problem. Miller G. F.), Proc. Roy. Soc., 1957, **A243**, № 1232, 65—77 (англ.)

Исследуются свойства сингулярных интегралов вида

$$C_n(x, k) = \int_0^\infty \frac{J_n(t)\cos xt}{t - k}\,dt,\quad S_n(x, k) = \int_0^\infty \frac{J_n(t)\sin xt}{t - k}\,dt, \qquad (1)$$

где x и k — действительные параметры, причем $k > 0$, $J_n(t)$ — функция Бесселя. Интегралы (1) встречаются в задаче о движении плоского клина вдоль поверхности воды.

Исследование $C_n(x, k)$ и $S_n(x, k)$ основано на рассмотрении свойств аналитической функции $I_n(z, k)$, определенной сингулярным интегралом

$$I_n(z, k) = \int_0^\infty \frac{J_n(t)\,e^{iz(t-k)}}{t \quad k}\,dt \quad (z = x + iy,\ y > 0). \qquad (2)$$

Между C_n, S_n и I_n устанавливается зависимость

$$C_n(x, k) + iS_n(x, k) = e^{ixk} I_n(x, k).$$

Приведены таблицы $C_n(x, k)$ и $S_n(x, k)$ с четырьмя десятичными знаками для

$$n = 0,\ 1,\ 2,\ 3;\ k = 0{,}05;\ 0{,}1;\ 0{,}2;\ 0{,}5;\ 1{,}0;\ 2{,}0;$$

$$x = \begin{cases} \cos\theta,\ \theta = 0^\circ\ (10^\circ)\ 90^\circ \\ \operatorname{ch} u,\ u = 0\,(0{,}1)\ 1{,}5 \end{cases}$$

вместе с модифицированными вторыми разностями δ_m^2 для использования интерполяционной формулы Эверетта. В. П. Пилатовский

10308. Вступительное слово на симпозиуме по методам Монте-Карло. Маршалл (An introductory note. Marschall A. W.), Sympos. Monte Carlo Methods, New York, John Wiley and Sons, Inc., 1956, 1—14 (англ.)

Комментируется развитие методов Монте-Карло за период с 1949 по 1956 г., современное состояние предмета и содержание доложенных на симпозиуме работ.

Современные методы Монте-Карло возникли тогда, когда Нейман и Юлам не просто указали, что метод случайных блужданий может быть использован для решения определенных математических задач, но и развили идею о решении обычных математических задач путем нахождения вероятностных аналогов или моделей для них и применили для этой цели быстродействующие вычислительные машины.

Первые задачи прикладного характера были успешно решены при помощи методов Монте-Карло во время войны при создании атомного оружия в Лос Аламосе. В 1947—1949 гг. при помощи этого метода были найдены собственные значения для уравнения Шредингера, а в 1950 г. были развиты методы обращения матриц и решения дифференциальных уравнений в частных производных. В 1951—1952 гг. интерес к методам Монте-Карло прошел через минимум и вновь возрос к настоящему времени. Была расширена область применения метода в новых направлениях, из которых самое важное — в статистической механике: построены выборочные процессы, обладающие правильными эргодическими свойствами. С развитием вычислительных машин появилась тенденция ставить все бо́льшие и бо́льшие задачи. Эта тенденция направлена к тому, чтобы сделать методы Монте-Карло предпочтительными методам анализа.

Доклады, сделанные на симпозиуме, можно разбить на 3 группы: 1) работы, связанные с получением случайных чисел и обобщенных случайных переменных, 2) теоретические работы и 3) прикладные работы.

Работы Батлера, Литла, Метрополиса и Тауски и Тодда рассматривают вопросы применения случайных переменных в вычислениях по методу Монте-Карло. В работе Тауски и Тодда дан хороший обзор современного состояния методов получения последовательностей псевдослучайных чисел на быстродействующих вычислительных машинах. Хорошими для практических целей признаются конгруэнтные методы. Работа Метрополиса содержит интересный раздел о среднеквадратичном методе получения случайных чисел. Работы Литла и Батлера посвящены преобразованию случайных чисел в случайные переменные с заданным законом распределения.

К теоретическим работам относятся работы Альберта, Куртиса, Кана, Маршалла, Тротерра и Тьюки и других. Работа Альберта касается применения методов Монте-Карло к решению некоторых интегральных уравнений и содержит оценки точности решений. В работе Кана дается обзор методов уменьшения дисперсии, многие из которых разработаны самим Каном. В работе Маршалла исследуется метод двукратной выборки, а в работе Троттера и Тьюки вводится новый метод

уменьшения дисперсии, так называемый условный метод Монте-Карло. Куртисс оценивает относительную точность вычисления одной компоненты решения системы линейных уравнений и сравнивает ее с точностью, даваемой двумя классическими методами.

К прикладным работам относится совместная работа Арнольда, Бачера, Троттер и Тьюки и работы Бича и Деуса, Бергера и Дисмьюка. Работа Арнольда с сотрудниками является одной из первых работ, в которой достигнуто существенное уменьшение дисперси.. Работа Бича и Деуса, а также работа Бергера посвящены задачам по расчету защиты от ядерных излучений.

В заключение отмечается большой рост заинтересованности в методах Монте-Карло, особенно среди лиц, интересующихся этими методами для прикладных целей. В. Я. Евфанов

10309. Применение схемы многоступенчатых испытаний при вычислениях по методу Монте-Карло. Маршалл (The use of multi-sampling schemes in Monte Carlo computations. Marshall Andres W.), Sympos. Monte Carlo Methods, New York, John Wiley and Sons, Inc., 1956, 123—140 (англ.)

Эффективность метода Монте-Карло можно повысить путем более лучшего выбора распределения вероятности. Однако на практике эприори трудно указать, какое из распределений является более выгодным. Автор предполагает схему многоступенчатых испытаний, при котором информация, полученная при первом испытании, используется для выбора более выгодного распределения вероятности при втором испытании и т. д.

Допустим, требуется оценить следующий интеграл: $\varepsilon = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x, \theta)\, dx$, где $g(x)$ — известная функция, $f(x, \theta)$ — распределение вероятности, $\theta(\theta_1, \ldots, \theta_n)$ — вектор параметров, определяющий распределение вероятности. Общая идея метода многоступенчатых испытаний состоит в переходе от $f(x)$ к другому распределению $h(x)$

$$\varepsilon = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(x) f(x)}{h(x)} h(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} g^0(x) h(x)\, dx.$$

$h(x)$ подбирается таким образом, чтобы оценка интеграла ε, равная $\overline{g_0(x)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} g^0(x_i)$, где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ получены из $h(x)$, была бы более точной, чем оценка $\overline{g(x)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)$, где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ получены из $f(x)$. В частности, показывается, что оптимальное значение для $h(x)$ равно $h(x) = |g(x)| f(x) / \int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|\, f(x)\, dx$. Из последнего выражения видно, что для подбора оптимального значения $h(x)$ требуется провести первое испытание с $f(x)$. Детально разбирается схема двухступенчатых испытаний для оценки ε и приводятся примеры. М. А. Алексидзе

10310. Фазовый анализ. Среднеквадратичный метод. Волновое уравнение. Метрополис (Phase shifts-middle squareswave equation. Metropolis N.), Sympos. Monte Carlo Methods, New York, John Wiley and Sons, Inc., 1956, 29—36 (англ.)

Кратко излагаются три независимых темы, имеющие отношение к методам Монте-Карло: фазовый анализ экспериментальных данных по рассеянию пи-мезонов, исследование среднеквадратического метода получения случайных чисел и решение уравнения Шрёдингера.

Для фазового анализа опытов по рассеянию пи-мезонов на водороде, в которых измерялись интенсивности в функции угла рассеяния, находился относительный минимум на шестимерной тороидальной поверхности. Начальные точки выбирались случайно и вычисления велись двумя способами. В первом способе изменялась одна переменная во времени по циклам, пока не достигался относительный минимум. Во втором способе минимум достигался по направлению убывания градиента.

Исследование среднеквадратичного метода получения двоичных псевдослучайных чисел было выполнено на 38-разрядной вычислительной машине МАНИАК. Для n-значных двоичных чисел строились «генеалогические деревья», каждое из которых характеризуется своей конечной точкой и числом итераций, т. е. количеством полученных случайных чисел. Количество итераций и число «деревьев» зависят от n. В результате такого изучения среднеквадратичного метода было найдено несколько наиболее длинных для 38-разрядной машины циклов, дающих до 750 тысяч двоичных чисел. Статистическая проверка такой последовательности цифр дала удовлетворительные результаты. В качестве примера разбирается случай получения четырех «деревьев» для $n = 8$. Разностное уравнение, соответствующее уравнению Шрёдингера, итерируется следующим образом: следующее приближение для $\psi_{x,y,z}$ получается как среднее значение из ее шести ближайших соседних значений плюс «размножение «значения функции» на множитель, определяемый функцией потенциальной энергии. Соответствующая игра со случайными числами осуществляется так. Имеется некоторый набор частиц. Сначала при помощи какой-либо игры с шестью возможными исходами определяется, в какой соседний узел трехмерной сетки продиффундировала одна частица. Далее с помощью другой игры вычисляется «член размножения», т. е. определяется, во сколько раз частица размножилась в точке x, y, z. Этот процесс выполняется для всех частиц, что дает один цикл. В вычислительной машине хранятся координаты 400 частиц. Когда выполнено соответствующее количество циклов, анализируется положение частиц по их радиусам-векторам. Из этого распределения выбирается новая серия исходных частиц, и игра с ними повторяется для набора статистики. Таким путем меньше, чем за час, можно набрать статистику для 25 тысяч частиц.

Автор опробовал этот метод для нескольких потенциалов, в том числе для кулоновского потенциала. Ряд методических вопросов, таких, как величина шага сетки при диффузии, учет частиц выбывающих из игры, влияние постоянного члена в функции потенциала, количество циклов, необходимых для получения заданной точности, еще не выяснен, но полученные предварительные результаты перспективны. В. Я. Евфанов

10311. Получение и испытание псевдослучайных чисел. Таусски, Тодд (Generation and testing of pseudorandom numbers. Taussky Olga, Todd John), Sympos. Monte Carlo Methods, New York, John Wiley and Sons, Inc., 1956, 15—28 (англ.)

Приводится обзор способов вычисления и испытания псевдослучайных чисел, получаемых на быстродействующих вычислительных машинах и необходимых для решения задачи любым из методов Монте-Карло. Псевдослучайными числами называются числа последовательности, в которой каждый член не предопределяется заранее, а цифры последовательности удовлетворяют ряду традиционных в статистике испытаний и до некоторой степени зависят от условий применения этой последовательности.

Работа содержит следующие разделы: 1. Введение. 2. Среднеквадратичный метод. 3. Конгруэнтный метод

с операцией умножения. 4. Результаты испытаний. 5. Конгруэнтный метод с операцией сложения. 6. Некоторые результаты испытаний последовательности Фибоначчи. 7. Другие методы. 8. Библиография.

В среднеквадратичном методе очередное n-значение псевдослучайное число получается из предыдущего путем возведения последнего в квадрат и отбрасывания у получившегося $2n$-значного произведения по $n/2$ цифр с левого и с правого его концов. В ряде случаев этот метод давал удовлетворительные результаты.

В конгруэнтном методе с операцией умножения псевдослучайные числа получаются по формуле $r_{n+1} = kx_n \pmod M$, где оптимальные значения k и M зависят от количества разрядов на машине. Для машины ЭНИАК значения $k = 23$ и $M = 10^8 + 1$ дают последовательность псевдослучайных восьмизначных чисел (в десятичной системе) с периодом 5882352. Для машины СЕАК принималось $k = 5^{17}$ и $M = 2^{42}$, что давало последовательность с периодом около $2^{40} \approx 10^{12}$. Для машин СВАК, УНИВАК, ЭДВАК, ОРДВАК, ОАРАК значения k и M принимались соответственно равными 5^{13} и 2^{36}; 5^7 и 10^{10}; 5^{13} и 2^{39}; 5^{17} и 2^{43}; 7^{4k+1} и 10^{11}. При этом получались последовательности с периодами 2.10^{10}, 5.10^7 и 5.10^8 для машин СВАК, ОАРАК, УНИВАК соответственно. Сообщаются результаты испытаний на неслучайность последовательностей псевдослучайных чисел, полученных этим методом. В конгруэнтном методе с операцией сложения используется последовательность Фибоначчи $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \pmod M$, $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $n = 0, 1, 2\ldots$ Для машины СЕАК, которая оперирует с 44-разрядными двоичными числами, взято $M = 2^{44}$, что дает период $2{,}5 \cdot 10^{13}$.

Из других методов получения псевдослучайных чисел упоминаются метод Форсайта, метод использования последовательности цифр некоторых алгебраических и трансцендентных чисел и метод перестановок. Большинство методов получения псевдослучайных чисел иллюстрируются примерами. Для наиболее важных методов даются результаты статистических испытаний. Библ. 18 назв. В. Я. Евфанов

10312. Статистическое исследование ошибок округления при численном решении уравнений. Микулашкова (Zaokrouhlovaci chyba při numerickém počitáni s hlediska statistickeho. Mikulaschková Renata), Pokroky mat., fys. a astron., 1957, 2, № 6, 697—707 (чешск.)

10313. Группы соседних точек при случайном шаге сетки и разностные уравнения. Моцкин (Neighbor sets for random walks and difference equations. Motzkin Theodore S.), Sympos. Monte Carlo Methods, New York, John Wiley and Sons, Inc., 1956, 47—51 (англ.)

Относительно расположения и соседства точек сетки обычно делают определенные ограничения (например, связность множества счетных точек сетки, взаимность соседства точек сетки, конечность соседних точек и т. д.). Автор рассматривает различные ограничения, накладываемые на сеточную область весьма общего вида при случайном шаге, и исследует вопросы совместимости этих ограничений. М. А. Алексидзе

10314. Вычисление элементарных функций на автоматических цифровых машинах. Линский В. С., Вычисл. математика, сб. 2, 1957, 90—119

Систематически и подробно рассматривается задача вычисления элементарных функций на автоматических цифровых машинах. Даются итерационные формулы с подходящими начальными приближениями для обратной величины и для квадратного корня с использованием деления и без использования деления. Рассматривается разложение тригонометрических, обратно тригонометрических, показательной и логарифмической функций по многочленам Чебышева. Для некоторых случаев приводятся численные значения коэффициентов разложения. Большое место отводится методам выполнения деления, извлечения квадратного корня и вычисления логарифмической и обратно тригонометрических функций цифра за цифрой в двоичной системе счисления. Приводятся формулы получения коэффициентов разложения функций по многочленам Чебышева с помощью степенных рядов, а также коэффициенты самих многочленов Чебышева до 22-й степени включительно. Рассматриваются методы перевода чисел из десятичной системы счисления в двоичную и обратно и некоторые особенности вычисления элементарных функций на машине с фиксированной запятой. Е. А. Волков

10315. Аппроксимация степенных рядов полиномами Чебышева. Минник (Tshebysheff approximations for power series. Minnick Robert C.), J. Assoc. Comput. Machinery, 1957, 4, № 4, 487—504 (англ.)

Пусть функция $f(x)$ задана своим степенным рядом $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$. Кроме того, предполагается, что $f(x)$ можно разложить в ряд по полиномам Чебышева на интервале $(-1, +1)$:

$$f(x) = A_0/2 + \sum_{i=0}^{\infty} A_i T_i(x).$$

Автор получает полином наилучшего приближения для $f(x)$ степени m: $f(x) = \sum_{i=0}^{m} {}^m S^i x^i$, где ${}^m S^i = \sum_{k=0}^{\infty} a_k {}^m N_k^i$. Коэффициенты N_k^i имеют весьма громоздкое выражение; приведены таблицы их значений для аргументов $k = 0\,(1)\,49$, $m = 0\,(1)\,10$. Дана оценка точности, которой можно практически пользоваться. В конце приведены в качестве примеров коэффициенты полиномов наилучшего приближения для e^x и $J_0(x)$. Я. И. Алихашкин

10316. Проекционные методы в вычислениях. Томпкинс (Projection methods in calculation. Tompkins C.), Proc. 2nd Sympos. Linear Programm. Washington, 1955, Vol. 2, 425—448 (англ.)

Рассматриваются особенности применения метода наискорейшего спуска к отысканию значений $x_1, x_2, \ldots, x_n$, удовлетворяющих условиям $P_\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n) \vee_\alpha 0$, где $\alpha = 1, 2, \ldots, m$ и $\vee_\alpha$ — знак $=$ или $\geqslant$ на автоматических цифровых машинах. Разобраны вопросы проведения метода и ускорения сходимости. Н. П. Жидков

10317. Устойчивые положения электронов на сфере. Кон (Stability configurations of electrons on a sphere. Cohn Harvey), Math. Tables and other Aids Comput., 1956, 10, № 55, 117—120 (англ.)

Приближенно решается задача об устойчивом положении данного числа (n) электронов, подчиненных ньютоновскому закону, на единичной сфере. Начиная с произвольного расположения на сфере, каждый из электронов сдвигается в направлении действующих на него сил со стороны остальных электронов до тех пор, пока не минимизируется потенциальная энергия системы. Описана программа вычислений и некоторые особенности вычислений для ИБМ. И. П. Жидков

10318. Быстро сходящаяся рекуррентная последовательность, стремящаяся попеременно с избытком и недостатком к $e^{2/n}$. Самсонов (Suite récurrente à convergence rapide tendant alternativement par excès ou par défaut vers $e^{2/n}$. Samssonow Victor), C. r. Acad. sci., 1958, 246, № 8, 1152—1153 (франц.)

Строится последовательность

$$U_{-1}=\frac{a_{-1}}{b_{-1}}=\frac{1}{-1};\ U_0=\frac{a_0}{b_0}=\frac{1}{1};\ U_1=\frac{a_1}{b_1}=\frac{n+1}{n-1};$$

$$U_2=\frac{a_2}{b_2}=\frac{3n(n+1)+1}{3n(n-1)+1},\ \ldots$$

где

$$U_p=\frac{a_p}{b_p}=\frac{(2p-1)\,na_{p-1}+a_{p-2}}{(2p-1)\,nb_{p-1}+b_{p-2}}\quad (p\geqslant 1).$$

Утверждается, что $\lim_{p\to\infty}U_p=e^{2/n}$.

Быстрота сходимости иллюстрируется тем, что для $n=2$ получаем при $p=4$ приближенное значение числа e с 6 верными десятичными знаками, при $p=5$ — с 9 верными десятичными знаками, а при $p=13$ — с 33 верными десятичными знаками. Доказательства не дано. З. Х. Рафальсон

10319. Метод численного расчета напряжений кручения. Чонка (Méthode de calcul numérique des contraintes causées par la torsion. Csonka P.), Acta techn. Acad. sci. hung., 1957, 18, № 3-4, 399—407 (франц.; рез. русск., нем., англ.)

Предлагается метод расчета напряжения среза в сечении сплошного призматического стержня при чистом кручении. При этом предполагается известным угол удельного скручивания. Метод основан на формулах Грина.

Для численного расчета профиль сечения стержня заменяется многоугольником, вдоль каждой стороны которого напряжение среза τ рассматривается как постоянное, а именно: вдоль каждой из сторон значения τ заменяются их средними значениями, соответствующими значениям $\tau_1, \tau_2\ldots, \tau_m$ в точках касания сторон многоугольника с границей сечения. Это дает возможность заменить интегралы, входящие в формулу для вычисления τ, приближенными выражениями. Запись приближенной формулы для середины каждой стороны многоугольника приводит к системе m линейных неоднородных уравнений для определения m неизвестных значений τ_k.

Приводится числовой пример для случая стержня кругового сечения, показывающий, что полученный результат мало отличается от точного решения.

Г. И. Бирюк

10320. Сравнение дуг парабол и окружностей, применяемых в качестве сопряжений при переменах уклона. Кренкель (Vergleich von Parabel- und Kreisbogen bei Ausrundung von Gefällwechseln. Krenkel Egon), Wiss. Z. Techn. Hochschule Dresden, 1956—1957, 6, № 6, 1131—1139 (нем.)

От вида сопряжений участков дороги в местах перемены уклона зависят: величина центробежной силы, действующей на движущийся по ней экипаж, потребная длина участка торможения и обозримость дороги водителем.

С точки зрения выбора более благоприятных соотношений указанных факторов в работе сравниваются применяемые до настоящего времени сопряжения дугами окружностей с сопряжениями дугами парабол. Приведены вычисления, свидетельствующие о выгодности перехода к последним. Одним из особенно важных преимуществ их является возможность достижения плавного изменения кривизны при переходе от участков постоянного уклона (прямолинейных) на закругленные. А. Б. Штыкан

10321. О кафедре вычислительной математики московского государственного университета. Березин И. С., Шусюэ цзиньчжань, 1958, 4, № 1, 150—154 (кит.)

Перевод с русского (РЖМат, 1958, 3305).

10322. Об одном графическом способе решения интегральных и дифференциальных уравнений. Комладзе Г. М., Тр. Груз. политехн. ин-та 1956, № 1 (42), 145—160 (груз.)

Рассматриваются вопросы, связанные с решением линейных интегральных уравнений второго рода, обыкновенных линейных дифференциальных уравнений и некоторых дифференциальных уравнений математической физики. Попутно затронуты и вопросы, связанные с построением разрывных решений указанных интегральных уравнений. Резюме автора

10323. Номографическое решение обыкновенных дифференциальных уравнений первого и второго порядка. Морита, Симокава (Nomographic solutions of ordinary differential equations of the first and second orders. Morita Katuhiko, Simokawa Yakiti), Канадзава дайгаку когакубу киё, Mem. Fac. Technol. Kanazawa, Univ., 1953, 1, № 2, 1—13 (англ.)

Описывается номографический метод решения дифференциальных уравнений вида:

$$f(x,\ y,\ y')=0, \tag{1}$$

$$\begin{cases} f_1(x,\ y,\ z,\ y')=0, \\ f_2(x,\ y,\ z,\ z')=0, \end{cases} \tag{2, 2'}$$

$$f(x,\ y,\ y',\ y'')=0, \tag{3}$$

основанный на построении номограммы из выравненных точек для зависимостей (1), (2), (2'), и (3). В номограммах предусматривается для величин y', z', y'' соответствующий градуированный элемент. Номограммы предназначаются для определения производных y', z' или y'' по заданным значениям остальных величин применительно к методу Рунге — Кутта.

Приведены следующие номографируемые соотношения типа (1): $y'=f(x)/g(y)$, $y'+P(x)\,y=Q(x)$, $y'+P(x)\,y=Q(x)\,y^n\ (n\neq 1)$, $y=xy'+f(y')$, $y=xf(y')+g(y')$, $y'=a_0(x)+a_1(x)\,y+a_2(x)\,y^2$. Выписаны уравнения шкал номограмм и их схемы (последнее уравнение изображается двумя номограммами).

Приведены примеры решения следующих дифференциальных уравнений:

$$y'=x+y\ (\text{при } x_0=0 \text{ и } y_0=1);$$

$$y'^3+yy'(x^3+x-1)(y^2+1)-xy(x^2+1)(y^2+1)=0$$

$$(\text{при } x_0=1{,}7 \text{ и } y_0=2);$$

$$\left.\begin{aligned} y'^3+yy'+xz&=0 \\ z'^2+zz'+(x+1)\,y&=0 \end{aligned}\right\}\ (y_0=-1 \text{ и } z_0=-1 \text{ при } x_0=3).$$

Даны два примера разрезных номограмм из выравненных точек, на которых искомые величины определяются с четырьмя значащими цифрами. Номограммы построены для формул $u=z/x$ и $v=(1-1/x^2)\,y$ и служат для определения x.

В заключение рассмотрен метод вычисления корня w номографируемой зависимости

$$\begin{vmatrix} f_1(u) & g_1(u) & 1 \\ f_2(v) & g_2(v) & 1 \\ f(w) & g(w) & 1 \end{vmatrix}=0$$

по заданным значениям u и v с любой степенью точности. Первое приближение находится по номограмме. Для дальнейших вычислений используется формула

$$\eta'=\eta-\eta_1-(\eta_2-\eta_1)\frac{\xi-\xi_1}{\xi_2-\xi_1},$$

где $\xi_1 = f_1(u)$, $\eta_1 = g_1(u)$, $\xi_2 = f_2(v)$, $\eta_2 = g_2(v)$, $\xi = f(w)$, $\eta = g(w)$. Величина η' является геометрической погрешностью в ординате шкалы w при приближенном значении корня w. Если w точное значение корня, то $\eta' = 0$. Библ. 14 назв. Г. С. Хованский

10324. **Номограммы для сложения, вычитания и обращения комплексных чисел. Уоркс** (Addition, subtraction and conversion chart for complex numbers. Works Charles C.), Electr. Design News, 1958, **3**, № 1, 50—53 (англ.)

Приводятся сетчатые номограммы, позволяющие выполнять арифметические операции над комплексными числами, заданными в различной между собой форме. Например, дан модуль и аргумент одного числа и действительная и мнимая часть другого, или аргумент одного числа дан в градусной мере, а другого в радианной. Г. Е. Джемс-Леви

10325. **Номограммы из выравненных точек. Стратта** (Abachi a punti allineati. Stratta Rainero), Riv. ingegneria, 1958, **8**, № 1, 33—43 (итал.)

Краткое руководство по номографии. Излагаются элементарные методы построения номограмм из выравненных точек, номограмм с параллельными и ортогональными индексами. Приводится ряд примеров. Г. Е. Джемс-Леви

10326. **Определение длины логарифмической единицы. Гут** (Die Bestimmung der Länge von logarithmischen Zeicheneinheiten. Gut H.), Konstruktion, 1958, **10**, № 2, 67—69 (нем.)

Элементарные соображения по определению модуля логарифмических шкал, встречающихся в счетных номограммах, номограммах из выравненных точек и счетных линейках. Г. С. Хованский

10327. **Номограмма для быстрого расчета цилиндрических резервуаров. Дарре** (Abaques pour le jaugeage rapide des réservoirs cylindriques à fonds plats ou bombés. Darré M.), Génie chim., 1958, **79**, № 2, 52—55 (франц.; рез. англ., исп.)

Приводятся номограммы из выравненных точек для расчета остатка жидкости в цилиндрическом резервуаре и в резервуаре, имеющем форму усеченного цилиндра. Номографируемые формулы:

$$V = L\left[(x - R)(2Rx - x^2)^{1/2} + R^2 \arccos\left(1 - \frac{x}{R}\right)\right],$$

$$V = \pi f\left(h^2 - \frac{h^3}{3R}\right).$$

Г. Е. Джемс-Леви

10328. **Номографический метод графического интегрирования. Бонфильоли** (A nomographic method of graphic integration. Bonfiglioli L.), Bull. Res. Council Israel, 1956, **A6**, № 1, 1—10 (англ.)

Приводится номографический способ приближенного вычисления определенных интегралов по методу трапеций, являющийся видоизменением обычного графического метода решения той же задачи. На проективной шкале y, построенной на гипотенузе равнобедренного прямоугольного треугольника, наносят точки с пометками $y_0, y_1, \ldots, y_n$. После этого величина, пропорциональная сумме

$$\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1} + \frac{y_n}{2},$$

находится с помощью последовательных наложений на упомянутый выше треугольник обыкновенной линейки и полоски прозрачной бумаги, на которой проведены на равном расстоянии друг от друга три параллельные прямые. Г. С. Хованский

10329 К. **Практическая математика для инженеров и физиков. Изд. 2-е испр. Цурмюль** (Praktische Mathematik für Ingenieure und Physiker. 2 verb. Aufl. Zurmühl R. Berlin-Göttingen-Heidelberg. Springer, 1957, XII, 524 S., ill.) (нем.)

Излагаются численные методы решения различных математических задач, встречающихся в инженерной практике. По замыслу автора, книга призвана пополнить и расширить математические знания студентов технических вузов. Книга состоит из восьми глав.

Гл. 1 носит вводный характер. В ней автор знакомит читателя с комплексными числами, численным счетом и простейшими вычислительными средствами (логарифмической линейкой и арифмометром).

В гл. 2 — «Уравнения» — изложены методы решения алгебраических и трансцендентных уравнений, критерии устойчивости полиномов с действительными постоянными коэффициентами. Для общего уравнения с одной неизвестной в книге рассмотрены следующие методы: графический, Ньютона, улучшенный метод Ньютона, линейной и квадратической интерполяции, итерации; для нахождения корней полиномов — метод Греффе, а для случая комплексных корней, кроме того,— модификация метода Греффе, предложенная Бродетским и Смилом (Brodetsky S., Smeal G., Proc. Cambridge Philos. Soc., 1924, **22**, 83—87). Новым в книге, по сравнению с другими аналогичными руководствами, является предложенная автором (Z. angew. Math. und Mech., 1950, **30**, 283—285) двухстрочная схема Горнера для случая комплексного аргумента. В конце главы, наряду с широко распространенными критериями устойчивости полиномов таких, как критерий Гурвица, Рауса, местных кривых (Михайлова), автор приводит новые алгебраические критерии Леонхардта (Leonhardt A., Arch. Elektrotechnik 1944, **38**, 17) и Кремера (Cremer L., Z. angew. Math. und Mech., 1947, **25**—**27**, 161—163), излагавшиеся ранее только в научных журналах.

Гл. 3 — «Линейные уравнения и матрицы»— посвящена решению линейных систем алгебраических уравнений, обращению матриц и нахождению собственных значений и собственных векторов матриц. Наряду с известными методами Гаусса итераций, в книге встречается ряд новых методов. Среди последних следует отметить предложенный Хессенбергом метод построения и решения характеристического уравнения и нахождения собственных векторов, а также предложенную Унгером и Виландтом (Unger H., Wieland, H., Z. angew. Math. und Mech., 1950, **30**, 281—282) модификацию итерационного метода для нахождения собственных значений.

В гл. 4 — «Интерполирование и интегрирование» — выведены известные интерполяционные формулы Лагранжа, Ньютона, Грегори — Ньютона, Гаусса, Эверетта — Лапласа, Стирлинга, Бесселя, Эрмита. С помощью указанных выше интерполяционных многочленов автор получает ряд квадратурных формул. Рассмотрены также кубатурные формулы и графические методы одно- и двукратного интегрирования.

В гл. 5 — «Уравнительные вычисления и статистика» — рассмотрены вопросы матматической обработки результатов прямых, опосредствованных и условных наблюдений и метод испытаний в статистике.

Гл. 6 — «Представление произвольных функций»— посвящена практическим вопросам гармонического анализа, приближения функций, заданных системой дискретных точек, полиномами n-й степени, в частности, параболами, по методу наименьших квадратов и, наконец, вопросам приближения действительных непрерывных в заданном интервале функций системой непрерывных в том же интервале функций. В качестве последней системы автор использует полиномы, тригонометрические функции, сферические функции

Лежандра, полиномы Чебышева. Для каждого из этих приближений дается оценка средней погрешности.

Две последних главы посвящены обыкновенным дифференциальным уравнениям. В гл. 7 рассмотрены численные методы интегрирования уравнений с заданными начальными условиями (метод ломаных, усовершенствованный метод ломаных, последовательных приближений, Рунге-Кутэ, Нистрёма, интерполяционные и экстраполяционные разностные методы, включая интерполированные по Эрмиту). Для всех этих методов обсуждается вопрос о точности численного интегрирования, контроле счета, размере шага интегрирования. Для разностных методов, кроме того, обсуждается вопрос вычисления начальных значений.

В гл. 8 изложены численные методы решения краевых задач и задач о собственных значениях для уравнений 2-го и 4-го порядка: разностный, включая многоточечный, квадратурный, методы Ритца и Галеркина, коллокации, последовательных приближений. в частности метод Граммеля. Все изложенные в книге методы иллюстрированы многочисленными, подробно разобранными примерами и рисунками. Многие примеры имеют прикладной характер. В книге имеется 125 рисунков. Имеется именной и предметный указатель, а также список использованных автором руководств по численному анализу. Н. Я. Лященко

10330 К. Численное решение квазилинейных гиперболических систем дифференциальных уравнений в частных производных. Панов Д. Ю., М., Гостехиздат, 1957, 216 стр., илл., 8 р. 40 к.

Автор предлагает новый метод численного интегрирования задачи Коши для квазилинейной гиперболической системы уравнений

$$\begin{aligned} a_{11}\frac{\partial u}{\partial x}+a_{12}\frac{\partial v}{\partial x}+b_{11}\frac{\partial u}{\partial y}+b_{12}\frac{\partial v}{\partial y}&=l_1,\\ a_{21}\frac{\partial u}{\partial x}+a_{22}\frac{\partial v}{\partial x}+b_{21}\frac{\partial u}{\partial y}+b_{22}\frac{\partial v}{\partial y}&=l_2 \end{aligned} \qquad (1)$$

где $a_{11},\ldots, e_2$ являются заданными функциями x, y, u, v.

Книга состоит из введения, трех глав и двух приложений. В введении дается краткое описание обычного метода характеристик для решения задачи Коши в случае системы (1).

В основной, первой, главе — «Метод численного решения гиперболических систем с учетом членов второго порядка»— приведено подробное описание предлагаемого автором метода «с учетом членов второго порядка». Основное отличие этого метода от обычного метода характеристик заключается, как показывает само его название, в учете членов второго порядка малости относительно характеристической сетки. Так, звенья характеристической сетки строятся из дуг парабол второго порядка, вместо касательных в обычном методе, экстраполированные значения искомых функций u и v исправляются при помощи формулы Симсона, вместо формулы трапеций в обычном методе и т. д. Общий ход просчета очередного узла обычный. Сначала при помощи параболической экстраполяции определяем координаты точки пересечения двух характеристик и, используя дифференциальные соотношения, соответствующие системе (1), записанные в разностной форме, вычисляем значения искомых функций u и v в этой точке. При этом автор использует обобщенную им на неравные интервалы квадратурную формулу Симсона. Найденные значения координат и искомых функций подправляем методом итераций, который продолжается до тех пор, пока последовательные приближения (точка пересечения характеристик и значения в ней u и v) не совпадут в пределах желаемой точности. Практически автор рекомендует выбирать шаги так, «чтобы можно было обойтись одним, максимум двумя исправлениями». Отдельно рассмотрены вопросы об изменении шага при построении сетки характеристик, использовании дифференциальных соотношений и формулах исправлений.

Рассматриваемый в книге метод второго порядка в отличие от обычного (первого порядка) метода характеристик требует специальных вычислений в начале счета, так как в этом случае, очевидно, требуется, кроме знания u и v на данной нехарактеристической кривой, также знание x, y, u и v в узлах сетки характеристик, лежащих на «соседней» кривой. Необходимые формулы автор получает путем дифференцирования уравнений характеристик и данных уравнений (1) и использования начального условия.

Во второй главе — «Дальнейшие исследования»— автор кратко описывает формулы третьего порядка, обобщающие соответствующие формулы первой главы, и высказывает некоторые соображения относительно использования в различных областях характеристической сетки формул разного порядка точности.

В последней главе — «Практическое выполнение вычислений и примеры»— автор рассматривает несколько схем практического использования формул из предыдущих глав. Приводятся в удобной и компактной форме расчетные формулы и вычислительные шаблоны.

В качестве примеров взяты решения двух задач: 1) задачи Надаи и 2) квазилинейной гиперболической системы специального вида, позволяющей разобрать некоторые особенности применения метода второго порядка. Сходимость метода (сходимость итераций при решении системы разностных уравнений, сходимость решения системы разностных уравнений к решению исходной дифференциальной задачи) автор не исследует.

Примечание референта. В книге указывается, что сходимость обычного метода характеристик с учетом членов первого порядка еще не исследована. Автор очевидно не знал подробного исследования Ауфшлегера по этому вопросу, вышедшего в свет в том же 1957 году (Aufschläger R., Sitzungsber. Bayer. Akad. Wiss. Math.-naturwiss. Kl., 1956 (1957), 87—112). В. К. Саульев

См. также: 9407, 9731, 9927, 9935, 9955 К

ВЫЧИ ЛИТЕЛЬНЫЕ МАШИНЫ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРИБОРЫ

Редактор *Д. Ю. Панов*

10331. Вычислительная машина ТХ-0 на полупроводниках с запоминающим устройством на 256×256 чисел. Митчелл, Олсен (TX-0, a transistor computer with a 256 by 256 memory. Mitchell J. L., Olsen K. H.), Proc. East. Joint Computer Conf., 1957, №-Т-92, 93—101. Discuss., 101 (англ.) Быстродействующая вычислительная машина ТХ-0 была построена в Массачусетском технологическом институте для демонстрации и практического испытания транзисторных схем, работающих на частоте 5 *мгц*, и магнитной памяти емкостью 65 536 чисел, имеющих по 19 двоичных разрядов. 1 двоичный разряд используется для контроля, 16 — для хранения информации, а при помощи остальных двух выбирается

одна из трех инструкций, относящихся к памяти, и одна инструкция микропрограммирования.

Запоминающее устройство работает по принципу совпадающих токов, для выбора адреса имеется два магнитных дешифратора на 256 выходов каждый. Для управления памятью используется 425 двоичных триодов и 625 транзисторов. В качестве запоминающих элементов служат сердечники, изготовленные в лаборатории и имеющие несколько лучшие характеристики, чем изготовляемые промышленностью; размер их 2,03 × 1,27 *мм*, толщина 0,6 *мм*. Выходной сигнал при токе переключения 820 *ма* имеет амплитуду 600 *мв*.

Разрядная плоскость 256 × 256 образована 16 матрицами магнитных сердечников 64 × 64. Выбор такого размера основной матрицы явился компромиссом между числом паяных соединений в плоскости 256 × × 256 и легкостью монтажа и испытания основной матрицы. Провод запрещения пронизывает лишь 4 основные матрицы, и поэтому в каждом разряде требуется 4 провода запрещения. Провод запрещения представляет собой линию с харктеристическим сопротивлением 150 *ом* и временем задержки 0,4 *мксек*. Если бы провод запрещения был один на всю разрядную плоскость, то время задержки увеличилось бы до 1,6 *мксек*, что увеличило бы рабочий цикл памяти. Поэтому на каждый разряд имеется 4 формирователя запрещения.

Считывающая обмотка также разбита на 4 части, и имеются 4 усилителя считывания на разряд, работающие на общий выход. Прошивка каждой считывающей обмотки проведена так, что никакие две из основных матриц, прошиваемых обмоткой, не лежат на одной координатной плоскости. Для каждых 4 матриц, относящихся к одной считывающей обмотке, их провода считывания связаны сначала по два последовательно, а затем параллельно. Это вдвое снижает выходной сигнал, но зато вдвое уменьшает задержку линии. Описанная прошивка считывающего провода обеспечивает на входе усилителя такое же отношение сигнала к помехе, как при считывании с матрицы 64 × 64.

В остальном устройство памяти такое же, как и в общеизвестных системах. Всего имеется 20 разрядных плат, из которых одна запасная. Общий размер куба 78 × 38 × 25 *см*. Магнитные дешифраторы — матричного типа, с постоянным смещением. Применяются сердечники из 100 витков ленты толщиной 6 *мк*, шириной 6 *мм* из монпермалоя 4—79, намотанных на бобине с внутренним диаметром 6 *мм*. Рабочий цикл памяти 7 *мксек*. В дальнейшем предполагается увеличить длину числа до 37 двоичных разрядов, а время выборок снизить до 6 *мксек*. Вторая часть статьи посвящена рассмотрению схем на поверхностно-барьерных полупроводниковых триодах, работающих на частоте до 10 *мгц*. Изучаются два основных типа схем: насыщенный инвертор и насыщенный эмиттерный повторитель. При насыщении падение напряжения на триоде составляет всего 0,1 *в*. Путем параллельного или последовательного соединения этих двух схем выполняются различные логические схемы. Особенностью применяемых тиодов является практическое отсутствие эффекта накопления неосновных носителей.

Проблема контроля за исправностью блоков решается наличием специальных контрольных цепей, на которых изменяются питающие напряжения и тем самым выявляются недостаточно надежные блоки.

Стоимость описываемого запоминающего устройства составляет 20 центов за двоичный разряд, из которых 6 центов составляют стоимость сердечника, 4 цента — стоимость прошивки и 10 центов приходится на электронику.

О. В. Бачин

10332. **Построенная на транзисторах вычислительная система для обработки данных** (Transistorized computor-data processing system), Process Control and Automat., 1958, 5, № 1, 26 (англ.)

Американская фирма «Бекмен Инструмент» (Beckman Instrument) выпустила промышленную систему обработки данных «Бекман-112» для большого этиленового завода. Назначение системы — обеспечить максимальную эффективность всего химического процесса. Во-первых, система будет непосредственно регистрировать величины, характеризующие протекание процесса, а, во-вторых, она должна производить необходимые вычисления, результаты которых представляются оператору завода. В состав математических операций, выполняемых устройством, входят сложение, вычитание, умножение, деление и извлечение квадратного корня. Вместо вакуумных ламп в системе используются полупроводниковые устройства и магнитные усилители, что гарантирует многолетнюю непрерывную работу. Система позволяет управлять через определенные интервалы значениями температур, скоростей потоков, давлений в 400 точках. Кроме того, она является центром для обработки информации, поступающей из 168 точек замера давления и потока от 200 термопар, измеряющих температуры в диапазоне от —130° до +1100° и от других приборов. В зависимости от требований, выходные данные системы могут вводиться в универсальные цифровые вычислительные машины, автоматические печатающие устройства, счетно-перфорационное оборудование, перфораторы бумажной ленты, устройства записи на магнитную ленту, телеграфные аппараты, цифровые устройства для визуального наблюдения, моделирующие регистрирующие устройства. Кроме всего, система может выдавать предупреждающие аварийные сигналы в тех случаях, когда значения переменных, характеризующих процесс, приближаются к границам допустимых пределов, что дает возможность быстро принять необходимые меры.

В. А. Брик

10333. **Цифровая система средней стоимости** (Medium-pri ced digital system), Automat. and Automatic Equipm. News, 1958, 3, № 6, 311—312 (англ.)

С середины 1958 г. фирма «Берроуз» (Burroughs) будет выпускать машину Дататрон-220, в которой объединены две машины: Дататрон-205 и Е-101. Скорость вычислений предполагается довести до 300 тыс. сложений, 30 тыс. умножений и 15 тыс. делений в в 1 мин. Общая емкость запоминающего устройства на магнитных лентах с двуканальной записью составляет 550 млн. разрядов. Оперативное запоминающее устройство на магнитных сердечниках со временем выборки 10 *мксек* способно хранить до 10 тыс. 11-разрядных чисел на 400 тысячах сердечников. Машина имеет 94 команды, из которых 20 служат для передачи управления при различных вариантах работы. Устройства ввода — вывода разнообразны: перфокарты, бумажные ленты, телетайпы, наборные панели и т. д.

Благодаря такой оснащенности машина имеет универсальное применение, включая статистический анализ, различные предсказания и т. п. Стоимость машины фирма определяет приблизительно в 0,5 млн. долл. В заключение сообщаются данные о фирме и ее росте с 1954 г.

А. Ф. Смирнов

10334. **Разработка логики цифровой вычислительной машины для промышленного использования. Фроггатт** (Logical design of a computer for business use. Froggatt R. J.), J. Brit. Instn Radio Engrs, 1957, 17, № 12, 681—696 (англ.)

Приводится описание электронной цифровой вычислительной машины фирмы «ЭМИ Электроникс» (E. M. I. Elektronics Ltd, Англия), разработанной специально для промышленного использования. Машина последовательная, двухадресная. Операции выполняются за один такт, очередная команда форми-

руется одновременно с выполнением предыдущей операции. Предусмотрено средство модификации команд путем прибавления к ним содержимого одного из специальных регистров. Всякая передача данных в запоминающее устройство или из запоминающего устройства производится через арифметическое устройство. Слова в машине имеют 36 разрядов и могут представлять целое двоичное число в дополнительном коде (старший разряд имеет смысл знака), или 6 самостоятельных чисел по 6 двоичных разрядов в каждом, или команду, имеющую следующий состав: 3 разряда для адреса регистра модификации, 5 разрядов для номера операции, 6 разрядов для первого адреса и 6 разрядов для второго адреса (остальные разряды могут использоваться во втором адресе или для других вспомогательных целей).

Запоминающее устройство машины выполнено на магнитном барабане диаметром 203 *мм*, вращающемся со скоростью 3000 об/мин. Каждая дорожка на барабане имеет максимальную емкость в 64 слова. Частота следования импульсов 115 *кгц*. Применен метод записи с «фазовой модуляцией», согласно которому единица представляется положительным и следующим за ним отрицательным импульсом, а нуль — отрицательным и следующим за ним положительным импульсом. Всего используется три типа дорожек. Короткие дорожки с перезаписью имеют длину несколько меньшую, чем длина, требуемая для записи одного слова. Это позволяет учесть задержку в арифметическом устройстве ($1^3/_8$ разряда) и в фазовом модуляторе ($^1/_4$ разряда). Всего имеется 50 таких дорожек. Среди них семь (№№ 41—47) используются для модификации адресов, одна (№ 40) — для хранения результата операции сравнения и две (№№ 48—49) комбинируются вместе для хранения произведения при умножении или делимого, а затем и остатка при делении. Дорожки оперативной памяти имеют одну головку записи-воспроизведения и 63 головки воспроизведения. Они используются для хранения команд. Дорожки основной памяти имеют общую емкость примерно в 24 тыс. слов. Они разделены на три группы. Две группы имеют механизмы, содержащие по 8 головок, каждая из которых может устанавливаться в 8 положениях. Третья группа имеет 16 головок, каждая из которых может устанавливаться в 16 положениях. Имеются также вспомогательные дорожки, на которых записаны импульсы опорной разрядной сетки, импульс начала отсчета и т. д.

Арифметическое устройство машины выполняет простые операции: сложение, вычитание, передачу числа и сравнение, операции сдвига и сложные операции: умножение и деление. Сдвиг влево осуществляется сложением числа с самим собой. Сдвиг вправо осуществляется с помощью элемента одноразрядной задержки. При умножении множимое каждый раз сдвигается на один разряд влево, при этом последовательно исследуются цифры множителя. Если в данном разряде множителя единица следует за нулем, множимое вычитается из частичного произведения, хранящегося в сдвоенном регистре, а если нуль следует за единицей, то прибавляется. Во всех остальных случаях никаких изменений частичного произведения не производится. После исследования всех цифр множителя операция умножения автоматически заканчивается. При делении делимое хранится в сдвоенном регистре, а делитель сдвигается каждый раз на один разряд вправо. Каждый шаг деления заключается в сравнении знака частичного остатка с знаком делителя. Если знаки одинаковы, делитель вычитается из частичного остатка и в данный разряд частного записывается единица. Если знаки не одинаковы, делитель прибавляется к частичному остатку и в данный разряд частного записывается нуль.

Всего в машине могут выполняться 32 различные операции, в число которых, кроме уже описанных, входят: операция условного и безусловного перехода, операция передачи данных между различными дорожками памяти, операции обращения к внешним устройствам, которые могут включать в себя преобразование системы счисления, и операции исследования числа на равенство нулю и исследования знака числа.

В устройстве управления машины используется счетчик, определяющий номер головки оперативной памяти, с помощью которой должна читаться очередная команда. Если выполнение предыдущей команды занимало один цикл, то следующая команда прочитывается той же самой головкой. Если выполнение команды занимало несколько циклов, счетчик вычисляет номер головки, с помощью которой может быть прочитана очередная команда. При выполнении операций условного перехода в счетчик записывается адрес следующей команды. Каждая читаемая команда проходит через сумматор. Во время прохождения разрядов команды с нулевого до девятого сумматор бездействует. Эти разряды никогда не модифицируются. Значения трех первых разрядов команды определяют адрес регистра модификации, содержимое которого подается в сумматор и прибавляется к разрядам команды, начиная с десятого.

Внешние устройства машины состоят из устройства для чтения 65-колонных перфокарт, печатающего устройства фирмы «Powers Samastronic» (РЖМат, 1958, 9351), работающего со скоростью 300 строк в 1 мин. по 140 знаков в строке, и 5 запоминающих устройств на магнитной ленте, из которых только 3 могут работать одновременно. Частота следования разрядов при обращении к магнитной ленте равна 2 *кгц*, информация на лентах записывается группами по 8 слов. В случае необходимости имеется возможность подключения к машине дополнительного запоминающего устройства на магнитном барабане. А. В. Шилейко

10335. Гёттингенский проект быстродействующей электронной вычислительной машины (G-3). Шлютер (Das Göttinger Projekt einer schnellen elektronischen Rechenmaschine (G3). Schlüter Alf), Nachrichtentechn. Fachber., 1956, 4, 99—100, 226 (нем.; рез. англ.)

Описание электронной вычислительной машины параллельного действия G-3. Время умножения при работе с плавающей запятой составляет 300—400 *мксек*. Запоминающее устройство выполнено на ферритах (4096 чисел). Машина имеет операцию «извлечение квадратного корня», возможно включение операции «x^y» (через повторение извлечений корня и возведений в степень). Приводится дискуссия о введении кокоманд управления и некоторые соображения по их осуществлению (многократное повторение одних и тех же операций над группой чисел). Предполагается ввести так называемые шаговые регистры для пересчета адресов команды. Этих регистров всего будет около 64 (на ферритной матрице). В отличие от G-2, где имеется пересчетчик команд, в G-3 команды могут изменяться путем сложения. В командах программы указывается, с каким шаговым регистром работать, и этим самым определяется, какой участок программы должен выполняться. Указывается на трудности введения в команде указания шагового регистра и приводятся некоторые соображения по их преодолению.

Д. А. Кузьмичев

10336. Релейная вычислительная цифровая машина «Оперма». Кеммерер (Die Programmgesteuerte Relais-Zwillings-Rechenanlage. «Oprema» des VEB Carl Zeiss Jena. Kämmerer W.), Ber. Internat. Math.-Kolloq., 1955 (1957), Nov., 15—16 (нем.)

Рассказывается о цифровой релейной вычислитель-

ной машине «Опрема», разработанной и построенной на заводе Цейсса в Иене, и об особенностях второй серии этой машины. Устройство содержит приблизительно 16 000 реле. Испытания показали, что после 1,2 млрд. переключений реле износ их контактов незначителен. Точность расчета выше, чем на машине первой серии. При сдвоенной работе машин считываются и сравниваются записанные результаты в запоминающих устройствах обеих машин. При расхождениях устройство либо останавливается, либо, по желанию, автоматически повторяет счет с одновременным подсчетом ошибок. Управление пультом устроено так, что возможен визуальный контроль арифметического счета. Это дает возможность прочитывать при каждой команде начало счета и частичный результат на панели сигнализации. Расчет в любое время может быть прерван и вновь повторен, а каждый частичный результат отпечатан с помощью дополнительной команды. Мощность, потребляемая установкой, менее 30 *вт*. Скорость машины в среднем 100 операций в 1 мин. Остальные технические данные машины совпадают с характеристиками первой серии машины «Опрема» (РЖМат, 1957, 6020). В. Л. Евтеев

10337. Структура и применение электронной вычислительной машины. Дрейфус (Structure et utilisation d'un calculateur électronique. Dreyfus P.), Atomes, 1957, **12**, № 137, 303—306 (франц.)

Электронная цифровая вычислительная машина ГАММА выпускается фирмой «Буль» (Франция) с 1952 г. К настоящему времени выпущено около 300 образцов этой машины. Запоминающее устройство машины состоит из оперативной памяти на ультразвуковых линиях задержки и магнитного барабана. Память на ультразвуковых линиях имеет емкость 128 12-разрядных десятичных слов и время выборки 170 *мксек*. Магнитный барабан вращается со скоростью 2750 об/мин, чему соответствует время выборки 22 *мсек*. Емкость барабана составляет 16 тыс. 12-разрядных десятичных чисел. Ввод данных обеспечивается устройством, читающим 80-колонковые перфокарты со скоростью 150 карт в 1 мин. Вывод обеспечивается печатающим устройством. В 1 мин. печатается 150 строк по 100 цифр. Имеется также перфоратор карт, работающий со скоростью 9600 цифр в 1 мин.

Машина содержит 800 ламп и 14 000 германиевых диодов. Отмечается, что за последнее время во Франции при помощи машин ГАММА были проведены работы по расчетам коэффициентов атомных структур, позволяющих опрделять расположение атомов в сложных молекулах; работы по расчетам мощности различных двигателей, траекторий баллистических и управляемых ракет, критических скоростей самолетов, диаграмм направленности антенн, работы по решению обыкновенных и в частных производных дифференциальных, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений математической физики и уравнений теоретической химии. А. В. Шилейко

10338. Некоторые примеры применения электронно-счетных устройств. (Noen eksempler på bruk av elektronisk beregningsmaskin i praksis), Norweg. Shipp. News, 1957, **13**, № 23D, 15—16 (норв.)

Норвежская электронная вычислительная машина ФАЦИТ-ЭДБ имеет запоминающее устройство на ферритах на 2048 12-значных чисел и на магнитном барабане на 8000 чисел. Машина выполняет свыше 20000 сложений в секунду или около 3000 умножений. Перечисляются некоторые применения.

10339. Машина, выполняющая работу пяти месяцев за 10 минут (Maskinen som gjør en fem måneders jobb på 10 minutter), Teknikk, 1957, **28**, № 20, 300—301 (норв.)

Краткая статья о норвежской электронной вычислительной машине ФАЦИТ-ЭДБ (FACIT-EDB).

10340. Универсальная автоматическая вычислительная машина. Чампин (Universal automatic computer. Champine George), Minnesota Technolog, 1957, 38, № 2, 18—19, 46 (англ.)

Описание и фото вычислительной машины УНИВАК-Сайентифик (Univac Scientific) фирмы «Ремингтон Рэнд».

10341. Новый подход к программированию малой математической машины и управлению ею. Ленц (A new approach to small-computer programming and control. Lentz J. J.), IBM J. Res. and Developm., 1958, **2**, № 1, 72—83 (англ.)

Приводится описание машины ИБМ-610, позволяющей решать различные задачи операторам, знакомым с работой настольных вычислительных машин. Инструкции, необходимые для решения задачи, можно последовательно набирать на пульте ручного управления машиной. Машина предназначена для работы главным образом с плавающей запятой над числами в десятичной системе, однако возможна работа и с фиксированной запятой.

Запоминающее устройство машины выполнено на магнитном барабане, на котором помещается 80 числовых и 4 специальных регистра. Хотя емкость каждого регистра составляет 32 десятичных разряда, машина обычно оперирует с 15-разрядными числами. Данные вводятся в машину либо с пульта ручного управления, либо с перфоленты. Кроме того, в машине имеется коммутационная панель, на которой с помощью штеккеров можно набирать различные подпрограммы. Вывод данных может быть осуществлен на электрическую пишущую машинку или на перфоленту. В процессе решения задачи содержание любого регистра можно просмотреть на экране электроннолучевой трубки. Машина потребляет 20 *а* от однофазной сети в 120 *в*. Вес машины 300 *кг*. А. Н. Чуйкин

10342. Модификация адресов с помощью регистров индексов в машине типа ИМБ-704. Брокате (Adressenmodifikation mit Indexregistern bei der Type IBM-704. Brokate Klaus), Nachrichtentechn. Fachber, 1956, **4**, 150—153, 222 (нем.; рез. англ.)

10343. Принцип действия автоматических цифровых вычислительных машин. Наслен (Principe de fonctionnement des calculatrices numériques automatiques. Naslin P.), Mesures et contrôle industr., 1957, 22, № 243, 641—646 (франц.; рез. англ.)

Четвертая часть статьи (части 1—3 см. РЖМат, 1958, 8396—8398) в популярной форме излагает основы вычислительной техники. Рассматриваются способы передачи информации, логическая символика (при этом в качестве основных логических операций принимаются конъюнкция, дизъюнкция и инверсия) и способы построения логических схем на кристаллических диодах. Рассматривается способ построения двухступенных избирательных схем как средство сокращения количества диодов.

Имеются опечатки. Так формулу на стр. 643, левый столбец, 15 строка сверху, следует читать $S = a \cdot \bar{b} \vee \bar{a}b = (a \vee b)\bar{a}b$ вместо $S = a \cdot \bar{b} \vee \bar{a}\bar{b} = (a \vee b)\,\bar{a}b$.

В конце стр. 644 и в начале стр. 645 все сказанное относительно рис. 36*а* следует отнести к рис. 36*б* и наоборот. А. В. Шилейко

10344. Принцип действия автоматических цифровых вычислительных машин. Наслен (Principe de fonctionnement des calculatrices numériques automatiques. Naslin P.), Mesures et contrôle industr., 1957, **22**, № 244, 721—730 (франц.)

Пятая часть статьи (первые 4 части см. РЖМат, 1958, 8396—8398; реф. 10343), излагающей основы

вычислительной техники. Рассматриваются способы построения логических схем на электронных лампах (триодах), принцип действия триггера на двух вакуумных триодах и различные схемы, использующие триггеры: счетчики, регистры, сумматоры и т. п. Рассматриваются различные линии задержки (ртутные, индуктивно-емкостные, магнитострикционные) и их применения. А. В. Шилейко

10345. Принцип действия автоматических цифровых вычислительных машин. Наслен (Principe de fonctionnement des calculatrices numériques automatiques. Naslin P.), Mesures et contrôle industr., 1957, 22, № 245, 791—798 (франц.; рез. англ.)

Окончание большой обзорной статьи (РЖМат, 1958, 8396—8398; реф. 10343, 10344), посвященной цифровой вычислительной технике. Рассматриваются магнитные элементы и устройства: 1) магнитные сердечники с прямоугольной петлей гистерезиса — логические схемы на них, сдвиговые регистры и возможности выполнения последовательной и параллельной арифметики и логики, матричные запоминающие устройства; 2) запись на магнитные барабаны и ленту — системы импульсной записи с возвращением к нулевому уровню, записи постоянным током (без возвращения к нулевому уровню) и записи с помощью фазовой модуляции; конструкции магнитных головок и вопросы максимальной плотности записи. Затронуты также вопросы запоминания информации на электроннолучевых трубках. А. А. Крупский

10346. Некоторые графические рассмотрения вопросов кодирования. Дутка (Bome graphical approaches to coding problems. Dutka Jacques), R. C. A. Rev., 1957, 18, № 4, 466—474 (англ.)

Рассматривается построение кодов с обнаружением одиночной ошибки и кодов с исправлением одиночной ошибки. Система трехразрядных ходов представляется в виде куба, в каждом углу которого расположен один код. Для систем n-разрядных кодов куб превращается в многомерную геометрическую фигуру. Показано, как такие фигуры представляются в виде таблиц.

Для построения кода с обнаружением одиночной ошибки в данной системе используются только такие коды, расстояние между которыми равно двум ребрам геометрической фигуры. Для построения кода с исправлением одиночной ошибки используются коды, расстояние между которыми равно трем ребрам геометрической фигуры. В качестве примера приведена таблица и код с исправлением одиночной ошибки для системы 9-разрядных кодов. А. Н. Чуйкин

10347. Кодовая карта системы автоматической обработки данных машины УНИВАК II (The Univac II data automation Systems code card), Programmer, 1957, 4, № 6, 15—16 (англ.)

Приводится список инструкций для машины УНИВАК II.

10348. Использование рефлексной двоичной нумерации в релейных цепочках. Котронео (L'uso della numerazione binaria riflessa nelle catene a relè. Cotroneo Antonio), Poste e telecomun., 1954, 22, № 10, 487—494 (итал.)

10349. Программирование цифровых вычислительных машин. Часть I. Дейвисон (Programming digital computers. Part I. Davison J. F.), Brit. Communs and Electronics, 1958, 5, № 2, 88—91 (англ.)

Вводная статья, дающая общее представление о вычислительных машинах с точки зрения программирования. Рассматривается принципиальная блок-схема вычислительных машин, назначение вводных и выводных устройств и их виды, основная и оперативная память машин. На примере машины «Пегас» разбирается назначение команд с их подразделением на команды арифметические, модификации, условных переходов. Дается схема расчета времени на решение задач с учетом времени ввода и вывода данных, собственно решения и передач между оперативным и основным запоминающими устройствами. З. Д. Доброхотова

10350. Автоматический метод решения задач на электронных цифровых вычислительных машинах. Годферно (Méthode de résolution autocommandée sur calculateur électronique arithmétique. Gaudfernau L.), Onde électrique, 1956, 36, № 353—354, 732—741, 40 (франц.; рез. англ.)

Излагается схема метода «пристрелки» для приближенного решения уравнений, пригодная для осуществления на автоматических машинах. В случае вещественного уравнения $f(x) = 0$ задаются начальные значения x_0, r_0 и число k, $-1 < k < 0$. Программа состоит из следующих частей: 1) вычисление $x_{i+1} = x_i + r_p$ и $f(x_{i+1})$; 2) сравнение знаков $f(x_i)$ $f(x_{i+1})$ (если знаки совпадают, то переход к части 1, а если знаки не совпадают, остановка либо замена r_p на $r_{p+1} = r_p \cdot k$ и переход к части 1). Последовательность x_i сходится к решению $f(x) = 0$, точность определяется последним использованным $r_p = r_0 \cdot k^p$.

Указывается, что этот метод применим к комплексным уравнениям, уравнениям, зависящим от параметра, и т. д. и может быть реализован как на цифровых, так и на моделирующих машинах. Много места отведено описанию принципов работы автоматических цифровых машин и сравнению последних с моделирующими устройствами. Конкретные программы отсутствуют. А. Н. Валуев

10351. Вычисления по методу Монте-Карло. Дисмьюк (Monte Carlo computations. Dismuke Nancy M.), Sympos. Monte Carlo Methods, New York, John Wiley and Sons, Inc., 1956, 52—62 (англ.)

Описываются некоторые вычисления, выполненные на машине ОРАКЛЕ (ORACLE) в Отделении здоровья физиков Окриджской национальной лаборатории для изучения действия нейтронной радиации на ткань человека. Идея метода состоит в построении физической модели рассматриваемого явления, которая реализуется при помощи вычислительного процесса на цифровой электронной счетной машине.

Задача ставится следующим образом. Широкий параллельный пучок моноэнергетичных нейтронов с энергией E_0 падает на участок человеческой ткани (10 *эв* $\leqslant E_0 \leqslant 300\,000$ *эв*). Из возможных видов взаимодействия нейтронов с веществом учитываются упругое рассеяние на атомах, входящих в состав человеческой ткани (H, C, N и O), и поглощение типа H (n, γ) и N (n, p). Для получения функций, которые определяют вредность облучения и являются решением задачи, рассматривается поведение 10 тыс. нейтронов, проникающих в плоский слой ткани толщиной $t = 30$ *см*. Функциями, определяющими вредность облучения, считаются средняя энергия $\mathcal{E}^T(x)$, передаваемая атомам ткани путем взаимодействия типа T (где T — индекс одного из шести упомянутых видов взаимодействия), плотность столкновений $C(x)$ тепловых нейтронов и источники нейтронов $S_1(x)$ и $S_{th}(x)$, создающие нейтроны, замедленные до энергий 1 *эв* и $^1/_{40}$ *эв* (x — глубина проникновения) соответственно. Предполагается, что, в среднем, действие на ткань каждого вида взаимодействия пропорционально средней энергии, сообщаемой атомам ткани.

Поведение каждого попавшего на плоскость $x = 0$ нейтрона вычисляется так. Из распределения свободных пробегов проходящих через ткань нейтронов с

энергией E_0 при помощи первого случайного числа определяется расстояние ρ_1, пройденное нейтроном в направлении оси x до первого соударения. Это расстояние соответствует координате первого соударения нейтрона с атомом ткани. Второе случайное число используется для определения вида взаимодействия в данной точке. Для соударений, в результате которых происходит рассеяние, определяется новое направление движения нейтрона и его энергия после соударения. Новое направление движения в системе центра массы выбирается из сферически симметричного распределения. Это позволяет определить в лабораторной системе новое направление и массовое число рассеянного атома и направление движения и энергию нейтрона. Далее поведение нейтрона прослеживается по такой же схеме до тех пор, пока он не поглотится или пока не вылетит из ткани. Затем так же прослеживается поведение всех остальных нейтронов.

В данной задаче нейтрон испытывал в среднем от 50 до 100 соударений, так что для вычислений требовалось довольно большое количество случайных чисел, которые были получены по формуле $x=5^{15}x_{n-1} \pmod{2^{39}}$, причем использовались средние 20 цифр чисел.

Для решения задачи использовалось около тысячи ячеек памяти. Всего было проведено 10 серий вычислений по 1000 нейтронов в каждой серии. Значения искомых функций протабулированы с шагом 0,5 *см*. Приводится таблица результатов для случая $E_0 = 0{,}005$ *мэв*.

Сообщается о выполнении предварительной работы для решения более сложной задачи, в которой облучается цилиндрический участок ткани с расстояния d от торца цилиндра. Для решения такой задачи используется около двух тысяч оперативных ячеек запоминающего устройства машины ОРАКЛЕ. В. Я. Евфанов

10352. Техника использования магнитных сердечников в качестве логических элементов. Андрюс (A technique for using memory cores as logical elements. Andrews L. J.), Proc. East. Joint Computer Conf., 1957, № T-92, 39—46. Discuss., 46 (англ.)

Описываются чисто ферритные логические схемы, в основе которых лежит использование магнитного сердечника, работающего по принципу совпадающих токов. Сердечник имеет обмотку запрещения и выполняет тем самым операцию логического отрицания. Для хранения информации используется пара сердечников. На основе таких пар реализуются как простейшие логические операции, например получение логической суммы и произведения, так и более сложные выражения булевой алгебры. Описаны схемы триггера, регистров типа А и типа В.

Основные преимущества логики на магнитных сердечниках с запрещающей обмоткой следующие: 1) минимальное число активных элементов; 2) при запрещении логический элемент не передает энергию в нагрузку; 3) отсутствие передачи энергии с сердечника на сердечник; 4) все элементы, употребляемые в схеме, одинаковы; 5) в то время как в сердечнике имеется лишь один входной провод, число выходных проводов определяется лишь диаметром отверстия сердечника; 6) малое потребление энергии.

К числу недостатков системы следует отнести: 1) невозможность автоматизации прошивки схем, вследствие ее сложности; 2) схемы требуют четырехтактного привода, а так как при работе на совпадающих токах времена перемагничивания ферритов получаются относительно большими, то при последовательном типе работы схем нельзя получать больших скоростей работы; 3) ферриты обладают низкой температурной стабильностью.

Приведены структурные диаграммы различных логических схем и временные диаграммы их работы.
О. В. Бачин

10353. Переключатели на большие токи для магнитной памяти, управляемой транзисторами. Хелбиг, Рамбл (A high current switch for a transistor-operated magnetic memory. Helbig W. A., Rumble W. G.), Proc. Nat. Electronics Conf., 1956 (1957), **12**, 300—307 (англ.)

Подробно анализируются требования, предъявляемые к переключателям, используемым в выборке данных из ферритовой памяти. Разбираются достоинства и недостатки переключателей, в которых используются выпускаемые промышленностью высокочастотные транзисторы. Отмечается, что из двух возможных вариантов таких переключателей (по току или по напряжению) первый обладает рядом перечисленных существенных недостатков: 1) во время всего цикла обращения к памяти через транзисторы течет базовый ток, т. е. рассеивается значительная мощность; 2) почти полное отсутствие возможности регулировать этот ток в отдельных цепях; 3) наличие обратного тока, вызывающего возбуждение в невыбираемых линиях. Ввиду этого основное внимание уделяется переключателям по напряжению. Исследования проводились для двух состояний транзисторного переключателя: включенного и выключенного. Приводится схема с использованием четырех транзисторов, работающих в схеме считывания и записи для двух линий. На ее основе проводится все исследование, расчет и вывод данных для потенциалов базы, эммитера и коллектора в том и другом состоянии. Приводятся эквивалентные схемы переключателей, кривые зависимостей тока коллектора от напряжения, характеристические кривые при заземленной базе, формы напряжения база — эммитер и токов базы и коллектора.

Приводится таблица результатов испытаний различных типов транзисторов с излагаемой точки зрения.
З. Д. Доброхотова

10354. Собрано самое большое (?) запоминающее устройство на магнитных сердечниках (Largest (?) magnetic core memory assembled), Automat. Control, 1957, **7**, № 2, 60 (англ.)

Сообщение о запоминающем устройстве на 16384 магнитных сердечниках, изготовленном фирмой «Компьютинг Дивайсис оф Канада» (Computing Devices of Canada Ltd.) для исследований по атомной энергии, которое, как указывается в заметке, его канадские изготовители «считают самым большим».

10355. Схемы с газонаполненными диодами для электронных вычислительных машин (Gas diode circuits for electronic computers), Instrum. Practice, 1956, **10**, № 8, 719—720 (англ.)

Описываются элементы и устройства цифровых вычислительных машин, разработанные с применением сверхминиатюрных газонаполненных диодов с холодным катодом. Малые габариты, вес и стоимость этих диодов, высокая механическая прочность, возможность визуального снятия данных, незначительное потребление мощности делают их весьма желательными в вычислительной технике. Особое внимание обращено на построение схем запоминающих устройств на газонаполненных диодах.

Обычно для таких целей используется статическая диодная запоминающая ячейка: сопротивление нагрузки включается в анод диода, величина напряжения анодного питания выбирается между потенциалами зажигания и горения диода, управляющие импульсы подаются в катод; зажженное состояние соответствует записи «1», непроводящее состояние — записи «0». Такая ячейка имеет два основных недостатка: 1) на работе схемы отрицательно сказывается длительное время деионизации газонаполненных диодов; 2) прак-

тически невозможно (из-за трудности выборки числа) включение таких ячеек в матричную схему.

Предлагается динамическая диодная запоминающая ячейка, в которой используется следующее явление: если диод однажды был зажжен (т. е. в нем была записана «1») и напряжение с него затем снято, то до окончания процесса деионизации (200 *мксек* и более) для повторного зажигания достаточно приложить напряжение, не превышающее потенциала горения. К таким ячейкам нет надобности прикладывать постоянное напряжение питания. Записанная информация поддерживается 100-вольтовыми импульсами анодного напряжения длительностью 5 *мксек*, следующими с интервалами 100 *мксек*. Яркость горения диодов при этом достаточна для визуальной индикации.

В разработанной схеме матричного запоминающего устройства применена ячейка на двух диодах с зарядной емкостью. Использование двух диодов позволяет не дожидаться полной деионизации ранее зажженного диода при записи новой информации и сократить благодаря этому цикл записи до 50 *мксек* и менее.

Удобство индикации и контроля делает такое запоминающее устройство весьма выгодным в качестве буферного между быстродействующей оперативной памятью (например, на ферритах) и выводными элементами машины (цифропечатающим и т. п.). Съем данных с диодной памяти возможен как электрическим путем с нагрузочных сопротивлений диодов, так и фотоэлектрическим, при помощи фотоэлементов. В испытывавшемся макете был выбран последний способ, так как он позволяет добиться большей простоты в схеме диодной матрицы. А. А. Крупский

10356. Компактное декадное счетное устройство с удобной коммутацией числовых каналов, пересчетными каскадами и счетчиками. Бёйш, Медер (Ein kompaktes Dekadenzählgerät mit bedarfsweiser Umschaltung der Zählkanale, Untersetzerstufen und Zählwerke. Beusch Werner, Maeder Daniel), Z. angew. Math. und Phys., 1956, 7, № 6, 520—527 (нем.; рез. англ.)

Описано счетное устройство, способное производить одновременный подсчет 10 серий импульсов, пропускаемых через пересчетные декады (коэффициенты пересчета 10), либо 5 серий, пропускаемых через спаренные декады (коэффициент пересчета 100). Для переключения декад используются перекидные переключатели.

Устройство работает от коротких отрицательных импульсов (передний фронт меньше 0,5, задний — больше 1 *мксек*, амплитуда $\geqslant 10$ *в*). Вес 16 *кг*, потребляемая мощность до 160 *вт*. Д. А. Кузьмичев

10357. Запоминающее устройство на магнитном барабане с перемежением импульсов для транзиторной цифровой вычислительной машины. Стивен, Кук-Ярборо (An interleaved-digit magnetic-drum store for a transistor digital computer. Stephen J. H., Cooke-Yarborough E. H.), Proc. Instn Electr. Engrs, 1956, **B103**, Suppl. № 3, 382—389. Discuss. 407—411 (англ.)

10358. Схема контроля запоминающего устройства на магнитном барабане электронной вычислительной машины. Дадда (Un circuito di controllo per memorie a tamburo magnetico di calcolatrici elettroniche. Dadda Luigi), Ricerca scient., 1957, **27**, № 5, 1482—1488 (итал.)

Магнитный барабан вычислительной машины КРК-102А (CRC-102A) Вычислительного центра Миланского политехнического института имеет диаметр 300 *мм*, высоту 150 *мм* и вращается со скоростью 2400 об/мин. Из общего числа 33 головок 16 используются в основной памяти и 17 — для вспомогательных целей. На каждой из 16 дорожек основной памяти размещается 64 42-разрядных слова. Ширина дорожки 5 *мм*. Каждый разряд занимает 0,35 *мм* по длине дорожки и 9,3 *мксек* по длительности. Единицы записываются в виде участков, намагниченных в одном направлении, нули — в другом направлении. Используется метод записи «без возвращения к нулю», где нескольким следующим друг за другом единицам или нулям соответствует участок дорожки, непрерывно намагниченный в одном направлении. Изменение направления намагниченности дорожки происходит в тех случаях, когда в записанном числе после нуля следует единица или после единицы— нуль.

При воспроизведении импульс э. д. с. в обмотке воспроизводящей головки возникает только в момент изменения намагниченности, т. е. в тех случаях, когда после единиц следует нуль (импульс одной полярности) или после нулей — единица (импульс обратной полярности).

Описываемый в статье метод контроля основан на том свойстве рассмотренного метода записи, что после импульса одной полярности в воспроизводящей головке обязательно должен следовать импульс противоположной полярности. Появление двух следующих друг за другом импульсов одинаковой полярности свидетельствует об ошибке. Схема контроля представляет собой логическую схему, выдающую в случае последовательного появления двух импульсов одинаковой полярности сигнал остановки машины. А. В. Шилейко

10359. Исключение мотор-генераторов, используемых в качестве переходных буферов для вычислительных машин системы СЕЙДЖ. Гано (The elimination of motor-generator sets as transient buffers for SAGE computers. Gano J. J.), Commun. and Electronics, 1957, № 32, 468—473 (англ.)

Рассматривается вопрос об исключении мотор-генераторов постоянного тока из системы электропитания вычислительных машин. Исследования по замене мотор-генераторов постоянного тока стабилизированными выпрямителями проводились на цифровых вычислительных машинах, используемых в системе противовоздушной обороны СЕЙДЖ в США. Приведена общая схема системы электропитания цифровых вычислительных машин, использующих мотор-генераторы в качестве источников питания постоянным током. Взамен предлагается система электропитания электронного оборудования без мотор-генераторов. Приведено описание работы и схема этой системы. Исследование надежности вычислительных машин в системе без мотор-генераторов проводилось в два этапа. На первом этапе влияние скачков мощности на надежность вычислительных машин определялось путем выяснения допусков на напряжение питания вычислительной машины и снятия переходных характеристик источников питания постоянным током. На втором этапе путем вычислений определялись границы, внутри которых переходные процессы напряжения были бы достаточной амплитуды и длительности для того, чтобы стать причиной возможной ошибки в работе вычислительной машины. Частота возникновения переходных процессов вычислялась, исходя из оценок частоты возникновения неисправности в оборудовании. Суммирование результатов обоих этапов исследования дало количество ошибок в работе вычислительных машин за год. Приведены графики и таблицы, дающие качественный анализ проведенных испытаний. Автор приходит к выводу, что исключение мотор-генераторов является логичным. В результате получается более простая, дешевая и удобная в эксплуатации система электропитания. О. К. Щербаков

10360. Фотопечать мелких металлических деталей. Хафман (Photoetching limited quantities of

small metal parts. Huffman Dwight), Industr. Photogr., 1957, 6, № 10, 18—19 (англ.)

Описан быстрый и недорогостоящий метод фотопечати металлических деталей, монтажа, катушек и т. д., применяемый в исследовательской лаборатории фирмы «ИБМ». И. К. Волков

10361. Простое устройство преобразования угла поворота вала в цифровой код с записью данных. Тиффани (A simple shaft digitizer and store. Tiffany A.), Electronic Engng, 1957, **29**, № 358, 568—574 (англ.)

Описывается одноотсчетный преобразователь угла поворота вала в число на основе использования контактного кодового диска. Устройство отличается универсальностью применения, простотой в изготовлении и низкой стоимостью. Диск кодируется двоичным кодом Грэя с общим разделением окружности на 1200 частей (диаметр диска 110 *мм*).

Производственный процесс изготовления диска основан на вытравливании поверхности медной заготовки по негативному отпечатку, который может быть получен двумя методами: 1) фотографированием изображения большого масштаба; 2) последовательной засветкой отдельных участков с соответствующим разворотом на делительной головке. В последнем случае целесообразно применять цифровые вычислительные машины с входным устройством на перфокартах. В качестве щеток в преобразователе используются металлические шарики диаметром $^1/_{16}$ дюйма. Далее приводится ряд данных технического характера в отношении допусков, проверки на точность, испытаний на износ. Освещаются общие вопросы, определяющие конструктивные данные преобразователей в зависимости от требований точности, предельной скорости и условий применения. Преобразование кода Грэя в нормальный двоичный код производится релейным устройством с выдачей данных 5 раз в 1 сек. Приводится интерпретация логики преобразования, конструктивные и эксплуатационные данные. Устройство предусматривает запись данных на перфоленту. Е. М. Баскаков

10362. Дискретизация преобразователей с возбуждением от несущего напряжения при помощи программируемого аттенюатора. Цвейциг (Digitization of carrier-excited transducers using a programmed attenuator. Zweizig John R.), IRE Trans. Instrum., 1956, **PGI-5**, June, 174—180, 12 (англ.)

Лаборатория реактивных двигателей Калифорнийского технологического института разработала аналого-цифровой преобразователь, предназначенный для превращения в цифровую форму выходных электрических напряжений различных преобразователей (датчиков), измеряющих такие параметры, как давление, растяжение, напор, перемещение и др. (в данном случае в качестве датчиков использовались тензометры). Эти измерения производятся в лаборатории при испытаниях моделей в аэродинамической трубе и при исследованиях двигателей. Получаемые в цифровой форме величины используются для ввода в электронную цифровую вычислительную машину или для непосредственной регистрации в виде таблиц. Описанная система удовлетворяет следующим трем требованиям: 1) низковольтный выход датчиков используется для цифрового преобразования непосредственно, без дополнительного усиления; 2) цифровой выход устройства также может быть использован для ввода прямо в вычислительную машину или автоматическое печатающее устройство без дополнительной обработки; 3) основные элементы, участвующие в аналого-цифровом преобразовании, являются пассивными элементами. Принцип работы устройства заключается в следующем. Несущее переменное напряжение 1 *кгц*, получаемое от одного источника, поступает одновременно в датчик и в специальный программный аттенюатор, управляемый электронно-релейной управляющей схемой, содержащей 14 быстродействующих реле (благодаря этому изменения амплитуды и частоты несущего напряжения не сказываются на точности преобразования). Аттенюатор представляет собой пассивную схему из соответствующим образом подобранных сопротивлений, часть которых подключается и отключается контактами указанных 14 реле. Выходные напряжения датчика и аттенюатора сравниваются на суммирующем трансформаторе. Суммарное напряжение с выхода трансформатора усиливается усилителем переменного тока, играющим роль нуль-органа, и управляет переключениями в указанной релейной схеме. Благодаря переключениям выходное напряжение аттенюатора изменяется до тех пор, пока не станет равным измеряемому напряжению датчика. При этом положения реле в релейной схеме образуют цифровой код, пропорциональный измеряемому напряжению. Постепенное приближение величины выходного напряжения аттенюатора к величине измеряемого напряжения производится по известному принципу «взвешивания», причем константами «взвешивания» являются в данном случае числа 1, 2, 4, 8, 10, 20, 40, 80, 100, 200, 400, 800, 1000 и 2000. Преобразование производится периодически; в конце каждого преобразования реле сбрасываются в нулевое состояние. Устройство имеет следующие основные показатели. Полное время цифрового преобразования 30 *мсек*. Точность измерения 1/3000. Чувствительность нуль-органа 5 *мкв* (среднее квадратичное значение). Точность аттенюатора 0,025%. Минимальный полный диапазон входного напряжения (с датчика) 0÷15 *мв*. Выходной диапазон может изменяться в 10 раз. Выходные данные пробиваются на стандартной перфоленте в двоично-десятичной системе в виде шестизначных двоичных «слов». Время считывания одного «слова» равно 0,1 сек. В. А. Брик

10363. Когда, где и почему нужна комбинированная дискретно-аналоговая система? Мак-Лауд, Леджер (Combined analog and digital systems — why, when, and how. McLeod John H., Leger Robert M.), Instrum. and Automat., 1957, **30**, № 6, 1126—1130 (англ.)

На примере уникальной системы, разработанной фирмой «Конвэр» (Convair Div., General Dynamics Corp), рассмотрены общие вопросы планирования систем для моделирования (имитации) управляемых снарядов. Рекомендуется применение аналоговой техники в тех узлах, где имеет место высокоскоростное интегрирование, суммирование, умножение и деление на константу, эмпирическое манипулирование; далее при вводе и выводе непрерывных величин, имитации аналоговых узлов реальной системы в цепях с обратной связью, а также всюду, где достаточна точность не свыше 0,1—1%. Дискретная техника должна включаться в систему, когда требуется высокая точность вычислений или когда в разные моменты времени одно и то же оборудование должно производить различные операции, а также при вычислении малых разностей больших величин, при вычислении матриц умножении и делении на переменную величину, при расчете функции произвольного числа переменных, при быстрой смене решаемых задач, дискретном вводе или выводе и при иммитации дискретных узлов реальной системы. Подчеркивается, что стоимость системы имитации во много раз меньше стоимости проведения испытаний путем запуска реальных снарядов. М. Б. Великовский

10364. Вспомогательное запоминающее устройство на магнитных лентах для машины ЭДСАК. Уилкс, Уиллис (A magnetic-tape auxiliary storage sys-

tem for the EDSAC. Wilkes M. V., Willis D. W.), Proc. Instn Electr. Engrs, 1956, B103, Suppl. № 2, 337—345. Discuss, 354—356 (англ.)

Описываемое устройство обладает скоростью продвижения ленты 2,5 *м/сек* и стартстопным временем 10 *мсек*; оно имеет кассеты, управляемые сервосистемой и пневматические ведущие ролики. Управление осуществляется специальной подпрограммой из машины. При записи используется метод «без возврата к исходному уровню», требующий наличия маркерных импульсов. Система управления позволяет работать с двумя лентопротяжными механизмами (л. п. м.). Блоки чисел разделяются друг от друга метками в виде прозрачных участков ленты, считываемых фотоэлементом.

Пневматический ведущий ролик состоит из барабана с перфорированной поверхностью, вращающегося внутри цилиндрического корпуса с вырезом приблизительно в 90°. При создании вакуума лента присасывается к вращающемуся барабану и продвигается. Вырез начинается приблизительно за 10° от вертикали, что уменьшает утечку воздуха. В месте сбега ленты сделан паз, сообщающийся с атмосферой и способствующий отставанию ленты от ролика. Во избежание прилипания ленты к корпусу ролика, вызванного электризацией последней, около паза установлен специальный нож, отводящий ленту от ролика. Под головками лента движется по направляющей, что уменьшает вибрацию ленты. В направляющей сделаны вырезы, в которые лента слегка погружается головками, благодаря чему создается достаточный контакт между лентой и головками. Направляющая расположена тангенциально к ведущим роликам. Конструкция направляющей позволяет использовать склеенную ленту. Торможение ленты осуществляется присосом через отверстия в направляющей и одновременным выключением присоса в роликах. Управление пневмороликами и торможением ведется с помощью воздушных клапанов, управляемых соленоидами.

Бобины с лентой приводятся во вращение отдельными сервомоторами с расщепленным полем, которые в свою очередь управляются фотоэлементами, установленными в карманах и реагирующими на положение ленточной петли в кармане. Для защиты от ошибок оператора или сбоев в системе все включающие цепи имеют автоблокировку, обеспечивающую включение и выключение только в надлежащей последовательности. При передаче чисел между внутренним запоминающим устройством (з. у.) и магнитными лентами (м. л.) используется буферный регистр с последовательным приемом и выдачей, происходящими на разных частотах. Частота сдвигов при записи и чтении на м. л. определяется маркерами. Плотность записи равна приблизительно 5 *имп/мм*.

Определение последнего сдвига при чтении с м. л. делается по балластному 36-му разряду, в котором всегда пишется единица. Для этой цели буферный регистр имеет на 1 разряд больше, чем число. Передача чисел и управление движением ленты осуществляется с помощью специальных инструкций и подпрограмм. Одна из инструкций реагирует на маркер блока. Ее запись на адресе, которому она передает управление, вызывает так называемый «динамический стоп» машины (непрерывное выполнение одной инструкции, пока не будет прочитан маркер). При чтении нескольких чисел подряд они располагаются с промежутком в 7,5 *мм*, достаточным для выполнения цикла чтения с учетом непостоянства скорости ленты. Этот промежуток создается при записи введением в подпрограмму записи двух балластных инструкций. Управление движением ленты осуществляется 5 триггерами, устанавливаемыми в соответствие с выполняемой инструкцией и имеющими значения: «пуск-стоп»; «вперед-назад»; «запись-чтение»; «работа-не работа»; «*N* л. п. м.» Подпрограмма поиска продвигает ленту сначала в прямом направлении. В это время машина ждет на «динамическом столе» первого маркера блока, за которым следует номер блока.

После этого находится разность между прочитанным номером блока и требуемым. Если эта разность равна 0, то следует передача; если она отрицательна, лента продолжает двигаться вперед и, наконец, если она положительна, лента реверсируется и двигается в обратном направлении, пока не будет найден нужный блок. После этого лента снова движется в прямом направлении и следует чтение.

Цикл записи на машине происходит следующим образом. В первом числе блока, являющемся управляющим, указывается: а) первый адрес з. у., с которого должно быть прочитано число;

б) количество чисел, подлежащее записи на м. л.

За управляющим числом следует его контрольная сумма, записанная в виде дополнения. Затем следует блок с контрольной суммой в конце, записанной также в виде дополнения. После записи перечисленных данных проверяется правильность записи. Для этого лента перематывается в обратном направлении, ожидается маркер блока, восстанавливающий прямое движение, и следует контрольное чтение. Первым читается номер блока и сравнивается с заданным. Затем читается управляющее число и его контрольная сумма. В случае неравенства результата сложения 0 чтение прерывается, и следует снова операция записи. В противном случае следует чтение чисел блока и контрольной суммы, а в накопителе образуется их сумма, равная 0, если не было ошибок. Все числа при контрольном считывании в з. у. помещаются на один адрес. Если содержание накопителя не равно 0, циклы чтения и записи полностью повторяются.

Операция чтения подобна операции контрольного чтения, за исключением того, что числа блока помещаются в з. у. на разные адреса.

Специальная схема допускает работу машины во время движения ленты. Испытание м. л. на машине ЭДСАК длилось несколько месяцев. Лентопротяжный механизм требовал к себе мало внимания. Некоторые затруднения были вызваны электризацией ленты. Это было устранено металлизацией внутренней поверхности карманов.

Система управления с помощью подпрограмм работала хорошо. Случайные ошибки вызывались главным образом загрязнением. Система контроля ошибок оказалась очень эффективной и полностью их нейтрализовала. А. И. Щуров

10365. **Запись на магнитной ленте для использования в вычислительных машинах. Уайлдангер** (Magnetic tape recording for computer use. Wildanger Edward G.), Automat. Control., 1957, 7, № 6, 36—40 (англ.)

Дается обзор наиболее значительных результатов (на конец 1957 г.) инженерных исследований по улучшению характеристик запоминающих устройств на магнитной ленте. Рассматриваются характеристики, зависящие от механизма продвижения ленты, магнитных головок, считывающих и записывающих усилителей, качества магнитной ленты и т. д. Обсуждаются вопросы, связанные с надежностью памяти, скоростью выборки и записи данных, удобством и простотой эксплуатации, а также требования, предъявляемые в связи с этим к отдельным частям блока памяти на магнитной ленте.

Потеря информации — одна из наиболее существенных причин снижения надежности. Чаще всего она вызывается удалением поверхности ленты от головки в силу различных причин: несовершенства головки,

плохого качества ленты, недопустимых условий эксплуатации и хранения ленты. В связи с этим определяются требования для устранения такого рода факторов, снижающих надежность.

Увеличение скорости выборки данных находится в прямой зависимости от плотности записи данных на магнитной ленте, которая в свою очередь определяется считывающими головками и старт-стоповыми механизмами. Пробег ленты в старт-стоповом цикле не должен превышать 0,5÷0,75 *мм*. Сообщается, что уже разработаны и выпускаются промышленностью головки, позволяющие считывать и записывать информацию с плотностью до 160 знаков на 1 *см*, что в два раза превышает применявшуюся до настоящего времени плотность записи. Таким образом данные головки допускают дальнейшее повышение плотности записи.

Применение комплекса новейших конструкций головок, лентопротяжных механизмов и электронных схем, а также новых лент позволяет записывать данные с большой степенью надежности, так что 1 ошибка приходится более чем на 10^8 записанных знаков. Были проведены эксперименты с плотностью записи до 200 импульсов на 1 *см*, причем никакого специального отбора кусков ленты не производилось. Ближайшая цель — получить систему со скоростью считывания до 120 000 знаков в 1 сек., что снизит время поисков по сравнению с существующим в 4 раза, при записи в катушке до $20 \cdot 10^6$ знаков.

Сообщается, что приспособление уже известной системы видеозаписывающего устройства для записи числовой информации позволит запомнить количество информации, эквивалентное 6 млн. перфокарт.

З. Д. Доброхотова

10366. Пересчет на входе и выходе двоичной вычислительной машины. Кодд, Херрик (Input scaling and output scaling for a binary calculator. Codd E. F., Herrick H. L.), Proc. Assoc. Comput. Mach., 1953, September, 21—23 (англ.)

10367. Крупные или малые вычислительные машины с программным управлением? Цузе (Große oder kleine programmgesteuerte Rechengeräte? Zuse K.), Unternehmensforschung, 1956—1957, **1**, № 3, 117—122 (нем., рез. англ.)

Обсуждается применение учетно-плановых малых (стоимостью до 300 тыс. марок) и крупных (стоимостью свыше 1 млн. марок) вычислительных машин с программным управлением. Первоначально для решения научно-технических задач оборудование входа-выхода машин имело меньшее значение, чем арифметические устройства машин. Позже важность внешних устройств выросла вследствие увеличения объема данных в новых задачах экономики и коммерции. Такое развитие машин приводит к выводам, что только крупные машины, благодаря своей универсальности, могут удовлетворять всем требованиям применения, надежности и производительности. Сравниваются достоинства и недостатки того и другого типов машин в зависимости от области применения. Результаты сравнения сведены в таблицу.

А. Ф. Смирнов

10368. Опрос потребителей вычислительной машины ИБМ-650. Фидлер, Кеннеди (A survey of users of the IBM-650 computer. Fiedler Edgar R., Kennedy David R.), Computers and Automat., 1957, 6, № 10, 10, 28 (англ.)

Излагаются результаты опроса 112 различных фирм, проведенного для получения данных о ИБМ-650 и других быстродействующих электронных цифровых машинах. Были поставлены следующие вопросы: соотношение между использованием машин для научных расчетов и для обработки данных; мнение о централизированном и разрозненном использовании машин; текущая эксплуатация ИБМ-650; число установленных и заказанных машин типа 650 и аналогичных; требования к обслуживающему персоналу. Среди опрошенных — авиационные, железнодорожные, нефтяные и газовые, банковские, промышленные и другие организации. 72% фирм ответило, что использует вычислительные машины в основном для обработки данных, а 28% — для научных вычислений. 80% организаций предпочитает централизированное использование машин. 20% фирм имеет более одной машины. В среднем на фирму приходится 1,3 машины. Число необходимых программистов на одну машину ИБМ-650 колеблется от 13 человек (в авиационной промышленности) до 6. 65% организаций использует вычислительные машины для расчетов заработной платы, 53% — для решения общих технических задач, 35% — для расчетов стоимости и бюджетов, 33% — для планирования производства и снабжения, 25% — для общих расчетов и отчетности.

В. А. Брик

10369. Новый вычислительный центр (New Computer Centre), Office Mag., 1958, 5, № 50, 129-130 (англ.)

Сообщается, что основной задачей открытого 20 декабря 1958 г. в Лондоне Голлеритовского вычислительного центра является организация широкого обсуждения, на базе действующей вычислительной машины, различных проблем с точки зрения применения к ним вычислительной техники. Кроме зала, в котором установлена вычислительная машина ГЭК-4 (тип 1201), в новом центре имеются лекционный и кинозалы, комнаты для конференций и дискуссий. Штат вычислительного центра укомплектован квалифицированными специалистами по различным отраслям вычислительной техники. Отмечается, что машина этого центра не будет сдаваться на прокат, поскольку деятельность центра целиком посвящается образовательным целям, расширению сферы использования вычислительной техники и т. п. З. Д. Доброхотова

10370. Голлеритовский вычислительный центр (The Hollerith Computer Centre), Brit. Communs and Electronics, 1958, **5**, № 2, 154 (англ.)

Сообщается об открытии в Лондоне Голлеритовского вычислительного центра, одной из основных задач которого является ознакомление потенциальных потребителей вычислительных машин с их возможностями. При вычислительном центре открыты однодневные курсы для директоров и управляющих предприятиями, организуются краткосрочные курсы для более подробного ознакомления с использованием вычислительной техники. Новый центр оборудован большой вычислительной машиной ГЭК-4 (HEC-4).

З. Д. Доброхотова

10371. Открыт вычислительный центр для искусственного спутника Земли (Satellite computing center opened), Automat. Control, 1957, **7**, № 2, 53—56 (англ.)

Сообщение из Вашингтона о том, что открыт новый вычислительный центр, предназначенный для обработки данных, связанных с предполагавшимся запуском американского искусственного спутника «Авангард».

Центр использует вычислительную машину ИБМ-704, запоминающим устройством которой является магнитная лента со скоростью ввода и вывода 2500 чисел в 1 сек., причем возможно одновременное использование сразу трех магнитных лент. Одним из выходных устройств должно служить устройство ИБМ-780, в котором на экране электроннолучевой трубки будет видно решение задачи в виде графиков, геометрических фигур, символов или чисел.

В. П. Разроев

10372. Вычислительные машины в современном мире. Бут (Computing in the modern world. Booth Andrew), Engineering, 1957, **184**, № 4775, 339—341 (англ.)

Содержанием статьи являются материалы доклада, сделанного на сессии Британской ассоциации инженеров в Дублине в сентябре 1957 г.

Вычислительная лаборатория Биркбекского колледжа сконструировала универсальную цифровую вычислительную машину АПЕКСК (APEXC), отличающуюся весьма малым количеством оборудования и гибкостью программирования. На данной машине проводились экспериментальные работы по составлению программ для решения ряда задач научного, технического и коммерческого характера, а также для нечисленных задач. Кратко, в объеме функциональной схемы, дается перечень отдельных устройств цифровых вычислительных машин и выполняемых ими функций. Приводятся примеры отдельных задач из каждой области применительно к решению на цифровых вычислительных машинах.

Задача коммерческого характера заключается в вычислении оптимального количества закупаемых товаров, при котором скидка на оптовую закупку и затраты на хранение приобретенных товаров обеспечивают максимальную прибыль. Техническая задача представлена типовым расчетом трансформаторов (точность расчета 2%, время 4 сек.), научная — определением молекулярной структуры кристаллов на основе данных явления дифракции при облучении рентгеновскими лучами. В качестве примера нечисленного использования вычислительных машин приводятся основные моменты перевода иностранного языка.

В заключение со ссылкой на приведенные примеры указывается, что уже на ближайшее будущее трудно предугадать многосторонность использования цифровых вычислительных машин. Основная проблема развития заключается в усовершенствовании методов программирования. Е. М. Баскаков

10373. Вопросы численного анализа и применения электронных вычислительных машин на Лондонском конгрессе. Апаро, Бём (Analisi numerica e applicazioni delle calcolatrici elettroniche, in un recente congresso a Londra. Aparo Enzo, Böhm Corrado), Ricerca scient., 1957, 27, № 4, 1115—1120 (итал.; рез. англ., нем., франц.)

Обзор докладов на Лондонском конгрессе, посвященном развитию вычислительной техники, проходившем в апреле этого года. Группу математических докладов открыл проф. Ван-Вейнгаарден докладом о решении дифференциальных уравнений в частных производных эллиптического типа. Большинство математических докладов было посвящено опыту решения различных задач на электронных вычислительных машинах.

Значительная часть докладов посвящена инженерным достижениям в области разработки электронных вычислительных машин. Вопросы применения можно разбить на следующие три основные группы: а) научные, технические и промышленные применения вычислительных машин; б) численный анализ и методы автоматических вычислений; в) задачи нематематического характера. В первой группе отмечаются задачи, связанные с расчетом режимов в логических схемах с полупроводниковыми диодами, решение химических задач, задачи автоматического управления, расчеты траекторий в синхротронах, задачи транспорта и т. д. Среди докладов третьей группы очень большое внимание уделено докладу И. С. Мухина об опыте перевода с русского языка на английский на машине БЭСМ. А. В. Шилейко

10374. Совещание по автоматическому управлению и вычислительной технике, Москва, 5—8 марта 1957 г. Русевич И. М., Автоматика и телемеханика, 1958, 19, № 2, 191—195

10375. Методы вычислений при помощи электроники и их приложение к задачам кораблестроения. Сайама (Le calcul électronique, sa technique et son application aux problèmes navals. Sciama A. Session 1956. Assoc. techn. maritime et aéronaut. Paris, 1956, 30 p., ill.) (франц.)

Подробно описываются принципы действия электромеханических и электронных цифровых вычислительных машин, основные данные машины ГАММА-3 фирмы «Буль» и выполняемые в ней операции.

Рассматриваются методы решения задач на цифровых вычислительных машинах с использованием форм представления чисел с фиксированной или с плавающей запятой. В качестве примеров рассматриваются расчет таврового и двутаврового профилей и решение системы алгебраических уравнений. В заключение обсуждаются вопросы организации вычислительных бюро. А. В. Шилейко

10376. Электронные цифровые вычислительные машины. Станулов (Електронни цифровосметачни машини. Станулов Н.), Техника (Бълг.), 1957, 6, № 9, 28—33 (болг.)

Популярная статья.

10377. Электронные вычислительные машины. Часть 2. Хорн (Elektronische Rechenmaschinen. Teil. 2. Horn Christian), Radio und Fernsehen, 1956, № 23, 713—716 (нем.)

Начало см. РЖМат, 1957, 6757. Популярная статья. Описываются арифметические схемы вычислительных машин.

10378. Электронные вычислительные машины. Часть 3. Хорн (Elektronische Rechenmaschinen. Teil 3. Horn Christian), Radio und Fernsehen, 1956, 5, № 24, 752—755 (нем.)

Начало см. РЖМат, 1957, 6757; реф. 10377.

Описываются перфоленты и магнитные ленты как средства ввода данных и хранения информации в вычислительных машинах. Дается продробное описание магнитного барабана. Для иллюстрации привлекаются данные о дрезденской вычислительной машине Д-1. Перечисляются другие виды памяти (электроннолучевые трубки, магнитные сердечники, вакуумные лампы). Указывается на возможность применения в памяти десятичных числовых ламп. Их применение ограничено тем, что они работают на частотах не свыше 30 *кгц*. Д. А. Кузьмичев

10379. Моделирование термических цепей атомного реактора. Кайе (La simulation du circuit thermique dans un réacteur nucléaire. Caillet C. P.), Actes. Journées internat. calcul analog., Bruxelles, 1955. Bruxelles, 1956, 144—148 (франц.; рез. англ.)

Расчеты динамических процессов в атомных реакторах сводятся к решению дифференциальных уравнений теплопередачи от собственно реактора к теплоносителям первой и второй ступени.

Для различных режимов работы реактора, при некоторых упрощающих допущениях, решение этих уравнений оказывается возможным с помощью электронных моделирующих устройств, представляющих из себя сочетание сумматоров, интеграторов, потенциометров и других электронных элементов.

Дается описание трех электронных моделей, специально предназначенных для расчета термических цепей атомных реакторов: модель лаборатории в Ок-Ридж (США), модель Комитета по атомной энергии во Франции и модель Хартфордского института в США. Библ. 13 назв. А. А. Крюков

10380. Моделирующая установка Рейнско-Вестфальского института инструментальной математики в Бонне. Мюллер (Die Integrieranlage des Rheinisch-Westfälischen Instituts für Instrumentelle Mathematik in Bonn. Müller Paul Friedrich-

Forschungsber. Wirtsch.-und Verkehrsminister. Nordrhein-Westfalen, 1956, № 310, 54 S., ill.) (нем.)

В июле 1954 г. в Институте инструментальной математики в Бонне демонстрировалась моделирующая установка, разработанная и изготовленная фирмой «Шоппе унд Фэзер» (Shoppe und Faeser). Моделирующая установка имеет механическое вычислительное устройство и электрическую передачу. В качестве датчика вращения используется приводной двигатель, скорость которого регулируется и имеет максимальное значение 400 об/мин. В установке имеется 8 интеграторов, выполненных в виде фрикционных приводов. При нормальном включении фрикционный диск интегратора поворачивается пропорционально интегрируемой величине.

Функциональные столы вычислительного устройства используются для воспроизведения решения в виде кривых, для задания функций посредством фотоэлектрических чувствительных элементов и для одновременного воспроизведения и задания функций. Устройство позволяет решать функциональные и разностно-функциональные уравнения. Подробно обсуждается работа с установкой.

Рассматриваются три этапа подготовки: получение структурной схемы из заданного дифференциального уравнения; определение масштабных множителей и установка начальных условий на интеграторах и функциональных столах. И. Ю. Ивличев

10381. Прецизионные модуляторы и демодуляторы. Бланьер (Precision modulators and demodulators. Blanyer Carl G.), J. Assoc. Comput. Machinery, 1955, 2, № 4, 229—242 (англ.)

Рассматриваются устройства, служащие для преобразований сигнала переменного тока в сигнал постоянного тока и сигнала постоянного в сигнал переменного тока в комбинированных электромоделирующих установках, содержащих как блоки переменного, так и блоки постоянного тока. Оценка качества преобразователей производится по стабильности нуля, степени линейности выходной характеристики, помехоустойчивости, частотной характеристике, габаритам и практичности.

Наилучшие результаты получаются, когда в схемы модулятора и демодулятора вводится отрицательная обратная связь, для чего на выходе модулятора или на входе демодулятора необходимо иметь сигналы двух знаков одновременно. Для целей усиления ошибки преобразования может быть использован обычный операционный усилитель с автоматической стабилизацией нуля; при этом величины получающихся в преобразователях погрешностей будут иметь такой же порядок, как и в линейных блоках электромоделирующих устройств.

В заключение рассматриваются методы улучшения формы выходного сигнала и методы компенсации получающихся при этом фазовых сдвигов. В схеме, осуществленной на рассмотренном принципе, погрешность нелинейности не превышала 0,1% от шкалы, равной 50 *в*; смещение нуля на выходе при нулевом сигнале на входе составляло около 10 *мв*; для сигнала частоты 100 *гц* сумма паразитных гармоник высоких частот не превышала 0,25%. Г. М. Петров

10382. Цифровая компенсация для регулирования и моделирования. Доу (Digital compensation for control and simulation. Tou Julius), Proc. I. R. E., 1957, 45, № 9, 1243—1248 (англ.)

Излагаются способы улучшения характеристик цифровых систем регулирования с обратной связью, использующих цифровую вычислительную машину для обработки информации по программе. Показывается, что при выполнении корректирующих расчетов по соответствующей программе ошибка в системе может быть уменьшена и ее стабильность может быть улучшена. Рассматривается также компенсация ошибки при цифровом программировании и обобщенная цифровая компенсация. Приводится иллюстрирующий пример. В. М. Долкарт

10383. Вентильные тригонометрические преобразователи. Новосельцев Я. В., Смолов В. Б., Тахванов Г. И., Изв. Ленингр. электротехн. ин-та, 1957, вып. 29, 66—72

Приводятся краткие сведения по вентильным тригонометрическим преобразователям, основанным на методе линейно-кусочной аппроксимации заданной функции. Дан ряд принципиальных схем синусного преобразователя на полупроводниковых вентилях с возможностью воспроизведения синусной зависимости при

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant +\frac{\pi}{2}.$$

Эти же схемы могут воспроизводить функции косинуса. Воспроизведение функций тангенса и котангенса предлагается производить на малогабаритных электронных диодах. Далее говорится о воспроизведении секансной функции и обратных тригонометрических функций. Г. К. Кузьминок

10384. Экстраполяторы в моделирующих устройствах с последовательным выполнением операций. Лёфгрен (Predictors in time-shared analog computers. Lofgren Lars), Actes Journées internat. calcul analog., Bruxelles, 1955, Bruxelles, 1956, 107—110 (англ.; рез. франц.)

Сравниваются моделирующие устройства с последовательным и параллельным выполнением операций. Указывается на преимущество последних: быстродействие и отсутствие необходимости в устройстве памяти. Применяя в моделирующих устройствах с последовательным выполнением операций экстраполирующие устройства, рассчитывающие поведение выходных параметров системы в течение того времени, в которое в модель не вводится входных данных, можно существенно увеличить их быстродействие. Дается схема экстраполятора, построенного на интеграторе. Последовательно с интегратором включен электронный переключатель, работающий от синхронизирующих импульсов. В течение того периода, когда поведение системы рассчитывается на основании ее поведения в предшествующий период времени, электронный переключатель разомкнут и на вход интегратора поступает приближенное значение производной от функции, получающейся на выходе интегратора; эта производная формулируется на решающем усилителе, работающем в режиме дифференцирования.

Приводится мостиковая схема электронного переключателя, построенного на четырех кремниевых диодах и одном транзисторе. Рекомендуется дополнительно вводить в эту схему ламповые диоды. При времени экстраполирования в 20 *мсек* целесообразно иметь интегрирующую емкость в 500 *пф*, что дает ошибку в 40 *мв* при полной шкале в 40 *в* (0,1%) и должно обеспечить достаточное быстродействие. Б. Ш. Беркович

10385. Приспособление моделирующей техники к непрерывно вращающемуся магнитному барабану. Даус, Уэст (The application of analogue techniques to a continuously rotating magnetic drum. Douce J. L., West J. C.), IRE Trans. Instrum., 1956, PGI-5, June, 107—112, 8 (англ.)

Рассматриваются возможности различных применений быстро вращающегося магнитного барабана для регистрации и обработки непрерывных данных в моделирующих вычислительных установках и приводятся некоторые результаты экспериментов в этой области. Из трех типов модуляции, которые могут использоваться при регистрации непрерывных данных

на барабане (амплитудная, частотно-импульсная и широтно-импульсная), авторы считают наиболее подходящей последнюю (амплитудная модуляция затрудняется паразитными изменениями амплитуды записанных сигналов из-за возможных биений барабана и из-за неоднородности магнитных свойств поверхности; частотно-импульсная неудобна тем, что длительность цикла записи не постоянна, а зависит от модуляции, затрудняя синхронизацию записи с вращением барабана). Все технические задачи в статье разбираются применительно к барабану со следующими параметрами: скорость вращения 3000 об/мин, наружный диаметр 150 *мм*, число дорожек 256, частота повторения записывающих импульсов 10 *кгц* (200 имп/сек.) Описываются следующие применения магнитного барабана:

1) Регистрация непрерывных длительных, медленно изменяющихся величин. Самым удовлетворительным признается в статье следующий способ регистрации. На одну дорожку барабана ведется запись широтно-модулированных сигналов. Частота этих импульсов составляет 10 *кгц*. На 1 дорожку может быть записано 200 таких импульсов. В течение первого оборота барабана, т. е. за 1/50 сек. будет записано 200 импульсов, отражающих поведение регистрируемой функции в течение этого периода. Так как скорость изменения функции невелика, то нет необходимости в такой частой регистрации и будет вполне достаточно регистрировать значения функции примерно через каждую 1/50 сек. Поэтому для экономии места на барабане запись широтно-модулированных импульсов при втором обороте барабана (т. е. за вторую 1/50 долю секунды) производится на эту же дорожку, но не с самого ее начала, а с того места, где при первом обороте был записан второй из двухсот импульсов. Таким образом, на дорожке остается только один (первый) импульс, характеризующий поведение функции в первую 1/50 долю секунды. При третьем обороте запись начинается с места третьего импульса на дорожке, и остается один импульс, записанный при втором обороте, и т. д. Через 200·1/50 сек. = 4 сек. вся дорожка заполняется и на ней оказывается записанным график входной функции за эти четыре секунды. Если нужно, используются несколько дорожек. При считывании записанной функции производится демодуляция импульсов. Приведены электронные схемы для записи и воспроизведения функции по этому способу.

2) Генерация (отработка) нелинейных функций $y = f(x)$ с помощью магнитного барабана. Генерируемая функция, как и в предыдущем случае, записывается на барабане в виде серий широтно-модулированных импульсов. Расстояние, отсчитываемое вдоль дорожки барабана, рассматривается как независимая переменная X. При отработке функции входное напряжение x преобразуется в импульс, определяющий место барабана, откуда функция должна быть считана и демодулирована. В качестве примера рассмотрено моделирование нелинейной характеристики типа «насыщение». Нелинейная функция может являться результатом некоторых предварительных вычислений и может также использоваться для дальнейших вычислений. Это позволяет создавать системы, в которых нелинейность автоматически оптимизируется, благодаря чему можно обеспечивать наилучшую реакцию системы на входной сигнал конкретного вида.

3) Магнитный барабан может быть использован в моделирующих вычислительных установках в качестве вводного и выводного устройства, для ввода начальных значений, граничных условий и т. д. Кроме того на моделирующих установках, снабженных магнитным барабаном, можно решать задачи, в которые входят функции двух и более переменных. Авторы считают, что магнитный барабан является важным средством для проектирования и испытаний нелинейных систем с обратной связью и что он значительно расширяет возможности моделирования. Библ. 3 назв.

В. А. Брик

10386. **Программирование моделирующих устройств Ян** (Programming the analog computer. Yang H. H.), Petrol. Refiner, 1957, **36**, № 2, 115-122 (англ.)

Статья посвящена методике решения задач и, в частности, задач химической промышленности на электронных моделирующих устройствах. Рассматриваются схемы для решения линейного дифференциального уравнения 1-го порядка, для установления нового масштаба независимой переменной (времени), для решения линейного дифференциального уравнения 2-го порядка, дифференциального уравнения в частных производных, для получения различных функциональных зависимостей методом аппроксимации и для решения системы дифференциальных уравнений.

А. В. Шилейко

10387. **Расчет и применения электронной модели управляющих систем. Идзерда, Энсинг, Янсен, Оффереинс** (Design and applications of an electronic simulator for control systems. Idzerda H. H., Ensing L., Janssen J. M. L., Offereins R. P.), Trans. Soc. Instrum. Technol., 1955, **7**, № 3, 105—119, Discuss. 119—122 (англ.)

Рассматриваются вопросы расчета и применения электронной модели системы управления нефтеочистительного завода. Основу электромоделирующей установки составляют электронные решающие блоки, содержащие усилители постоянного тока с местной положительной обратной связью, и ряд специальных функциональных блоков, осуществляющих функции с запаздывающим аргументом, петлю гистерезиса и т. п. Установка содержит около 700 радиоламп и потребляет 5 *квт*. Решение задач производится в ускоренном темпе с автоматическим повторением, так что на одно решение затрагивается всего лишь несколько миллисекунд.

Установка использовалась для решения задач по выбору необходимого закона управления при введении в тракт управления дифференцирующих и интегрирующих звеньев, при изменении постоянных времени приводов, при наличии в системе нелинейных зависимостей. В результате были получены важные рекомендации по выбору параметров в системе. Установка использовалась также для учебных целей. Г. М. Петров

10388. **О решении на модели задач с заданием граничных условий в двух точках. Гринспан, Улрик, Мацуно** (On an analog solution of two point boundary value problems. Greenspan Donald, Ulrick Bruno, Matsuno Shozo), Rev. Scient. Instrum., 1957, **28**, № 12, 1040—1042 (англ.)

При математическом исследовании многих физических задач приходят к решению уравнений, для которых граничные условия заданы в двух точках. Например, может потребоваться для уравнения

$$y'' + Py' + Qy = R,$$

где P, Q, R суть функции времени и дифференцирование производится по времени, найти такое решение $y = y(t)$, что $y(a) = c_1$; $y(b) = c_2$, где a, b, c_1, c_2 — константы и $a < b$. Предлагается метод решения подобных задач на универсальных вычислительных моделирующих установках, заключающийся в следующем. Составляются два уравнения:

$$u''(t) + P(t)\,u'(t) + Q(t)\,u(t) \equiv R(t), \qquad (1)$$

$$v''(t) + P(t)\,v'(t) + Q(t)\,v(t) \equiv R(t), \qquad (2)$$

такие, что $u(a) = d_1$, $u'(a) = d_2$; $v(a) = e_1$, $v'(a) = e_2$ (d_1, d_2, e_1, e_2 — константы). Искомое решение можно выразить в виде $y(t) = Au(t) + Bv(t)$, где A и B — константы. Уравнения (1) и (2) легко решаются на модели для произвольно выбранных d_1, d_2, e_1, e_2; задача, таким образом, сводится к определению A и B. Так как $y(a) = Au(a) + Bv(a)$ и $y(b) = Au(b) + Bv(b)$, то A и B определяются из соотношений:

$$A = [c_1 v(b) - c_2 e_1]/[d_1 v(b) - e_1 u(b)];$$
$$B = [c_2 d_1 - c_1 u(b)]/[d_1 v(b) - e_1 u(b)].$$

При этом используются полученные на модели значения $u(b)$ и $v(b)$. Рассмотрен конкретный пример и соответствующая структурная схема для моделирующей установки. Отмечается, что этот метод может быть распространен, по крайней мере теоретически, на уравнения более высокого порядка. В. А. Брик

10389. О решении уравнения $\alpha = \frac{x}{y} z$ с помощью стрелочного прибора. Карандеев К. Б., Мизюк Л. Я., Зубов В. Г. В сб.: Автомат. контроль и измерит. техн. Вып. 1. Киев, АН УССР, 1957, 21—29

В геофизике при электрической разведке нефтяных и газовых месторождений выдвигается задача создания счетно-решающего устройства, решающего уравнение типа $\alpha = z \cdot x/y$, где x — некоторое электрическое напряжение, y — электрический ток. В статье описывается метод решения этого уравнения при помощи стрелочного вольтметра или амперметра. Измерительный прибор (с внутренним сопротивлением r) с последовательно включенным добавочным сопротивлением $R_д$ соединяется параллельно с «образцовым» постоянным сопротивлением $R_{обр}$. При этом соблюдается условие: $R_д \gg R_{обр}$. Через схему пропускается ток y. В силу указанного условия через измеритель будет протекать ток $i_2 \approx \frac{y \cdot R_{обр}}{R_д + r}$. Величину добавочного сопротивления $R_д$ изменяют вручную до тех пор, пока ток через измеритель не станет равен номинальному значению $i_н$; стрелка измерителя при этом установится на последнее деление шкалы. В этих условиях добавочное сопротивление оказывается равным $R'_д = y \cdot R_{обр}/i_н - r$. После этого схема подключается к напряжению x. Из изложенного следует, что стрелка измерителя укажет величину $i = \frac{x}{y} \frac{i_н}{R_{обр}}$, пропорциональную искомому частному. Изменяя $R_{обр}$, $i_н$, можно несколько усложнять решаемое уравнение. Кроме того, в схеме можно включать дополнительные шунтирующие и добавочные сопротивления. Это позволяет решать целую группу уравнений, в которых выполняются операции умножения и деления. Общее число независимых параметров может быть доведено до пяти. Отсчет результатов всегда производится непосредственно по шкале. В. А. Брик

10390. Вычислительные моделирующие машины. Нуссбаумер (Les machines à calculer analogiques. Nussbaumer H.), Electronique industr., 1957, № 12, 212—222, 228 (франц.)

Продолжение и окончание статьи этого же наименования (РЖМат, 1958, 3365). Описываются в популярной форме простейшие электронные схемы для получения функциональной зависимости, могущей быть использованной для моделирования отдельных процессов. Приведены элементарные схемы простейших перемножителей двух переменных величин и усилителя постоянного тока.

В заключение рассмотрена моделирующая схема для решения дифференциального уравнения 2-го порядка. А. А. Крюков

10391. Моделирующее устройство САРО установлено на фирме «Де-Хевилленд» (Saro analogue computer at de Havillands), Brit. Communs and Electronics, 1958, 5, № 2, 116 (англ.)

Сообщается, что в Аэродинамическом отделе авиационной фирмы «Де Хевилленд» (de Havilland Aircraft Co. Ltd.) недавно установлена большая вычислительная машина САРО (SARO) фирмы «Саундерс-Роу» (Saunders-Roe). З. Д. Доброхотова

10392. Моделирующее устройство для тренировки операторов атомного реактора. Шварценберг (A simulator for nuclear reactor operator training. Schwartzenberg John W.), ISA Journal, 1957, 4, № 9, 369—373 (англ.)

Приводится описание устройства, предназначенного для обучения и тренировки операторов атомного реактора. Основные процессы в атомном реакторе моделируются в этом устройстве при помощи схемы, содержащей обычные операционные усилители. Для большего приближения к реальным условиям используется обычный стенд управления атомным реактором, в котором все органы управления соединены с потенциометрами, вводящими напряжения в схему модели; все указывающие и регистрирующие органы стенда приводятся в действие от выходных величин модели. При помощи устройства производится обучение технике управления атомным реактором, а также демонстрируются основные его свойства. А. В. Шилейко

10393. Моделирующие устройства в исследованиях по ядерной энергии. Наттер (Analogue computers in the nuclear power programme. Nutter J. C.), Instrum. Practice, 1958, 12, № 1, 46—51 (англ.)

10394. Выверка нивелировочной сети последовательными приближениями и электромоделированием. Су Сюань-ло (Adjustment of a level net by successive approximations and by electrical analogy. Su Loh Hsuan), Empire Survey Rev., 1955, 13, № 95, 8—21 (англ.)

10395. Методы и задачи вычислительной электроники при моделировании. Винклер (Methoden und Probleme der Rechenelektronik im Analogieverfahren. Winkler H.), Technik, 1958, 13, № 1, 6—10 (нем.)

10396. Дискуссия по статье Шенкера и Мартина «Моделирующие устройства для упругих пластичных систем». Арчер, Ланг (Discussion of «analog computers applied to elastic-elastic systems» by Leo Schenker and Gunther Martin. Archer J., Lange A.), Proc. Amer. Soc. Civil Engrs, 1956, 81, № 776, 3—7 (англ.)

См. РЖМат, 1956, 7721

10397. Опыт эксплуатации электронных вычислителей. Смирнов А. Д., Баклагин А. И. В сб.: Механиз. учета и вычисл. работ. М.— Л., Машгиз, 1958, 76—85

Сообщается об использовании электронного вычислителя ЭВ-80-3 (счетно-перфорационная машина с заранее задаваемой программой, выполняющая все четыре арифметических действия) в комплекте со счетно-аналитическими машинами. Дается описание отдельных узлов и принцип действия ЭВ и сообщается о его достоинствах и недостатках. Эксплуатационные возможности иллюстрируются на примерах умножения двух матриц 24-го порядка, нахождения корней алгебраических уравнений высоких степеней по методу Лобачевского и решения обыкновенных дифференциальных

уравнений. Вычислитель ЭВ-80-3 после некоторого усовершенствования может быть эффективно использован при научно-технических расчетах как по простым алгебраическим формулам и задачам линейной алгебры, так и по дифференциальным уравнениям. Г. К. Кузьминок

10398. Унификация счетноперфорационных машин Пензенского завода «САМ». Троянов Л. А. В сб.: Механиз. учета и вычисл. работ, М.— Л., Машгиз, 1958, 199—202

Сообщается о работах по унификации и модернизации алфавитных счетно-аналитических перфорационных машин (перфораторов, контрольников, сортировок, табуляторов).

Эти мероприятия должны повысить надежность машин в эксплуатации, снизить простои и повысить производительность труда на машиносчетных станциях. Г. К. Кузьминок

10399. Ремонт и модернизация счетных машин. Дмитриев Н. М. В сб.: Механиз. учета и вычисл. работ. М.— Л., Машгиз, 1958, 183—192

Описывается организация ремонта и модернизации счетно-аналитических перфорационных и вычислительных клавишных машин. Модернизация, например табулятора, вызвана механизацией материального учета незавершенного производства и расчетов по заработной плате (включая удержания). Приводятся электросхемы проведенной модернизации сальдирования 3-, 4-, 5- и 6-го счетчиков; перфорации вида остатка; добавочного интервала и исключения интервала при отрицательном сальдо и т. п. Г. К. Кузьминок

10400. Борьба с шумом на машиносчетных станциях. Славин И. И. В сб.: Механиз. учета и вычисл. работ, М.— Л., Машгиз, 1958, 193—198

Автор, отмечая вредное воздействие сильного шума на организм человека, рассматривает мероприятия по ослаблению шума на машиносчетных станциях. Работы по ослаблению шума предлагается вести в следующих основных направлениях: 1) улучшение конструкции машин и их отдельных узлов (с целью ослабления шума в самом источнике); 2) создание герметизированных кожухов машин (с целью улучшения изоляции источников шума); 3) рациональная установка самой машины на специальном столе или фундаменте; 4) планировочные и архитектурно-акустические мероприятия (с целью снижения шума внутри помещения станции).

Особенно подробно разработан вопрос о звукопоглощающих облицовках. Приведена конструкция звукопоглотителя. В. Л. Евтеев

10401. Применение интегратора Абданк-Абакановича для вычисления маршрутов. Нинот-Ноль я (Una aplicación del intégrafo de Abdank-Abakanowicz al cálculo de itinerarios. Ninot Nolla Joaquin), Acero y energia, 1957, 14, № 79, 44—50, 53 (исп.)

Описан механический интегратор Абданк-Абакановича и показано, как с его помощью строить кривую скорости по маршруту и вычислять время нахождения в пути, имея кривую рельефа местности. Для определения этих параметров требуется характеристика перегона: спуски, подъемы, закругления, препятствия и т. д.; и характеристики машины: масса или вес, фронтальная поверхность, тип двигателя, передачи, управления и т. д. Все это подробно фиксируется на диаграмме, обводимой интегратором. Приводится пример расчета движения с наивыгоднейшей коммерческой скоростью по маршруту Барселона-Гава. О. В. Бачин

10402. Устройство для конформного преобразования $W = Z + \frac{a^2}{Z}$. Гампе (Dispozitiv pentru transformarea conforma $W = Z + \frac{a^2}{Z}$. Gampe F.), Bul. ştiinţ. şi tehn. Inst. politehn. Timişoara, 1956, 1, № 2, 143—146 (рум.; рез. франц., русск.)

Описывается механическое устройство для конформных преобразований, характеризуемых соотношением $W = Z + \frac{a^2}{Z}$. В частном случае преобразования круга, согласно вышеуказанному соотношению, устройство может быть применено для механического преобразования профилей типа Жуковского. Резюме автора

10403. Вычислительная клавишная машина ВК-2. Кудрявцев Б. И., Бюл. техн.-экон. информ. Сов. нар. х-ва Тульск. экон. администрат. р-на, 1957, № 1, 31—32

Приведены основные технические данные вычислительной машины ВК-2, выпускаемой заводом п/я 500. Операции деления, сложения и вычитания производятся на ней автоматически, умножение — полуавтоматически. Цифры набираются с помощью клавиш, расположение которых позволяет делать набор левой рукой слепым методом. Рядовая передача десятков в счетчике результатов и оборотов дает возможность выполнять умножение сокращенным методом. Умножение можно производить, начиная с низших или высших разрядов множителя с автоматическим перемещением каретки влево и вправо. Устанавливаемые исходные данные можно проверять визуально в окнах счетчика результатов. Основные механизмы машины снабжены автоматической блокировкой. Габариты устройства 282×255×165 *мм*. Емкость установочного барабана 9 разрядов. Емкость счетчика результатов 13 разрядов. Емкость счетчика оборотов 9 разрядов. Скорость вращения установочного барабана 280 ÷ ÷330 об/мин. Мощность мотора 0,065 *квт*. В. А. Брик

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ УСТРОЙСТВ И ИХ ЭЛЕМЕНТОВ В ТЕХНИКЕ

10404. Применение электронных вычислительных машин для инженерных расчетов. Шмыглевский Ю. Д. В сб.: Механиз. учета и вычисл. работ. М.— Л., Машгиз, 1958, 19—26

Рассказывается о математических возможностях быстродействующей электронной вычислительной машины БЭСМ. Даны описание и характеристика этой машины. Рассмотрены примеры различных инженерных расчетов, проводившихся на БЭСМ. Отмечается, что научные сотрудники и инженеры должны учитывать все возможные факторы, от которых зависит исследуемое явление, и вводить их математические формулировки в расчетные схемы.

В заключение констатируется возможность проведения расчетов с точностью, превышающей точность эксперимента. В. Л. Евтеев

10405. Два аспекта численных прогнозов при помощи баротропической модели. Дадай (Deux aspects des prévisions numériques à l'aide du modèle barotropique. Dady G.), Météorologie, 1955, № 37, 63—76 (франц.; рез. англ., исп.)

В Стокгольмском метеорологическом институте для численных прогнозов использована баротропическая модель атмосферы, усредненная по высоте для уровня, соответствующего давлению 500 *мб*. Пренебрегая переходом тепла в движение и трением, учитывая адвекцию геострофическим ветром и вращение Земли, приводят задачу к решению уравнения Пуассона относительно ротора скорости ветра в пространстве двух измерений. Применяются два метода решения, основанные на использовании конечных разностей: графиче-

ский по Фьёртофту и численный по методу сеток на электронной вычислительной машине. В последнем случае сетка содержит 40×30 точек при шаге около 300 *км* на местности. Влияние краевых условий ослабляется тем, что область прогнозов берется меньше общей площади метеорологической карты. При прогнозе на 48 час. относительная ошибка оценивается в 0,62; точность графического метода того же порядка. Обычные методы дают ошибку около 0,82. И. В. Лебедев

10406. **Вычислительная машина помогает инженерам, контролирующим разливы рек в США** (Computer helps flood control engineers in the U. S.), Electr. News and Engng, 1958, 67, № 1, 80—81 (англ.)

Сообщается, что инженеры-гидрологи, работающие в бассейне р. Огайо, используют электронную вычислительную машину Е-101 для предсказания подъема уровня воды на основе анализа данных о выпадении осадков на площади бассейна. Приводятся цифры, характеризующие разрушения и убытки, приносимые наводнениями.

Данные, полученные с помощью вычислительной машины, позволяют в ряде случаев предотвратить опасные наводнения путем заблаговременной регулировки гидротехнических устройств. Поэтому использование ими вычислительной машины вполне оправдано экономически. Метод определения уровня воды состоит по существу в обработке накопленных данных о происходивших ранее повышениях уровня.

Е-101 — цифровая электронная машина с объемом памяти 220 слов. Длина слова — 12 разрядов плюс знак. Арифметика десятичная. Программа решения набирается на 8 съемных панелях. Скорость выполнения операций: сложение и вычитание — 0,05 сек., умножение и деление — 0,25 сек. Ввод данных возможен и с бумажной ленты и с пульта.

З. Д. Доброхотова

10407. **Электронные вычислительные машины и конструирование ядерных реакторов. Хаулетт** (Digital computers and the design of nuclear rectors. Howlett J.), Engineer, 1958, **205**, № 5325, 243—245 (англ.)

Приводится перечень проблем, встающих при проектировании промышленных ядерных реакторов, и отмечается, что более или менее точное решение возникающих при этом задач не может быть получено без применения больших быстродействующих электронных вычислительных машин. Наиболее сложными и громоздкими являются расчеты, связанные с определением распределения плотности нейтронов в реакторе. В качестве иллюстрации подробно разбираются методы нахождения этого распределения с помощью статистического метода (метод Монте-Карло) и путем решения в несколько идеализированных условиях переноса Больцмана. Разбираются возможности применения существующих типов вычислительных машин для рассматриваемых задач. Так, машина МАРК I (скорость действия — 500 алгебраических операций в 1 сек.) уже не вполне пригодна для решения, например, двумерной задачи по определению критических параметров, поскольку решение только одного варианта занимает более двух часов. Для таких задач могут быть использованы такие машины, как «Меркурий», ИБМ-704, скорость которых в 10 раз выше. Для решения упомянутой выше задачи необходимо иметь объем памяти на 10^3 чисел и выполнять до 10^6 арифметических операций. При решении трехмерного варианта той же задачи необходимо будет запасать до 10^5 исходных данных и выполнять, по крайней мере, до 10^8 арифметических операций. Если просчитывать один вариант задачи за 15 мин., то скорость машины должна быть примерно 10^5 операций в 1 сек.

В настоящее время в США для Комиссии по атомной энергии разрабатываются две большие вычислительные машины: 1) ЛАРК с емкостью быстродействующей памяти порядка 10^4 слов и скоростью выполнения арифметических операций в 10^5 операций в 1 сек. Эта машина должна быть закончена к концу 1958 г. 2) СТРЕТЧ с емкостью оперативной памяти 10^5 слов и скоростью порядка 10^6 операций в 1 сек. (разработка этой машины должна быть завершена к концу 1960 г.)

З. Д. Доброхотова

10408. **Исследования механических напряжений и вибраций в сверхзвуковой трубе Национального аэронавигационного научно-исследовательского института с помощью электронных цифровых машин. Бесселинг** (Sterkte- en trillingsberekeningen voor de transsone windtunnel van het N. L. L. met behulp van elektronische rekenmachines. Besseling J. F.), Ingenieur (Nederl.), 1957, 69, № 42, L. 17—L. 23 (гол.; рез. англ.)

Рассматривается проектирование аэродинамической трубы с учетом следующих нагрузочных факторов: компрессия, аэродинамический нагрев, нагрев солнцем, охлаждение тающим снегом, погружение опор, гравитационные нагрузки и т. д. В связи с использованием при расчетах электронных цифровых вычислительных машин рассматриваются матричные методы. В заключение даны некоторые результаты расчетов.

А. Д. Закревский

10409. **Электронные вычислительные машины и их применение в аэронавигации. Хейлингбруннер** (Elektronische Rechenanlagen und ihr Einsatz in der Luftfahrt. Heilingbrunner O.), Flugwelt, 1958, **10**, № 3, 160—162 (нем.)

Популярная статья, в которой кратко описан принцип действия и основные узлы современных электронных вычислительных машин и приведены некоторые примеры их применения в технике. Отмечается, что электронные вычислительные машины не только являются важным техническим вспомогательным средством в конструкторских бюро, где полностью отпадают те вычислительные трудности, которые нельзя преодолеть без современной вычислительной техники; электронные вычислительные машины играют важную роль также в авиации, причем их применение в аэронавигации имеет большие перспективы. С их помощью выполняются различные задачи конструирования самолетов, а также при полетах самолетов на сверхзвуковых скоростях. Значительное место в статье уделено описанию возможностей и перспектив применения вычислительных машин в области военной авиации и военных ракет. Приводятся возможные примеры такого применения, в частности, кратко описано применение электронных машин в системе континентальной военно-воздушной защиты США. И. Ф. Шелихова

10410. **Применение счетно-решающих приборов для инженерно-технических расчетов. Кроль К. Г.** В сб.: Механиз. учета и вычисл. работ. М.— Л., Машгиз, 1958, 54—75

Рассмотрены специальные счетно-решающие приборы, разработанные в Ленинградском институте точной механики и оптики. Эти приборы предназначены для массового решения таких задач, для которых применение больших цифровых и моделирующих вычислительных машин экономически не выгодно. Приводится пример расшифровки данных оптического метода исследования напряжений и даны два варианта механического вычислительного прибора для автоматизации решения этой задачи.

Приводятся также материалы по камеральной обработке аэромагнитограмм, магнитограмм и вариационных кривых и по проблеме автоматизации расчета правильности распределения грузов на торговых судах.

Г. К. Кузьминок

10411. Вычислительные машины в нефтепромышленности. Янг (Computers in the electrical industry. Young P. L.), Electr. Rev., 1958, 162, № 4, 146—149 (англ.)

10412. Анализ сетей трубопроводов с помощью электронной цифровой вычислительной машины. Картерон (Calcul des réseaux mailles de conduite a l'aide d'une calculatrice électronique. Carteron J.), Houille blanche, 1956, 11, № A, 173—177. Discuss. 177—179 (франц.; рез. англ.)

Изложены теория и метод численного анализа сложных сетей трубопроводов, разработанные фирмой «Электрисите де Франс» (Electricite de France). Основные черты метода разъясняются на разборе примера практического применения. Отмечены возможности метода при использовании современной вычислительной техники. В. П. Тихонов

10413. Применение в энергетических системах вычислительных машин для выбора экономического режима. Колборн, Байерли, Скуайрс (Application of economic dispatch computers to power systems. Colborn H. W., Byerly R. T., Squires R. B.), Proc. Amer. Power Conf., 1956, 18, Chicago. Ill., (1956), 515—522 (англ.)

В Западно-Пенсильванской энергосистеме (США), объединяющей 12 электростанций общей мощностью 1440 *мвт* и имеющей около 3000 *км* линий напряжением 132 *кв* и 66 *кв*, установлена при диспетчерской службе специальная вычислительная машина, определяющая для каждого режима работы наиболее экономичное распределение генерирующих мощностей и схему электропередач, обеспечивающих минимальную себестоимость электроэнергии у потребителя.

Вычислительная машина состоит из двух обособленных блоков: в одном по заранее вычисленным коэффициентам определяется наиболее рациональная схема и потокораспределение в высоковольтной сети, а в другом находится наиболее экономичное распределение генерирующих мощностей. Результаты, получаемые от вычислительной машины, используются для автоматической корректировки фактического режима работы энергосистемы. Машина содержит сумматоры, серводвигатели, воздействующие на потенциометры, измерительные устройства и ряд вспомогательных элементов.

Помимо выбора экономичного режима работы энергосистемы, машина может быть использована и при проектировании развития энергосистемы.

А. А. Крюков

10414. Решение задач распределения потока электроэнергии на цифровой вычислительной машине типа ИБМ-604 узловым итерационным методом. Мак-Гиллис (Nodal iterative solution of powerflow problem using IBM 604 digital computer. McGillis Donald), Power Appar. and Systems, 1957, № 32, 803—809 (англ.)

Рассматривается применение цифровой вычислительной машины ИБМ-604 (не имеющей запоминающего устройства) для решения задачи распределения нагрузочного потока в энергетической системе.

Исходными данными задачи являются: 1) активная и реактивная генерация (или нагрузка) на каждую шину цепи, за исключением одной, которая питается генератором пиковой нагрузки; 2) активная и реактивная компоненты напряжения на генераторе пиковой нагрузки. Определяются: 1) активная и реактивная компоненты напряжения на каждой шине в цепи; 2) активная и реактивная мощность генератора пиковой нагрузки; 3) активная и реактивная мощность потока в каждом элементе цепи. Для рассматриваемой электрической цепи записывается система узловых уравнений и составляется матрица. Система уравнений решается методом последовательного приближения. Дана методика подготовки данных и порядок решения на вычислительной машине.

Недостатком изложенного метода является большая продолжительность процесса вычисления, обусловленная медленной сходимостью решаемых уравнений. Так, решение схемы, содержащей 7 шин, занимает 6 час. Скорость решения может быть увеличена экстраполированием большими шагами. Однако даже при экстраполировании решение схемы с 38 шинами занимает 75 час. Дается сравнение данного метода с решением задачи на схемном анализаторе. Библ. 4 назв. В. П. Тихонов

10415. Использование цифровых вычислительных машин. Алджер (Using digital computers. Alger John R. M.), Mach. Design, 1957, 29, № 25, 128—132 (англ.)

Даны основные сведения по цифровым машинам для конструкторов в области электропромышленности. Такие этапы работы, как нахождение справочного материала, проведение расчета, анализ вариантов, легко производятся с помощью вычислительной машины. Приведен пример программы для вычисления температуры ротора двигателя по определенным формулам. В двух таблицах показаны типичные для анализа и синтеза электрических машин входные и выходные данные и распределение времени на отдельные этапы программирования. Откладка программы на машине и устранение ошибок занимает 40% всего времени.

Отмечается ряд задач, которые выдвигаются новыми средствами вычислений: подготовка кадров, точная формулировка допущений и ограничений, введение в программу самопроверки, а в дальнейшем и самоисправления.

В заключение указано на такие важные возможности машин, как исследование влияния входных данных, выбор оптимального варианта (в основном по критерию стоимости, а в военных образцах — по весу или выходным параметрам). А. Ф. Смирнов

10416. Вычислительная машина как помощник проектировщика. Логические и арифметические функции в приложении к мощным трансформаторам (The computer as assistant designer. Logical and arithmetical functions applied to large power transformers), Electr. Times, 1957, 132, № 3447, 901—902 (англ.)

Обсуждаются результаты работ по применению электронных цифровых вычислительных машин для расчетов трансформаторов. В этих работах рассчитывались мощные трансформаторы (от 30 до 210 *мвт*) с диапазоном входных напряжений 6,6÷22 *кв*, диапазоном выходных напряжений 66÷300 *кв*, с соединенными в звезду или в треугольник обмотками, со специальными конструкциями сердечников и обмоток и т. д.

В. А. Брик

10417. Вычислительные машины распределяют порожняк на Юго-Тихоокеанской железной дороге (Computers to «needle» empties on SP), Mod. Railroads, 1957, 12, № 5, 131—132, 134 (англ.)

Южно-Тихоокеанская железная дорога разрабатывает новую механизированную систему для учета использования более чем 70 000 грузовых вагонов на линии протяженностью 8000 миль, с целью дать всей железной дороге улучшенную систему использования грузовых вагонов.

Система распределения вагонов требует постоянной работы вычислительной машины ИБМ-650. Она позволяет более эффективно организовать перегон порожних вагонов с одного места в другое при различных возможных вариантах. С помощью машины сопоставляются значения около 200 переменных в течение од-

ной минуты; удовлетворительное решение задачи распределения получается через несколько часов.

Для входной информации требуется приблизительно 200 тыс. перфокарт в неделю. Из-за того, что много времени идет на передачу и обработку основных данных, вычисленные инвентаризационные списки порожних вагонов появляются приблизительно через неделю. На основе прямого анализа потребности в вагонах и их сезонного потребления можно предсказать потребность вагонов в будущем.

Вся система управления построена для работы с недельным циклом. Обработка и группирование данных производится за первые 3,5 дня, промежуточные вычисления и анализ выполняются в течение 1,5 дней. Система показывает количество вагонов, пригодных к использованию каждую неделю, и предполагаемую активность и позволяет вычислить новую программу передвижения порожних вагонов.

Описываемая система была разработана с помощью методов исследования операций. Отмечается большое значение совместного применения методов вычислительной техники и методов исследования операций.

М. С. Саплин

10418. Измерения по аэроснимкам и электронный счет на службе дорожного строительства. Блянке (Luftbildmessung und elektronisches Rechnen im Dienste des Straßenbaues. Blaschke Wolfgang), Brücke und Strasse, 1958, **10**, № 2, 41—44 (нем.)

Автор кратко знакомит с фотограмметрическими вспомогательными средствами дорожного строительства. Отмечается очень большое практическое значение аэрофотосъемки при работе по проектированию дорожных сооружений. Применение аэрофотосъемки эффективно во всех ландшафтных зонах, особенно в геологически мало исследованных районах. Описываются различные приборы для обработки аэрофотоснимков. Указывается, что в США и Швеции электронные и счетно-перфорационные машины используются для быстрого и экономичного выполнения обработки данных аэрофотосъемки и расчетной работы при массовых изысканиях дорог. Время счета для правильного профиля составляет приблизительно 12 сек., время подготовки данных для ввода в машину для одного профиля занимает 1—1,5 мин. Подробно описаны необходимые рабочие процессы при расчете на электронной машине наилучших вариантов профилей будущей дорожной трассы. Профили местности фотографируются, необходимые данные пробиваются на перфокарты и по известным геометрическим формулам вычисляются их последовательные площади. Просчет повторяют несколько раз. При определении координат точек объекта местности фотографируется его поперечный профиль и данные стереофотограмметрической задачи автоматически пробиваются на перфокарты. В результате расчета получают окончательные данные для проектирования. Приводятся фото машин ИБМ-650 и ИБМ-407. Библ. 10 назв.

И. Ф. Шелихова

10419. Электронное вычисление расчетных величин шоссейных дорог. Кейтс (Electronic computing of highway quantities. Kates Josef), Roads and Engng Constr., 1958, 96, № 1, 90—96 (англ.)

Сообщается о применении организацией «Ontario Department of Highways» (Канада) цифровых вычислительных машин для вычисления некоторых величин, необходимых при проектировании и постройке шоссейных дорог (координат точек пересечения различных участков дороги, площадей вертикальных сечений грунта и др.). Приводится блок-диаграмма решения подобных задач. Отмечается, что применение вычислительных машин снижает стоимость вычислений, повышает надежность получения данных и помогает упорядочить ведение технической документации.

А. Н. Чуйкин

10420. Применение быстродействующей вычислительной машины к определению и решению задачи о движении транспорта. Гуд (The application of a high speed computer to the definition and solution of the vehicular traffic problem. Goode Harry H.), Operat. Res., 1957, 5, № 6, 775—793 (англ.)

10421. Использование электронной счетной техники для технико-экономических расчетов и учета. Рапопорт Е. К. В сб.: Механиз. учета и вычисл. работ. М.— Л., Машгиз, 1958, 86—92

Рассматривается использование счетной техники в СССР и США для механизации технико-экономических расчетов и учетных процессов. Автор отмечает, что в настоящее время в американской промышленности используются около 3000 электронных вычислительных машин, причем производством этих машин занято около 30 фирм. Широко применяется счетная техника для таких работ, как проверка запасов материалов и готовой продукции, составление графиков и контроль за производством, подсчет зарплаты рабочих больших заводов и т. д.

Даны технические характеристики бухгалтерской счетно-вычислительной машины «Дейтематик-100» и машины для коммерческих расчетов ИБМ-702. «Дейтематик-100» выдает информацию со скоростью 60 000 десятичных знаков в 1 сек. и, одновременно с регистрацией и выдачей информации, может производить в 1 сек. 1000 умножений, 4000 сложений и 5000 сравнений. Основная особенность машины ИБМ-702 — возможность работы с числами различной длины. Машина снабжена системой контроля правильности выполнения операций.

Автор отмечает, что в нашей стране изготовляются и успешно эксплуатируются большие электронные машины (БЭСМ и «Стрела») и малые электронные машины (М-2), но механизация учета на заводах СССР пока осуществляется с помощью счетно-перфорационных машин.

Автор указывает на трудности при проектировании машин для механизации технико-экономических расчетов и учета в связи с отличием расчетов для экономического анализа, статистики и учетных процессов от аналогичных работ в капиталистических странах.

В. Л. Евтеев

10422. Вычислительные машины управляют складской системой (Computers control warehouse system), Mod. Mater. Handling, 1957, 12, № 6, 150—155 (англ.)

Рассказывается о высокоавтоматизированном складе в Нью-Йорке, получающем товары от 5000 снабжающих организаций и передающем их к 124 площадкам хранения. На складе была старая система содержания товаров, где все операции выполнялись вручную. Рабочие тратили около 70% времени на хождение по складу.

В новой системе товары подготавливаются и перевозятся к месту хранения менее чем через час с момента их получения. Товары помещаются в стандартные картонные коробки, которые конвейером направляются к назначенной многороликовой площадке хранения. Синхронизирующий механизм отделяет по одной коробке каждые 20 сек., а специальный стержень выталкивает их с конвейера на соответствующую площадку. Один стержень обслуживает 13 площадок.

Устройства типа вычислительной машины управляют сортировкой товаров и вычисляют приказы к их упаковке. Для учета товаров приготовляются перфокарты и ведомость распределения товаров на площадках. Перфокарты по ременному конвейеру направляются к диспетчеру. При отгрузке товаров диспетчер про-

сматривает номера площадок на перфокартах и включает один из 4 конвейеров. Коробки перемещаются конвейером на первый этаж, где товары взвешиваются, упаковываются и пломбируются атоматически, адресуются и направляются с помощью автоматического управления к перевозящему доку. После упаковки товаров второе электронное вычислительное устройство подключается к контролю. Устройство проверяет соответствие номеров, набранных оператором-упаковщиком и оператором-наборщиком штампа. В нормальном случае номер, набранный оператором-упаковщиком, гасится при наборе штампа. Если имеется ошибка, то на панели горит соответствующая лампочка. Ни одна перевозка не совершается без автоматического контроля. Когда товары готовы к отправке, перфокарты вынимаются из перфоратора и направляются в табуляторный цех, где через несколько минут приготовляется список товаров.

Исследования показали, что увеличение объема оборота склада без увеличения площади позволит сэкономить фирме более 50 тыс. долларов в год только за счет арендной платы за помещение. Приведены фото склада и отдельных помещений. М. С. Саплин

10423. Проверка системы складских операций при помощи машины ФЕРУТ. Чжун, Готлиб (Test of an inventory control system of FERUT. Chung J. H., Gotlieb C. C.), J. Assoc. Comput. Machinery, 1957, 4, № 2, 121—130 (англ.)

В результате специального исследования, предпринятого фирмой «Imperial Oil Limited» была разработана система снабжения нефтепродуктами, учитывающая наличие центрального склада, расположенного вблизи нефтеперегонного завода и выполняющего заказы периферийных складов и отдельных потребителей. Для центрального склада был принят определенный порядок работы, регламентирующий последовательность и сроки выполнения заказов и пополнения запасов. Для проверки эффективности этого порядка система распределения нефтепродуктов была моделирована при помощи цифровой вычислительной машины ФЕРУТ (FERUT). Складское наличие по 1300 наименованиям со всеми необходимыми индексами записывалось на магнитном барабане. Поступающие заказы, количество и характер которых взяты как среднее за сентябрь, октябрь и ноябрь 1953 г., вводились в машину с перфоленты. Заказы, ожидающие выполнения, также фиксировались на магнитном барабане. Программа операций машины была составлена в соответствии с принятым порядком складских операций. Результаты проверки показали, что принятый порядок в общих чертах целесообразен. Подробно рассматривается система индексации и программы машины. А. В. Шилейко

10424. Возможности коммерческого использования больших электронных машин. Венке (Kommerzielle Einsatzmöglichkeiten von elektronischen Großanlagen. Wenke K.), Unternehmensforschung, 1956—1957, 1, № 3, 107—116 (нем.; рез. англ.)

Обсуждается использование быстродействующих электронных вычислительных машин для задач хозяйственного управления в масштабе отдельного предприятия или экономики страны в целом. Кратко излагаются конструктивные особенности применяемых для автоматической обработки информации электронных машин ИБМ-604, ГАММА-3, ИБМ-650, ИБМ-705, УНИВАК-ФАКТРОНИК, ДАТАМАТИК-1000, БИЗМАК. Указывается, что необходимость внедрения машин для рационализации и механизации работы хозяйственного управления вызвана ростом потока информации как в области промышленной статистики, так и в других областях науки, а также значительным увеличением объема работы хозяйственного управления, что приводит к росту числа служащих, занятых конторской работой. Отмечается, что эффективность экономического использования электронных машин для коммерческих целей зависит в значительной степени от формы обработки информации на данном предприятии. При центральной форме обработки данных с замедлением успешно применялись существующие электронные большие машины, которые предназначены для решения широкого круга научных задач. При центральной обработке данных без замедления рекомендуется для коммерческих целей применение специализированных электронных вычислительных машин с большей емкостью памяти. При другой форме обработки данных (не центральной) важным техническим вспомогательным средством являются перфокартные машины с программным управлением. Однако при вводе большого количества исходных данных в перфокартных машинах значительные затраты времени на организационные операции, производимые вручную (пробивка перфокарт, складывание их в стопку, сортировка и т. п.), ограничивают целесообразность коммерческого использования электронных вычислительных машин. В общих чертах рассмотрен проект создания более экономичной быстродействующей электронной установки, состоящей из электронной вычислительной машины средней скорости и вспомогательного быстрого, но дешевого блока для автоматизации ручных операций. Для ввода и вывода информации в установке применена магнитная лента. Успех широкого экономичного использования электронных машин также в большой степени зависит от квалификации обслуживающего персонала и разработки им новых, более быстрых и эффективных методов программирования. Приведены общие рассуждения о методике составления программ для решения задач обработки коммерческих данных в зависимости от технического своеобразия используемых счетных автоматов. В качестве примера даны блок-схемы решения задачи оборотной статистики на перфокартных машинах и быстродействующих электронных больших устройствах. Правильное использование электронных больших машин для коммерческих целей в сочетании с применением новейших методов решения задач дает значительные материальные выгоды. И. Ф. Шелихова

10425. Опыт применения большой электронной машины для обработки данных. Шлепфер (Erfahrungen bei der Einführung von grossen elektronischen Data Processing Maschinen. Schläpfer J. W.), Mitt. Verein. schweiz. Versicherungsmathematiker, 1957, 57, № 2, 281—285 (нем.)

Сообщаются сведения об опыте обработки данных с помощью вычислительной машины ИБМ-702. Работа по автоматизации экономических расчетов проводилась в страховой компании «Prudential Insurance» (США). Деятельность компании характеризуется большим объемом документации (примерно 30 млн. полисов), децентрализацией управления и быстрым ростом дела. В 1949—1950 гг. компания финансировала разработку специализированной электронной вычислительной машины. По техническому заданию, машина должна была работать с магнитными лентами на входе и иметь быстродействующую печать на выходе. Исследования возможностей этой машины, проведенные в процессе испытаний ее, показали, что специализированная вычислительная машина не удовлетворяет требованиям экономистов. Основными недостатками подробной машины являются: ограниченные возможности программирования, индивидуальность технического обслуживания и недостаточная надежность работы.

Летом 1953 г. были проведены опыты по применению универсальной электронной вычислительной машины ИБМ-702 для расчета страховых премий. Обработке подвергались: около 4 млн. полисов 7 главных реестров и несколько вспомогательных реестров — всего около

15 млн. перфокарт. Данные полисов регистрируются в картотеках, которые ведутся вручную. Полисы регистрируются по агентствам, а внутри каждого агентства — по номерам полисов. Все данные с индивидуальных полисов наносятся на основную магнитную ленту (регистр полисов). Магнитные ленты соответствующим образом маркируются. Основная лента пропускается через машину еженедельно, что является компромиссом между хорошей осведомленностью о состоянии дела и экономически выгодной загрузкой машины. Надежность электронной машины такова, что потери времени на ремонт составляют в среднем около 2% рабочего времени. Систематическое проведение граничных испытаний позволяет избежать ошибок в работе. Реестр на магнитных лентах периодически сверяется с реестром на перфокартах. Перфокарты в свою очередь также подвергаются контролю. В. А. Зимин

10426. **Применение электронной вычислительной машины ГАММА с магнитным барабаном для страховых расчетов. Бурнонвиль** (Utilisation du calculateur électronique Gamma à tambour magnétique pour les calculs d'assurances. Bournonville L. de), Mitt. Verein. schweiz. Versicherungsmathematiker, 1957, 57, № 2, 260—264 (франц.)

Приведены основные характеристики и отмечены особенности электронной вычислительной машины ГАММА, позволяющие эффективно ее использовать для страховых расчетов.

Большая емкость запоминающего устройства машины позволяет зарегистрировать многочисленные таблицы, которыми в данном случае постоянно приходится пользоваться. Большая емкость программ позволяет производить все вычисления за один машинный цикл. Большая производительность вводных и выводных устройств позволяет с большой скоростью вводить данные и перфорировать или печатать результаты. Быстродействующие запоминающие устройства позволяют полностью использовать скорость электронных вычислительных устройств при сравнительно медленной работе вводных, выводных и регистрирующих.

Магнитный барабан машины ГАММА может регистрировать от 4000 до 16 000 слов, состоящих каждое из 12 десятичных разрядов. Барабан выполнен в виде цилиндра с вертикальной осью; вокруг цилиндра располагается от 32 до 128 считывающих магнитных головок, каждая из которых считывает запись по одной из дорожек. На каждой дорожке может быть записано до 128 двенадцатиразрядных слов (разделенных на 8 секций по 16 слов). Описано взаимодействие магнитного барабана с остальными частями машины.

Отмечая большие возможности, имеющиеся в машине благодаря использованию магнитного барабана данной конструкции, автор подчеркивает особое удобство машины для обработки данных в страховых компаниях. Приводится последовательность операций, осуществляемых машиной при использовании ее для этих целей. В. В. Васманов

10427. **Исследование удачной вычислительной системы. Керкер** (Study of a successful computer system. Kircher Paul), J. Account., 1957, 104, № 4, 59—65 (англ.)

Рассматривается ряд вопросов, связанных с организацией и работой центра обработки данных Группы страхования фермеров (Farmers Insurance Group). Центр использует вычислительную машину ИБМ-705. А. В. Шилейко

10428. **Новые возможности для градуировки. Кемп** (New possibilities in graduation. Camp Kingsland), Soc. Actuar. Trans. 7 (1955), № 3, 6—30 (англ.)

Описывается предлагаемая программа для выполнения на электронной вычислительной машине для градуировки норм смертности по методу «В» Уиттекера—Гендерсона (Henderson, Trans. Actuar. Soc. Amer., 1925, 26, 52—57). T. N. E. Greville

Перевод из Math. Revs, 1956, 17, № 2, 194.

10429. **Особенности применения электронных вычислительных машин в страховании. Шефер** (Besonderheiten der Anwendung elektronischer Rechenanlagen in der Sachversicherung. Schäfer Hans-Willy), Bl. Dtsch. Ges. Versicherungsmath., 1957, 3, № 3, 307—321 (нем.; рез. англ.)

10430. **Статистические задачи, решенные на машине УНИВАК. Уэйнгартен** (Statistical problems solved by the UNIVAC. Weingarten Harry), Bur. Ships J., 1958, 6, № 9, 9—11 (англ.)

10431. **Графическое представление статистических ответных функций в четвертом измерении с помощью системы УНИВАК. Ханн, Сторм** (Graphical representation of statistical response functions in the fourth dimension by the Univac System. Hunn Robert J., Storm Edward F.), Programmer, 1957, 4, № 6, 4—14 (англ.)

10432. **Оперативно-производственное планирование и учет с помощью счетной техники. Орлов С. И.** В сб.: Механиз. учета и вычисл. работ. М.— Л., Машгиз, 1958, 93—104

На примере Московского машиностроительного завода показана эффективность использования счетно-аналитических и счетно-клавишных машин для механизации плановых и учетных работ. Г. К. Кузьминок

10433. **Применение автоматики в промышленности. Орикост, Маррe** (L'automatique appliquée à l'industrie. Auricoste Jean, Marret Claude), Usine nouvelle, 1956, Numéro spécial, 105, 107—109, 111—112 (франц.)

Некоторые соображения об автоматизации в промышленности. Применение моделирующих устройств цифровых вычисленных машин для исследования устойчивости автоматических систем. В качестве примеров описаны принципы работы двух следующих устройств, разработанных Обществом электроники и автоматики (SEA):

1. Электронное устройство для управления копировальным станком «Дупликатрон», в котором касательная скорость движения электромагнитного щупа по модели выдерживается постоянной. Составляющие скорости вычисляются моделирующим устройством. Дана фотография «Дупликатрона», установленного на вертикальном расточном станке фирмы «Бертье». Указывается, что даже при наличии люфтов порядка 0,2 *мм* возможно получить точность обработки в 0,01 *мм*.

2. Тройной интегратор для автоматического вычисления трехцветных координат цвета окрашенной поверхности по показаниям спектрофотометра, причем учитываются трехцветные коэффициенты источника света. Применены фрикционные интеграторы типа диска с шариком. Значения коэффициентов получаются на счетчиках. Устройство предназначено для измерения цвета в текстильной промышленности, при цветной печати, при окраске автомобилей и т. п. И. В. Лебедев

10434. **Заводы, выпускающие управляемые снаряды, внедряют цифровое управление** (Missile makers adopt numerical machine controls), Automat. Control, 1957, 7, № 5, 25—28 (англ.)

Сообщается, что на ряде заводов нескольких компаний устанавливаются выпускаемые фирмой «Керни энд Треккер» (Kearney and Trecker) фрезерные станки с системами управления от цифровых вычислительных машин. Эти системы позволяют осуществлять контроль и управление 5 одновременными перемещениями в станке. Системы работают от перфолент, на которые заносятся данные о скоростях подачи, скоростях резания,

последовательности операций, геометрии обработки, начале и конце операции. Данные вводятся в машину, в ней они с помощью специально разработанной программы обрабатываются, «переводятся на язык станка» и выдаются на специальной ленте из прокатного алюминия или пластмассы. Данные с этой ленты с помощью специального электронного устройства передаются уже непосредственно к станку. Электронное устройство собрано в блоки, которые легко могут быть заменены.

Программа, разрабатывающая числовое задание станку, имеет существенный недостаток: в ней не предусмотрена возможность выявления ошибок в самой перфоленте. Во избежание переделки всей перфоленты с обнаруженной ошибкой, все задание разбивается на операции со свободными промежутками на ленте. Участки перфоленты с неправильными операциями легко удаляются и на их место вклеиваются правильные куски лент.

Описываются еще две другие системы, различные по своему исполнению, но имеющие много общего по своему назначению. Предполагается, что эти три системы станут в будущем ядром автоматизации других процессов.

З. Д. Доброхотова

10435. Программируемая система сборки компонентов. Макдоналд (IBM's programmed component assembly system. Macdonald Neil D.), Computers and Automat., 1957, 6, № 9, 9 (англ.)

Краткое сообщение о вводе в эксплуатацию фирмой ИБМ автоматической системы сборки печатных схем.

10436. УНИВАК-120 в автоматике. Расчет и изготовление некруглых зубчатых колес. Часть II (по статье Стилмена) (Univac 120 in der Automation. Berechnung und Fertigung unrunder Zahnräder. II. Teil (Nach einem Aufsatz von Alan H. Stillman), MTW-Mitt., 1956, 3, № 3, 133—135 (нем.)

Описано использование вычислительной машины УНИВАК-120 фирмы «Ремингтон Рэнд» для расчета данных, необходимых для управления фрезеровальным станком. Вычисленные машиной данные пробиваются на перфокартах, табулируются для целей контроля и затем автоматически переносятся с перфокарт на перфоленту, которая и управляет станком. Часть I см. РЖМат, 1957, 2781.

Г. Н. Поваров

10437. Управление производством с помощью вычислительной машины. Хегарти (Production control by computer. Hegarty A.), Mass Product., 1958, 34, № 2, 101—108, 110, 112 (англ.)

10438. Применение вычислительных устройств для управления прокатом. Дорнбуш (Computing-control applied to tapered-sheet leveler. Dornbush Paul E.), Control Engng, 1957, 4, № 9, 141—143 (англ.)

Приведена структурная схема семивалкового прокатного устройства. Указывается, что система управления каждым из семи нажимных устройств построена таким образом, чтобы поддерживать определенное отношение между линейными скоростями нижнего (V_1) и верхнего (V_2) роликов каждой пары. Представлена схема управления линейной скоростью верхнего ролика, являющаяся астатической следящей системой. Входной величиной системы является линейная скорость нижних валиков, поступающая в виде выходного напряжения тахогенератора через схему изменения масштаба на вход интегрирующего усилителя. Тахогенератор измерения линейной скорости нижних валиков является общим для всех семи нажимных устройств, а схемы изменения масштаба имеются в каждой из семи систем управления, обеспечивая индивидуальную ручную установку отношения скоростей V_1 и V_2 для получения необходимой устойчивости работы всего устройства. Выходное напряжение интегрирующего усилителя поступает на усилитель мощности и обеспечивает задание необходимой скорости вращения вала двигателя привода верхнего ролика. Напряжение обратной связи поступает на второй вход интегрирующего усилителя от тахогенератора измерения скорости вращения верхнего валика.

Отмечается сложность правильной установки масштабных коэффициентов, различных для каждой пары валиков и необходимых для обеспечения высокого качества проката, и указывается, что величины масштабных коэффициентов могут быть подобраны с помощью электрической модели.

Приведена упрощенная схема электрической модели, предназначенной для этих целей. Модель содержит 7 интегрирующих усилителей для воспроизведения характеристик систем управления и интегрирующий усилитель индикации угла наклона средней линии верхних роликов, характеризующего качество работы системы, а также ряд пассивных элементов, включая потенциометры установки масштабных коэффициентов.

И. М. Витенберг

10439. Цифровая вычислительная машина как устройство для управления процессами. Тирни, Хоман, Неманич, Амундсон (The digital computer as a process controller. Tierney John W., Homan Charles J., Nemanic Donald J., Amundson Neal R.), Control Engng, 1957, 4, № 9, 166—175 (англ.)

Рассматриваются результаты моделирования некоторого химического процесса, описываемого системой дифференциальных уравнений, с помощью цифровой вычислительной машины УНИВАК-Сайентифик-1103. В приложении рассматривается основной алгоритм и возможные схемы его реализации для вычислительных машин, в которых данные используются в виде дискретных приращений, как это происходит, например, в цифровом дифференциальном анализаторе.

В. А. Брик

10440. Машины ИБМ на службе автоматизации. РАМАК-650 (IBM-Geräte im Dienste der Automatisierung. RAMAC 650), MTW-Mitt., 1957, 4, № 1, 57—58 (нем.)

Описание возможностей машины ИБМ-РАМАК-650, состоящей в основном из вычислительной машины ИБМ-650 и запоминающих устройств большой емкости ИБМ-РАМАК-350. Приводятся данные о машине ИБМ-650.

С конца 1954 г. построено 350 машин ИБМ-650 и имеются заказы более чем на 1100 машин. Фирма выпускает одну машину в день. Основная модель работает с перфокартами, но может управляться и магнитной лентой. К машине ИБМ-650 можно подсоединять до 6 блоков магнитных лент ИБМ-727. В машине используется основное запоминающее устройство ИБМ-653 на 600 ячеек. Для записи результата используется табулятор типа ИБМ-407.

Для хранения информации недавно создано устройство ИБМ-РАМАК-355 (RAMAC — Random Access Memory). Оно представляет собой 50 расположенных друг над другом металлических дисков диаметром 61 *см*. На каждой стороне диска имеется 100 дорожек. На дорожке записывается 600 знаков. К машине ИБМ-650 можно подсоединять до четырех таких устройств. Тем самым машина обладает памятью на 24 млн. ячеек, что соответствует 300 тыс. полностью набитых перфокарт. Магнитные диски вращаются со скоростью 1200 об/мин. Время обращения к памяти составляет дробные доли секунды. Запись и считывание производится с помощью контактов особого вида. Управление обращением к запоминающему устройству осуществляется программой, хранящейся в ИБМ-650.

Для ввода и вывода информации используется элек-

тропечатающая машина ИБМ-838. К ИБМ-650 можно подсоединять до 10 таких устройств.

Д. А. Кузьмичев

10441. Регулирование аэродинамических труб с помощью вычислительного устройства. Либерман (Computing-control applied to wind tunnels. Liebermann David A.), Control. Engng, 1957, 4, № 9, 134—137 (англ.)

Рассматриваются три вопроса: регулирование с целью предотвращения помпажа в компрессоре, поддержание постоянного расхода в аэродинамической трубе кратковременного действия, введение поправки на сжимаемость воздуха.

Предохранение компрессоров от помпажа производится с помощью установки датчиков давления. Согласно приведенной блок-схеме, деление двух переменных величин осуществляется методом приведения к нулю разности между действительным и необходимым отношением.

В аэродинамических трубах кратковременного действия баллонного типа необходимо для предотвращения изменения давления регулировать ход клапана. Получающаяся зависимость нелинейная. Ее легко преобразовать с помощью соответствующего устройства в механизме клапана или с помощью использования обратной связи в конечном элементе регулятора.

Приведена схема, регулирующая расход. Постоянный расход поддерживается с помощью балансирующего моторчика, включенного в обратную связь. Датчики давления и температуры включены в мостовую схему.

В. А. Комаров

10442. Цель — улучшение характеристик. Ванна (The goal is improved performance. Vannah William E.), Control Engng, 1957, 4, № 9, 126—128 (англ.)

Общие соображения по поводу динамических систем регулирования с применением счетных машин и перспектив их развития на ближайшие годы.

И. К. Волков

10443 Д. Решение некоторых задач краткосрочного прогноза метеорологических элементов с помощью быстродействующих вычислительных машин. Белоусов С. Л. Автореф. дис. канд. физ.-матем. н., Центр. ин-т прогнозов, М., 1957

См. также: 9422, 9641, 9643, 10162, 10316, 10317

АВТОРСКИЙ УКАЗАТЕЛЬ

А

Абдинова А. Б. 9916
Абрамян Б. Л. 9902
Аврамеску А. 9892
Айзенштат А. Я. 9590 Д
Аксентьев Л. А. 9743
Алапашвили Г. Д. 9946
Александрян Р. А. 9859
Алексеев Н. И. 9895
Альбер С. И. 9925
Андреюк В. А. 9846
Анисимова Е. П. 10222, 10240
Аравийская Е. Н. 9757
Ахиезер Н. И. 9750
Ахмедов К. Т. 9924

Б

Баклагин А. И. 10397
Балаш Э. Э. 9959
Басов В. П. 9448
Белоносов С. М. 9878, 9882
Белоусов С. Л. 10443 Д
Бендриков Г. А. 9837
Березин И. С. 10321
Беркович Л. М. 9595
Богданов Ю. С. 9448
Больсен Е. М. 9452
Борисов Ю. Ф. 10271
Бочкарев А. 9841
Бушманова Г. В. 10247

В

Ван Гуан-инь 9854
Вандышева Е. В. 9483
Ван Сян-хао 9617
Васильева А. Б. 9824
Векуа Н. П. 9918
Вишик М. И. 9399
Волков И. И. 9963
Волосов В. М. 9825
Вольперт А. И. 9868
Вороновская Е. В. 9726

Г

Габашвили Г. Н. 10228
Гаврилко Г. І. 10237
Гаврилов Н. И. 9779
Галустян С. Б. 9850
Гао Хэн-шань 9533
Гельман А. Е. 9821
Георгиев Д. 9401
Глатенок И. В. 9826, 9852 Д
Гнеденко Б. 9396
Говорухина А. А. 9920
Го Да-цзюнь 9690, 9912
Горев А. А. 9847
Гранас А. 10009, 10010
Грибанов Ю. И. 9994
Григоренко Я. М. 9780
Григорьян А. Т. 9446
Гуань Чжао-чжи 9992
Гуревич Г. Б. 9619

Д

Давиденко Д. Ф. 10283
Давыдов Н. А. 9734
Данилов В. Л. 9897
Дешевой Г. М. 10231
Джваршейшвили А. Г. 9688
Дин Ся-си 9684, 9995
Дмитриев Н. М. 10399
Добровольский В. А. 9398
Добрушин Р. Л. 10050
Долголенко Ю. В. 9835
Дороднов А. В. 9592
Дуйчев И. 9602
Дынкин Е. Б. 9573

Е

Еремин И. И. 9562
Еремин С. А. 9759
Ерохин В. 10063
Еругин Н. П. 9956 К
Ефимов Н. В. 10017
Ефрон А. И. 9870

Ж

Железнов Е. И. 9795
Жижченко А. Б. 9600
Жмудь Э. М. 9569
Жуков А. И. 10292

З

Залгаллер В. А. 9957
Заморзаев А. М. 10225
Золин А. Ф. 9727
Зубов В. Г. 10389
Зубов В. И. 9935
Зуев И. В. 10241

И

Іваненко В. В. 9776
Иванова Л. С. 9748
Инфельд Л. 10217
Иоганзен Б. Г. 9397
Ирошников Н. П. 9480
Исии 9989
Ито 9883, 9885

Й

Йокота 10046

К

Канторович Л. В. 9449, 10142
Карандеев К. Б. 10389
Карасев И. М. 9775
Карнацевич Л. С. 9482
Карпеченко Ф. Т. 10236 Д
Карпиловская Э. Б. 9871
Каспарьянц А. А. 9907
Катаяма Т. 10159
Кац Г. І. 9572
Кикодзе Э. Б. 9567
Кільчевський М. О. 9930
Ким Кё Сек 9551
Кириллов Г. И. 10259
Кирищиев Р. И. 10224
Кодзава 9864
Козловский Д. А. 9794
Колмогоров А. Н. 9680
Комиссарук А. М. 10246
Комладзе Г. М. 10322
Кондратьев В. А. 9787, 9789
Константинеску Ф. 9534
Конюшков А. А. 9718
Костюкович Е. Х. 10285
Кошелев А. И. 9875
Крал И. 9949
Крамар Ф. Д. 9445
Красовский Н. Н. 9806
Крастинь А. Ф. 10297
Крейн М. Г. 9968
Крейцер Г. П. 10201
Кремнева Ю. П. 9544
Кроль К. Г. 10410
Кубенский А. А. 9654
Кудрявцев Б. И. 10403
Кулешов Ю. Г. 9080
Курбатов В. А. 9591
Куфарев П. П. 9742
Кухтенко В. И. 10165

Л

Ладыженская О. А. 9875, 9880
Лазарев В. Г. 9640
Ландо Ю. К. 9921
Левин Б. Я. 9750
Левин В. И. 9936
Левинов А. М. 10226
Левченко Ю. Д. 10229, 10230
Линский В. С. 10314
Линь Цзин-жун 9691
Лихтарников Л. М. 9922
Ли Юэ-шэн 9796
Лощинин В. С. 9791, 9792, 9851 Д
Лыкова О. 9823
Ляпунов А. А. 9408, 9705, 9706

М

Магалинский В. Б. 10172
Максудов Ф. Г. 9697
Манукян М. М. 9902
Мартиросян Р. М. 9863
Матюшкин А. М. 9467
Мацкина Р. Ю. 9707
Маэно С. 10154
Метелицын И. И. 9888
Мизюк Л. Я. 10389
Миньковский Е. М. 9469
Мітропольський Ю. О. 9822
Михайлов В. П. 9855, 9856
Михлин С. Г. 9914
Молчанов А. М. 10030
Молюков И. Д. 9445
Морев И. А. 9764
Мячин В. Ф. 9785

Н

Нагаев С. В. 10037
Нагорный Н. М. 9499
Нарец Л. К. 10294
Натанзон В. Я. 9546
Натансон Г. И. 9687
Натансон И. П. 9449, 9687, 9700 К
Новосельцев Я. В. 10383
Номото Х. 10057
Нумеров С. Н. 10289

О

Окано Х. 10158
Онищенко В. И. (В. І.) 9903, 9911 Д
Онищик А. Л. 9573
Онищук Н. М. 10249
Орлов С. И. 10432
Осипова М. И. 9484
Островский Г. М. 9843
О Чен Хён 9933

П

Панов Д. Ю. 9405, 10330 К
Павлючук А. К. 9728
Пегель В. А. 9397
Пејовић Т. 9950 К
Пергаменцева Э. Д. 9774 Д
Персидский К. П. 9767
Петров А. А. 10097
Платонов М. Л. 9511
Плебанский Г. 10217
Плоткин Б. И. 9563, 9564
Погребысский И. Б. 9450
Поляцкий В. Т. 9998
Попов Е. П. 9844
Постников А. Г. 9509, 9510
Пугачев Я. И. 9929
Пудовкин М. А. 9898
Пятецкий И. И. 9510

Р

Рапопорт Е. Н. 10421
Расулов М. Л. 9899
Рехлицкий З. И. 9829
Родин В. Н. 9639
Рожанская Ю. А. 9500
Розенвассер Е. Н. 9812
Розенфельд Б. А. 10226

Румянцев В. В. 9814
Русанов Б. В. 9894
Русевич И. М. 10374

С

Савельев С. П. 10260 Д
Самойлов А. И. 10162
Симомура Я. 10158
Симония В. Т. 9621
Сиотани 10080
Славин И. П. 10400
Смирнов А. Д. 10397
Смирнов Л. В. 9409
Смирнов М. М. 9448
Смогоржевський О. С. 9754
Смолов В. Б. 10383
Соколов Ю. Д. 9450
Сояма И. 10157
Сретенский Л. Н. 9845
Станојевић Ч. В. 9717
Станулов Н. 10376
Стечкин С. Б. 10017
Стоев Ст. 10152
Столяр А. А. 9473
Суганами С. 10153
Сунь Хэ-шэн 10269
Сунь Юн-шен 9722
Су Сюань-ло 10412
Сутюшева Ш. Ш. 10281

Т

Тагая М. 10157
Тахванов Г. И. 10383
Темляков А. А. 9756
Терехов В. М. 9838
Терлецкий Я. П. 10172
Ткачев В. Ф. 9797
Троицкий В. А. 9811, 9819
Троянов Л. А. 10398
Тумаркин Г. Ц. 9751
Турчанинова З. И. 9463
Тюрин Г. П. 10201

У

Успенский В. А. 9491

Ф

Феодосьев Р.-Е. В. 9927, 9928
Фрайман Х. П. 9443
Фридман А. А. (III) 9601
Фудзисаки Г. 9599
Фудзита Х. 10155
Фукумицу 9877

Х

Хавинсон С. Я. 9751
Хаяси 9885
Халанай А. 9926
Халитова Н. А. 10014
Хасидзумэ 10115
Хатипов А. Э.-А. 9442
Хичий О. Ф. 9437
Ходырева В. М. 9858
Хорасава Х. 10156
Хэ Цзянь-сюнь 9817

Ц

Цитланадзе Э. С. 10013

Ч

Чан Чхан Хуи 9790
Челпанов И. Б. 9788, 9840
Черников С. Н. 9561
Чернышенко Э. А. 10277
Чжао Фан-сюн 10295
Чжоу Сюе-гуан 9670

Ш

Шандор Ш. 9926
Шанин Н. А. 9498
Шафаревич И. Р. 9594
Шестопал Г. А. 9408
Шилов Г. Е. 9399
Шмыглевский Ю. Д. 10404
Шумов А. С. 9771 К

Э

Эльясберг Е. Е. 10235 Д

Ю

Ющенко О. А. 9890

Я

Яблонский С. В. 9637, 9638
Якубик Я. 9626
Якубович 9809, 9813, 9815, 9816
Яновский С. В. 9913
Яруткин И. Г. 9656

A

Abadie J. 10177
Abe S. 10252
Abrham J. 10138
Acroff R. 10131
Adachi R. 10278
Aeppli A. 9678
Ahlfors L. 10268
Alexits G. 9699
Alger J. R. M. 10415
Allais M. 10127
Almeida P. R. 10214
Altman M. 10011, 10016
Amitsur A. S. 9611
Ammann P. H. 9931
Amundson N. R. 10439
Amy L. 10150
Anastassiadis J. 9970
Anderson A. R. 9492
Ando H. 9669
André J. 9810
Andrews L. J. 10352
Anke K. 9778
Aparo E. 10373
Apostol T. M. 9503
Archer J. 10396
Arscott F. M. 9973
Atkinson F. V. 9967
Audley R. J. 10052
Auricoste J. 10433
Aurora S. 10003
Auslander M. 9633
Ayral P. 10177

B

Bajraktarević M. 9938, 9939
Baeder H. A. 10185
Balatoni J. 10061
Balcerzyk S. 9657
Bandić I. 9830
Banerjee D. 10083
Banks Ch. 10179
Barnes E. S. 9512
Bartlett M. S. 10042, 10119
Baten W. D. 10185
Battek J. 10178
Bauer F. L. 10299, 10300
Bazin A. H. 10151
Beach L. A. 10069
Beeman W. E. 10199
Bellman R. 10051
Bennett B. M. 10100
Berg L. 9915
Berge C. 10125
Berger M. J. 10068
Besseling J. F. 10408
Bessell J. E. 10143
Beusch W. 10356
Beyer O. 10149
Bharucha-Reid A. T. 10054
Białynicki-Birula A. 10007
Bianchi L. 9412 К, 9413 К
Biermann K. R. 10033
Bilo J. 10223, 10227
Bizadse A. W. 9887 К
Björck G. 9986
Blackwell D. 10027
Blanuša D. 10263, 10264
Blanyer C. G. 10381
Blaschke W. 10418
Bleick W. 9729
Bloch A. 9521
Blondel J.-M. 9874
Böhm C. 10373
Böhm J. 10146
Bonfiglioli L. 10328
Bononcini V. E. 9724
Booth A. 10372
Börsch-Supan W. 10301
Bott R. 9672
Bottenbruch H. 10301
Bouligand G. 10245
Bournonville L. de 10426
Brauer G. 9798
Breiman L. 10040
Breny H. 10148
Bressan A. 10218
Brillouin L. 10064
Broch E. K. 9515
Brokate K. 10342
Buicliu Gh. 10203
Buchsbaum D. A. 9633
Butzer P. L. 9974
Byerly R. T. 10413

C

Cahill W. F. 10290
Caillet C. P. 10379
Caligo D. 9456
Camp K. 10428
Cantoni L. 9943
Cao-Pinna V. 10141
Carlitz L. 9504
Carteron J. 10412
Case K. M. 9917
Cazenave R. 9978
Červená A. 9545
Champine G. 10340
Chao F. H. 10295
Chemnitius F. 9951 К
Chen Kuo-Tsai 9570
Cherry E. C. 9423
Cherubino S. 9554 К
Chiang C. L. 10181
Chin Yuan-shun 9828
Choquet G. 9768
Chu Chiao-min 10291
Chung J. H. 10423
Churchill S. W. 10291
Clapham J. C. R. 10136
Clark F. E. 10089
Coales J. F. 10164
Cobbe A. P. 9635
Codd E. F. 10366
Cohen A. C., Jr. 10074
Cohen J. W. 10167, 10171
Cohn H. 10317
Cohn R. M. 9618
Colborn H. W. 10413
Coleman A. J. 9947
Collatz L. 9458
Connor W. S. 10109
Conrad P. 9612
Consael R. 10056
Cooke-Yarborough E. H. 10357
Cooper B. E. 10101
Corsten L. C. A. 10082
Coşniţă C. 10200, 10210, 10242
Cossa P. 9414 К
Cossu A. 10258
Cotroneo A. 10348
Court N. A. 10208
Creager J. A. 10106
Cronin J. 10012
Cruceanu V. 10248
Császár A. 9692
Cser A. 9485
Csonka P. 10319
Curnow R. N. 10111
Curtis Ch. W. 9620
Curtis M. L. 9666

D

Dadda L. 10358
Dady G. 10405
Dantzig D. van 10133
Danzer L. 10267
Darmois G. 10116
Darré M. 10327
Davies D. W. 9642
Davis R. B. 9867
Davison J. F. 10349
Deaux R. 10213
Debever R. 10256
Dedecker P. 9675, 9676
Delange H. 9505, 9735
Delaporte P. 10117
DeLury D. B. 10184
De Smet A. 10130
Deutsch E. 9919
Devidé V. 9703
Dianni J. 9433, 9434
Ding Shia-shi 9684, 9995
Dionisio J. J. 9681
Dismuke N. M. 10351
Dobrescu E. V. 9696
Dobrzycki S. 9430
Domb C. 10045
Dornbusch P. E. 10438
Douce J. L. 10385
Douglas A. S. 10288
Draeger M. 9472
Dreyfus P. 10337
Duffin R. J. 9889
Dufrénoy J. 10180
Dugué D. 10035, 10036
Dugundji J. 9662, 9668
Dunn H. D. 10136
Duparc H. J. A. 9518
Dutka J. 10346

E

Easterfield T. E. 10002
Edwards R. E. 9760, 9987
Eeden C. van 10086
Ehresmann Ch. 9673
Eilenberg S. 9632
Elfving G. 10077
Elianu I. 9402
Eliasen E. 10286
Éltetö O. 10095
Ensing L. 10387
Ertel H. 9933
Erwe F. 9966 К
Eulerus L. 10202 К
Eves H. W. 9523
Ewald G. 10220

F

Faddejew D. K. 10065
Fadini A. 9613, 9781, 9782
Fáry I. 9677

Favard J. 9720
Fazekas F. 9848
Fehr H. F. 9411, 10193
Felber S. 9424
Fenyö I. 9972, 9976
Ferrar W. L. 9555 К
Few L. 9514
Fichefet J. 9438
Ficken F. A. 9876
Fiedler E. R. 10368
Fieller E. C. 10123 К
Finlay A. H. 10198
Finsler P. 9704
Fisher M. E. 10045
Fisher W. D. 10094
Fladt K. 9444
Fleichman B. A. 9876
Flett T. M. 9732, 9733
Flügge-Lotz J. 9800
Foiaş C. 9689
Forsythe A. I. 10296
Forsythe G. E. 10296
Fort M. K., Jr 9659, 9666
Fortet 10059
Fox M. 10104
Franckx Ed. 10244
Fréchet M. 9762
Frei T. 10279
Frenkel J. 9674
Freudenthal H. 9439
Friedman A. 9765
Froggatt R. J. 10334
Fröhlich A. 9532
Fubini G. 9416 К
Fujimoto A. 10255
Fuller A. T. 9537, 9543
Furstenberg H. 10205, 10206

G

Gambill R. A. 9820
Gampe F. 10402
Ganelius T. 9723
Ganguli P. L. 9695
Gano J. J. 10359
Gardner M. 9422
Garside R. F. 10161
Garza A. 10112
Gaudfernau L. 10350
Gaudiot P. 9954 К
Geier A. 9744
Gennaro P. 10191
Gérard H. B. 10113
Gérard J. 10088
Gerberich C. L. 10287
Gheorghiev Gh. 9400
Gheorghiu N. 9725
Gheorghiu O. E. 9763, 10251
Ghermănescu M. 9455
Ghika Al. 9999, 10000
Ghosh P. K. 9937
Gimpel M. 10196
Ginsburg J. 9526
Gladwell G. M. 9901
Glatfeld M. 9960
Goldman A. J. 9560
Gomes Spíndola A. 10031
Goode H. H. 10420
Gotlieb C. C. 10423
Gouriet G. G. 9834
Green S. L. 9955 К
Greenspan D. 10282, 10388
Grömer H. 9941
Groszkowski J. 9799
Guichardet A. 10023
Günter N. M. 9487 К
Gut H. 10326
Gutman M. 9948, 10092, 10186
Gutowski R. 9801
Guy W. T., Jr 9527

H

Haack W. 10234 К
Hadwiger H. 10275
Hahn W. 9839
Hall M., Jr 10221
Hammer P. C. 10306
Hanly V. 9616
Hanna J. R. 9958
Hannan E. J. 10120
Harkin B. 10145
Hart W. L. 10303
Härtig K. 9497
Hartman S. 9508
Hatori H. 9646
Havel V. 10233
Hawxhurst D. S. 10112
Hegarty A. 10437
Heilingbrunner O. 10409
Heinke C. H. 9466
Heins A. E. 9909
Helbig W. A. 10353
Hellwig Z. 10107
Helstrom C. W. 10055
Heppes A. 10108
Herrick H. L. 10366
Herstein I. N. 9630
Hestenes M. R. 10305
Heyn E. 9872
Higman G. 9557
Hintzen J. 9587 Д
Hirschman I. I., Jr 9698
Hochschild G. 9596
Höchstadt H. 9979
Hocking J. G. 9651
Hodges J. L., Jr 10181
Hoeffding W. 10084
Hoffman P. J. 10075
Hogben L. 9530
Holder D. 9535
Homan C. J. 10439
Horn Ch. 10377, 10378
Horowitz J. 9489 К
Hotta J. 9982
Howlett J. 10407
Huet D. 9862
Hughes D. J. 9489 К
Huffman D. 10360
Hunn R. J. 10431

I

Iacob C. 9488 К
Idzerda H. 10387
Ikeda M. 10252, 10253
Ikegami T. 9686
Ionescu Tulcea C. T. 10024 К
Iorga M. 10232
Irwin J. O. 10078
Ishii T. 10005

J

Jacobs W. 10129
Janko J. 10099
Jans J. P. 9608
Janssen J. M. L. 10387
Jewett J. W. 9773 Д
Johnson M. W. 9904
Joshi D. D. 10053
Josifko M. 10105
Jung J. 10093

K

Kakita T. 10020
Kalaba R. 10051
Kämmerer W. 10336
Kampé de Fériet J. 10028, 10029
Kao Heng-San 9533
Kapuano I. 9709—9713
Karadžić L. 9739, 9740
Kasch F. 9559
Kashiwagi S. 9758
Kates J. 10419
Kawada Y. 9631
Kawai I. 9981
Kelly J. L., Jr 10066
Kemperman J. H. B. 10087
Kendall D. G. 10043
Kennedy D. R. 10368
Keogh F. R. 9964
Keyfitz N. 10085
Khan N. A. 9547
Khatri C. G. 10096
Kimura N. 9584
Kippels H. 9586 Д
Kircher P. 10427
Klamkin M. S. 9524
Klein H. 9470, 9471
Klee V. L. 9993
Kleinfeld E. 9622
Klonecki W. 9983
Kluvánek I. 9985
Kneser M. 9559
Knoblich G. 9588 Д
Knopp K. 9769 К
Kolibiarová B. 9581
Kolmogorov A. N. 10067
Komjáthy A. 9542
König H. 9749
Kořínek V. 9453
Korous J. 9770 К
Kotal M. 10284
Kowalsky H.-J. 9653
Kramer V. A. 10001
Krein M. G. 9900
Kreisel G. 9494
Krenkel E. 10320
Kriens J. 10132
Kron G. 9649
Krzyżański M. 9866
Kucharczyk S. 10176
Kuipers L. 9536
Kuo Da-chun 9690
Kupisch H. 9559
Kuratowski K. 9660
Kusmin R. O. 9487 К
Kwan Chao-chin 10015

L

Lacombe D. 9494
Lafleur Ch. 9730, 9731
Laframboise M. 9476
Lamens A. 10056
Lange A. 10396
Lazarson T. 9603
Lee C. Y. 9645
Leech J. 9575
Leger G. F., Jr 9634
Leger R. M. 10363
Lehto P. 10114
Lentz J. J. 10341
Leray J. 9853
Levi F. W. 9440, 9441
Lévi R. 10126
Lévy A. 9702
Lévy P. 10047, 10072
Lewis D. J. 9605
Lewis T. 10123 К
Lieberman D. A. 10441
Lin Chün 10015
Lin Jiing-rong 9691
Lipiński J. S. 9652
Loberman H. 9648
Lofgren L. 10384
Lombardi F. 9682
Lovass-Nagy V. 9783
Lowdenslager D. B. 10022
Ludford G. 9857
Ludwig G. 9833
Łukaszewicz J. 10187
Lumpe A. 9426
Łuszczewska-Romahnowa S. 10025

M

McCluskey E. J., Jr 9568
Macdonald N. D. 10435
McGillis D. 10414
McGregor J. L. 9961
McLeod J. H. 10363
Maeder D. 10356
Mahler K. 10195
Mann H. B. 9615, 9616
Manne A. S. 10140
Maranda J. M. 9623
Marcus M. 9961
Marek J. M. 9460
Markowitz H. 10134
Markus L. 9805
Marret C. 10433
Marshall A. W. 10308, 10309
Marsicano F. R. 9436
Marzani Th. 10194
Masani P. 10149
Matsumoto M. 10265
Matsuno Sh. 10388
Maxwell E. A. 9953 К
Meinhardt D. 9558
Metropolis N. 10310
Meyer C. 9517
Michael J. H. 9661
Mikolás M. 9694
Mikulaschková R. 10312
Miles J. W. 9896
Miller G. F. 10307
Miller L. H. 10102
Minnick R. C. 10315
Minorsky N. 9831
Mirsky L. 9548, 9552
Mišcenko E. F. 9447
Mises R. von 10071 К
Mitchell J. L. 10331
Mitra S. K. 10118
Mitrinovitch (Mitrinovič) D. S. 9628, 9952 К
Monhemius W. 10135
Morita Katuhiko 10323
Morita Kiiti 9631
Moser L. 10034
Motchane L. 9708
Motzkin T. S. 10303, 10313
Mouette L. 9576
Mrówka S. 9655
Müller P. F. 10380
Munro N. A. 10190
Munn W. D. 9583
Murariu P. 9481
Murata K. 9625
Mycielski J. 9657
Myller A. 10192, 10207
Myrberg L. 9755

N

Nagarathnamma H. S. 10254
Nagata J. 9658
Nagata M. 9598
Nagumo Zin-iti 9842
Nakamura M. 10006
Nakanishi S. 9685
Nakano H. 9984
Nardini R. 9910
Nash J. 10262
Naslin P. 10343—10345
Nassif M. 9737, 9738
Nemanic D. J. 10439
Neumann M. 10219
Newman L. T. 10112
Nicolovius R. 9869
Ninot Nolla J. 10401
Nisio M. 10039
Nöbauer W. 9604
Noble M. E. 9719
Norton M. S. 9478
Nussbaumer H. 10390
Nutter J. C. 10393

O

Offereins R. P. 10387
Ohmann D. 10272, 10273
Okamoto E. 9665
Oldenburger R. 9836
Olech C. 9808
Olsen K. H. 10331
Orloff C. 9540
Oser H. 9893
Ostlund L. A. 9477
Ostrowski A. 9541, 10304
Ozaki S. 9758

P

Pa Chen-kuo 10270
Paasche I. 9965 К
Pajares Diaz E. 10243
Pál L. 10174
Parízek B. 9582
Pascual M. J. 9932
Pati T. 9962
Pearson E. S. 10123 К
Perkal J. 10178
Petersen G. M. 9964

Piaget J. 9501
Piazzolla Beloch M. 10238
Pini B. 9879
Piranian G. 9741
Plessis N. 9683
Pontreaghin L. S. 9447
Pratt G. V. 9427
Prékopa A. 10048
Prim R. C. 9647
Pták V. 9549
Puig-Adam P. 9410

R

Rado R. 9552
Rajski C. 10073
Ramachandran K. V. 10096
Ramanathan K. G. 9614
Rath P. C. 9721
Rayner F. J. 9597
Ree R. 9571
Rees D. 9636
Regan F. 9736
Reissner E. 9904
Remmert R. 9761
Rényi A. 10061, 10098, 10175
Révész P. 10108
Robinson D. W. 9977
Rodero Carrasco J. 9945
Rolewicz S. 9990
Rollnik H. 9833
Rose A. 9493
Rosen W. G. 10018
Rosenblatt M. 10058
Rossi F. S. 9519
Rossier P. 10197
Roy K. P. 10081
Roy S. N. 10118
Rózsa P. 10280
Rumanovský I. 9465 К
Rumble W. G. 10353
Rust Ch. 9736
Rychnovský R. 9490 К

S

Saaty Th. 10170
Sabliet S. 10079
Sakai S. 10008
Salveson M. E. 10144
Sampford M. R. 10110
Samssonow V. 10318
Sanders J. E. 9489 К
Sangren W. C. 10287
Santos Guerreiro J. 10019
Satterly J. 10204
Savage L. J. 10124 К
Sawaragi Y. 9832
Schäfer H.-W. 10429
Schäffer J. J. 9818
Schatten R. 9996
Schild A. 9889
Schiffer M. 9860, 9861
Schiek H. 9566
Schläpfer J. W. 10425
Schlüter A. 10335
Schmidbauer H. 10215
Schmidt J. 9624, 9714, 9715
Schoenberg I. J. 9746
Schoenfeld L. 9502
Schützenberger M. P. 9578
Schwartz D. 10076
Schwartz L. 9474
Schwartz M.-H. 9766
Schwartzenberg J. W. 10392
Sciama A. 10375
Segre B. 9513
Segre C. 9415 К
Seibert P. 9810
Sekanina M. 9716
Selberg A. 9457
Seligmann P. S. 10139
Shah Tao-shing 9745
Shapiro A. 9663
Shapiro H. 10113
Sharma K. C. 9969
Shepherdson J. C. 9532
Shinbrot M. 10163
Shinomiya T. 10302
Shukla H. 9971
Sierpinski W. 9679 К
Šik F. 9565
Silveira M. da 9641
Silverman R. A. 10060
Simokawa Y. 10323
Sirotti V. 10128
Sklar A. 9503
Sluckin W. 10062
Šmahel J. 9459
Smith R. C. T. 9574
Spanier E. H. 9664
Sparenberg J. A. 9906
Specker E. 9701
Speranza F. 10250
Squires R. B. 10413
Sreedharan V. P. 9429
Stanković B. 9975
Steeg C. W., Jr 10166
Stephen J. H. 10357
Stöhr A. 9531
Storm E. F. 10431
Straszewicz S. 9944
Stratta R. 10325
Strodt W. 9786
Strohl G. R., Jr 9650
Su Buchin 10257, 10266
Succi F. 9506
Šulka R. 9579
Sunahara Y. 9832
Suquet P. 9891
Sutcliffe A. 9522
Suzuki Y. 10103
Swift J. D. 10221
Synge J. L. 10290
Szabó Á. 9425
Szczepanowski H. 10176
Szénássy B. 9464 К
Sz.-Nagy B. 9997

T

Tachikawa H. 9631
Tack P. I. 10185
Takeda K. 10261
Takeuchi K. 9627
Takeuti G. 9495, 9496
Tambs Lyche R. 9693
Tanzi Cattabianchi L. 9940
Taussky O. 10311
Taylor R. L. 9635
Terada F. 9606
Thalberg O. M. 10239
Thébault V. 10211, 10212
Theodorescu R. 10038
Theus R. B. 10069
Thierrin G. 9585
Thrall R. McD. 9553 К
Thron W. J. 9741
Thurston H. S. 9550
Tiberiu R. 9556
Tierney J. W. 10439
Tiffany A. 10361
Toda H. 9667, 9671
Todd J. 10311
Tompkins C. 10316
Tong Kwang-chang 9873
Tornehave H. 10216
Tornheim L. 9553 К
Tou J. 10382
Tremmel E. 9905
Trjitzinsky W. J. 9804
Trucco E. 9644
Trybuła S. 10090, 10091
Tsuboi T. 9758
Tukey J. W. 9468
Tvermoes H. 9577

U

Uhler H. S. 9525
Ulam S. M. 10173
Ulmo J. 10076
Ulrich W. 10168
Ulrick B. 10388
Ulucay C. 9747
Unger H. 10298
Urabe M. 9807
Usher Th., Jr 9538
Utz W. R. 9942

V

Valdés Gamez R. 10026
Van Vranken Wend D. 9772 Д
Vannah W. E. 10442
Vasilache S. 9528 К
Vessereau A. 10076
Vetter Q. 9431
Vidav I. 10021
Vinogradov I. M. 9395
Vivier M. 9529 Д
Vlaardingen M. van 9479
Vogel Th. 9802, 9803
Volland W. 10274
Vyčichlo F. 9453

W

Wachułka A. 9434
Walker R. J. 10221
Walker R. M. 10209
Wallace A. D. 9580
Wallace D. A. R. 9610
Walsh J. E. 10032, 10188
Wang H. 9643
Weinberger A. 9648
Weingarten H. 10430
Weinstein A. 9881
Wenke K. 10424
West J. C. 10385
Westcott J. H. 10147
Weston V. H. 9908
Wetzel W. 10137
Whaples G. 9593
Whitehead J. H. C. 9664
Wiebelitz R. 9784
Wiener N. 10041, 10049
Wijvekate M. 10160
Wildanger E. G. 10365
Wilkes M. 10364
Willcox A. B. 10004
Willis D. W. 10364
Wilson R. 9752, 9753
Williamson J. H. 9629, 9991
Winkler H. 10395
Winter H. J. J. 9428
Wintner A. 9507, 10041
Wood A. 9475
Works Ch. C. 10324
Wunch W. S. 9800
Wünsche G. 10189
Wußing H.-L. 9589 Д

Y

Yang H. H. 10386
Yates R. C. 9934
Yerushalmy J. 10181
Yih Chia-Shun 9777
Yntema L. 10044
Yoshii T. 9609
Youden W. J. 10109
Young P. L. 10411

Z

Zamfirescu I. 9988
Zaremba S. K. 9793
Zechendorf E. 9520
Żelazko W. 9607, 10007
Ziller A. 10276
Zítek F. 10169
Zlámal M. 9865
Zubrzycki S. 10183
Zulauf A. 9516
Zurmühl R. 10329
Zuse K. 10367
Zweizig J. R. 10362

Технический редактор *Р. М. Денисова*